

поправкой можно пренебречь, если сила меняется достаточно медленно по отношению к периоду собственных колебаний.

## ДВАДЦАТЬ ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ

(18/I 1931 г.)

*Реальность синусообразных слагаемых в интеграле Фурье. Применения гармонических резонаторов в регистрирующих приборах. „Молоточек“ Н. Н. Андреева. Ток в ускоренно движущемся электрическом контуре; инерция электронов. Аналогия в вопросах колебаний.*

Я хочу ответить сначала на записку. В ней поставлен разумный и интересный вопрос. Он касается физического смысла разложения в интеграл Фурье.

Когда мы разлагали

$$(1 + k \cos pt) \cos \omega t \quad (1)$$

на три синусоидальные составляющие, то на вопрос об их реальности мы отвечали следующим образом. Представление (1) и представление

$$\cos \omega t + \frac{k}{2} \cos(\omega - p)t + \frac{k}{2} \cos(\omega + p)t \quad (2)$$

это (на основании тригонометрии) — одно и то же. Каждое из трех колебаний (2) можно выделить резонатором.

Когда же мы имели дело с непериодической функцией такого типа, как на рис. 74, и разлагали ее в интеграл Фурье

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \{g_1(u) \cos ut + g_2(u) \sin ut\} du, \quad (3)$$

то мы тоже представляли ее в виде суммы синусоидальных колебаний, каждое из которых длится от  $t = -\infty$  до  $t = +\infty$ . В первом случае был дискретный спектр, здесь — сплошной. Реальны ли здесь эти синусоидальные составляющие?

Возьмем наш интеграл Фурье при  $t < 0$ , когда заведомо  $f(t) = 0$ . Разумеется, там не имеет смысла говорить о существовании синусоидальных составляющих, но никакого противоречия с (3) нет.

Когда спектр дискретный, можно выделить каждую синусоидальную составляющую в отдельности. Но в случае непрерывного спектра физически можно выделить только *интервал* частот, а не отдельную частоту. Все физические средства таковы, что могут выделять из (3) только некоторые континуумы частот. А для  $t < 0$  *любой* такой континуум частот дает в сумме нуль.

Можно доказать, что какой бы мы ни взяли резонатор и как бы мы его ни настроили, колебание, возникающее в резонаторе, представляется таким интегралом Фурье, который равняется нулю при  $t < 0$ , если там  $f(t) = 0$ <sup>1</sup>.

Резонаторы встречаются чрезвычайно часто в качестве инструментов для исследования процессов. Сюда относятся гальванометр, осциллограф, сейсмограф. Свойства этих регистрирующих аппаратов хорошо известны. Их следует строить по-разному, в зависимости от требований, которые к ним предъявляются. Какими точками зрения нужно руководствоваться при постройке таких приборов?

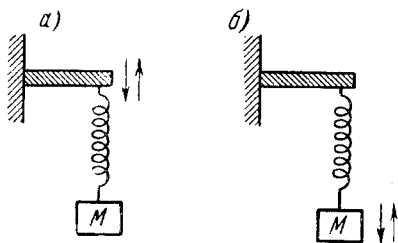


Рис. 80.

Возьмем, например, сейсмограф. При сотрясении почвы верхний конец пружины (рис. 80, а) качается. Можно написать уравнение движения груза в неинерциальной системе отсчета, связанной с подставкой. Здесь требуется, чтобы груз по возможности оставался в покое в инерциальной системе. Тогда изменения длины пружины будут измерять смещения почвы. Это требование приводит к тому, что собственный период системы должен быть гораздо больше периода колебаний почвы, т. е. должно быть

$$\frac{p}{\omega_0} \gg 1$$

( $p$  — вынуждающая,  $\omega_0$  — собственная частота). Чем больше отношение  $p/\omega_0$ , тем правильнее изменения длины пружины воспроизводят колебания почвы.

Совсем иначе обстоит дело в осциллографе. Здесь „подставка“ (рис. 80, б) находится в покое, а смещение „груза“ должно быть

<sup>1</sup> [См. том V, стр. 69 и след.]

подобно действующей на него силе и возможно больше по величине. Таким образом, здесь предъявляются два требования:

- 1) чувствительность;
- 2) отсутствие искажений формы силы.

Эти два требования противоречивы: если чувствительность велика, то происходят и большие искажения. Это следует прямо из тех свойств резонаторов, которые мы уже знаем. Большая чувствительность (большое отклонение под действием заданной силы) достигается при резонансе. Но если сила не чисто синусоидальная, то — вблизи резонанса на одну из ее синусоидальных составляющих — различным синусоидальным составляющим соответствует совершенно различное соотношение отклонения и силы. Смещение имеет совсем другую форму, чем сила.

Нужно искать компромисс между обоими требованиями.

Пусть мембрана (например, мембрана телефона) колеблется синусообразно с очень малой амплитудой. Как измерить эту амплитуду? Представим себе, что на мембране лежит тело массы  $M$ . Мы можем написать для него уравнение движения

$$M\ddot{x} = F + P, \quad (4)$$

где  $P$  — сила, действующая на  $M$  со стороны мембраны,  $F$  — сумма всех остальных сил (сюда входит и сила тяжести).

Зная движение мембраны, т. е. функцию  $x = x(t)$  и силу  $F$ , можно из уравнения (4) вычислить величину  $P$ . Предположим сначала, что масса  $M$  припаяна к мембране. Если из уравнения (4) получится  $P < 0$ , это будет означать, что спай тянет массу  $M$ . Пусть теперь  $M$  не припаяна, а просто лежит на мембране. Теперь, если уравнение (4) дает  $P < 0$ , это будет означать, что масса отрывается от мембраны.

Найдем, при каких условиях это произойдет.

Пусть  $F$  — только сила тяжести. Тогда

$$M\ddot{x} = -Mg + P.$$

Мембрана движется по закону

$$x = a \sin \omega t, \quad (5)$$

и, следовательно,

$$P = -Ma\omega^2 \sin \omega t + Mg.$$

Грузик оторвется от мембраны ( $P$  будет принимать отрицательные значения), если

$$Ma\omega^2 \geq Mg,$$

т. е. ускорение мембраны начнет превышать ускорение тяжести. При этом амплитуда смещения

$$a \geq \frac{g}{\omega^2}. \quad (6)$$

Будем постепенно увеличивать амплитуду колебаний мембраны. Пока она мала, грузик будет двигаться вместе с мембраной. Когда амплитуда возрастет настолько, что будет выполнено условие (6), масса начнет подпрыгивать. Если на телефонной мембране лежит шарик, то при малых токах все будет спокойно, но при увеличении тока в определенный момент начинается дребезжание. Определив момент

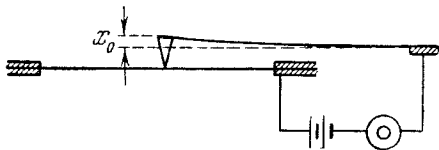


Рис. 81.

начала дребезжания, можно, зная  $\omega$ , вычислить  $a$ . Например, при  $\omega = 2\pi \cdot 200 \text{ сек}^{-1}$  дребезжание начнется при

$$a = \frac{981}{4\pi^2 \cdot 4 \cdot 10^4} \approx 0,006 \text{ мм.}$$

Получается очень чувствительный метод измерения амплитуды. На это обратил внимание Брэгг<sup>1</sup>. Н. Н. Андреев<sup>2</sup> использовал только что разобранный явление для построения измерительного прибора — „молоточка“.

Пусть, когда мембрана покоится (рис. 81), молоточек отклонен ею на расстояние  $x_0$  от своего положения равновесия, которое он занимал бы в отсутствие мембраны. При колебаниях мембраны имеем

$$M\ddot{x} = -k(x_0 + x) + P,$$

где  $k$  — упругость пружины молоточка,  $x$  — смещение мембраны. Подставляя сюда (5), получаем следующее значение амплитуды, при которой начинается дребезжание (т. е.  $P$  начинает принимать отрицательные значения):

$$a = \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} x_0, \quad (7)$$

<sup>1</sup> [Engineering, 1918.]

<sup>2</sup> [Н. Н. Андреев. Журн. прикл. физ., 2, 205, 1925.]

где

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M}$$

— собственная частота молоточка. Если

$$\omega_0^2 \ll \omega^2$$

(язычок с большим собственным периодом), то вместо (7) можно написать приближенно

$$a = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} x_0.$$

Изменяя  $x_0$  с помощью микрометрического винта и замечая начало дребезжания, можно отсюда найти  $a$ . Таким образом можно измерять амплитуды механических колебаний. Для того, чтобы прибор был возможно более чувствительным, нужно, чтобы отношение  $\omega_0/\omega$  было возможно меньше. Начало дребезжания (отрыва молоточка от мембраны) можно услышать в телефон (рис. 81). В этот момент начинается прерывание контакта.

Сделав  $\omega_0/\omega = 0,01$ , получаем в момент отрыва  $a = 10^{-4} x_0$ . Если отрыв наступает при  $x_0 = 1$  мм, то  $a = 10^{-4}$  мм. Получается чрезвычайно чувствительный прибор. Для амплитуд порядка  $10^{-4}$  мм теория еще хороша, но дальше начинаются неприятности. Теория предполагает, что молоточек просто лежит на мембране, не приставая к ней. В действительности он к ней как бы „чуть-чуть припаян“.

Что здесь поучительно? Большая чувствительность достигается благодаря тому, что при колебательных процессах ускорение чрезвычайно быстро растет с частотой (если амплитуда смещения задана). Из (5) имеем:

$$\ddot{x}_{\max} = \omega^2 a.$$

При больших частотах это ведет к колоссальным ускорениям, даже при ничтожных смещениях.

Например, пьезокварцевая пластинка колеблется с амплитудой смещения всего лишь  $10^{-6}$  см, но с частотой  $10^6$  сек<sup>-1</sup>. Получается максимальное ускорение

$$\ddot{x}_{\max} = 4\pi^2 10^{12} \cdot 10^{-6} \approx 4 \cdot 10^4 g.$$

Положим массу  $M$  на поперечно колеблющийся пьезокварцевый стержень (рис. 82). Что будет с собственным периодом?

Казалось бы, колебания должны замедляться и собственный период должен увеличиваться. В действительности может оказаться, что  $M$  совершенно не повлияет на период, потому что при том ускорении, которое имеет пьезокварц, она остается на месте. Пусть  $M=0,1$  г. При  $a=10^{-6}$  см,  $\nu=10^6$  сек $^{-1}$  для того, чтобы ее увлечь, нужна сила

$$M\ddot{x}_{\max} = M \cdot 4 \cdot 10^4 g = 0,1 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \approx 4 \text{ кг.}$$

При  $M=1$  г нужна была бы сила в 400 кг. Это — колоссальные силы, и для того, чтобы их создать, силы трения не хватает. Практически масса остается в покое, и ее присутствие не влияет на собственную частоту; оно только увеличивает затухание.



Рис. 82.

Благодаря огромным ускорениям, можно получать при механических колебаниях высокой частоты „феноменальные“ явления. Этот вопрос еще мало разработан.

Часто возникает такой вопрос: как движется маятник, если движется его точка подвеса (например, вместе с Землей)? Механика учит, как решать такие вопросы. Здесь нет никаких принципиальных трудностей.

Можно поставить аналогичный вопрос для электрических систем. Как ведут себя электрические системы, если они находятся в движении? На этот вопрос ответить не так просто. Механика не переносится сюда непосредственно.

Рассмотрим, например, электрическую цепь, движущуюся ускоренно (рис. 83). Как написать для этого случая уравнение для тока?

Начнем с обычного уравнения для тока

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (8)$$

и постараемся обосновать это уравнение. Ток в проводнике есть движение заряженных частиц — электронов. Пусть  $N$  — число электронов на единицу длины провода,  $\dot{x}$  — средняя скорость их упорядоченного движения. Тогда

$$Ne\dot{x} = i, \quad (9)$$

где  $e$  — абсолютное значение заряда электрона. Что представляет собой с этой точки зрения индуктивность  $L$ ? Казалось бы, это не что иное, как масса электронов, т. е.  $L$  получается вследствие

инерции электронов. Но это не так. Если бы это было так, то задача о токе была бы механической задачей о движении электронов. Дело в том, что  $L$  не определяется суммой масс электронов и в этом заключается глубокое отличие от механики, где общая масса системы есть сумма масс составляющих ее частиц:

$$M = \sum_i m_i.$$

В электродинамике кинетическая энергия — это магнитная энергия движущихся электронов. Магнитная энергия есть квадратичная функция от напряженности поля. Поля отдельных электронов суммируются, но отнюдь не энергии: помимо членов, определяемых отдельными электронами, в выражении для энергии имеются еще члены взаимодействия. Индуктивность контура обусловлена именно этой *взаимной* магнитной энергией, намного превышающей сумму масс всех электронов. Но вернемся к вопросу об уравнении для тока в ускоренно движущейся цепи.

Электроны имеют собственные массы. Будем считать, что скорости электронов малы, так что можно пренебречь релятивистским эффектом изменения массы со скоростью. В таком случае можно написать для электрона уравнение движения

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} + eE, \tag{10}$$

где  $E$  — напряженность электрического поля, а  $-\alpha\dot{x}$  — некоторая сила, аналогичная трению. Разные теории объясняют эту силу по-разному, но мы не будем входить в объяснение этой силы, а заметим лишь, как связано  $\alpha$  с макроскопическими величинами. Макроскопический ток связан с полем законом Ома

$$i = \frac{E}{\rho},$$

где  $\rho$  — сопротивление линейного проводника. Пользуясь (9), получаем:

$$\dot{x} = \frac{E}{Ne\rho}. \tag{11}$$

Пусть течет постоянный ток. Тогда из (10) имеем:

$$\alpha\dot{x} = eE. \tag{12}$$

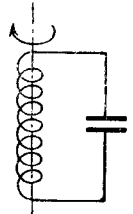


Рис. 83.

На основании (11) и (12) получаем:

$$\alpha = Ne^2 \rho. \quad (13)$$

Для вычисления среднего поля  $E$  поступают следующим образом. Применим к контуру (рис. 84) уравнения Максвелла. Мы исходим из уравнения Максвелла

$$\oint E_s ds = - \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}. \quad (14)$$

Интеграл в левой части мы разбиваем на два:

$$\oint E_s ds = \int_{bda} E_s ds + \int_{acb} E_s ds.$$

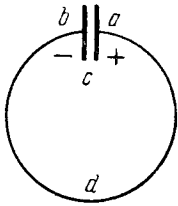


Рис. 84.

Если ток квазистационарный, то первый интеграл справа равен  $sE$ , где  $s$  — длина провода. По определению второй интеграл справа есть разность потенциалов  $Q/C$  между обкладками конденсатора. Итак,

$$\oint E_s ds = sE + \frac{Q}{C}. \quad (15)$$

Комбинируя соотношения (14) и (15), получаем:

$$E = - \frac{1}{s} \left( L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C} \right). \quad (16)$$

Однако в этом выводе допущена грубейшая принципиальная ошибка. Что такое разность потенциалов в электростатике? Это

$$P = \int_A^B E_s ds.$$

Определение имеет смысл только тогда, когда интеграл не зависит от пути между точками  $A$  и  $B$ , т. е., что равносильно, когда

$$\oint E_s ds = 0. \quad (17)$$

В нашем случае условие (17) заведомо не выполняется, так как имеет место соотношение (14), причем

$$L \frac{di}{dt} \neq 0.$$



Таким образом, в нашем случае понятие разности потенциалов не имеет смысла.

Какой же смысл имеет наш вывод уравнения (16)? Хотя интеграл  $\int E_s ds$  зависит от пути, мы можем принять, что *внутри* конденсатора (мы говорим *специально* о таком пути, который проходит внутри конденсатора) поле примерно такое же, какое было бы в электростатическом случае, если конденсатор имеет заряд  $Q$ . Только с этой оговоркой можно здесь говорить с достаточным приближением о разности потенциалов, несмотря на то, что в подобного рода явлениях понятие разности потенциалов в принципе неправильно.

Из уравнений (10), (13) и (16) следует:

$$\frac{sm}{e} \ddot{x} + sNep\dot{x} + \left( L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C} \right) = 0. \quad (18)$$

Если можно считать  $m$  бесконечно малым, то отсюда сразу получается обычное уравнение (8). Однако, как мы видим, уравнение (8) не вполне отвечает тому, что происходит в цепи. В полном уравнении (18) есть еще один член с  $\frac{di}{dt}$ , которым обычно пренебрегают. Это возможно именно потому, что взаимная масса электронов намного превышает сумму масс отдельно взятых электронов.

Мы хотим теперь написать уравнение в неинерциальной системе отсчета. Нас интересует только тангенциальная составляющая движения электронов. Нужно добавить в уравнение движения (18) тангенциальную силу инерции ( $-m\ddot{\xi}$ ), где  $\xi$  — путь, пройденный точками колебательного контура, а  $x$  — путь, пройденный электронами в системе координат, жестко связанной с контуром. Сила трения зависит от относительной скорости  $\dot{x}$ . Выражая  $\dot{x}$  через  $i$  с помощью соотношения (9) и учитывая, что  $\rho s = R$  есть полное сопротивление, получаем вместо (18) уравнение

$$\left( \frac{sm}{Ne^2} + L \right) \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = - \frac{sm}{e} \ddot{\xi}.$$

Как сказано, поправка  $sm/Ne^2$  очень мала по сравнению с  $L$ , и мы можем написать приближенно:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = - \frac{sm}{e} \ddot{\xi}. \quad (19)$$

Таким образом, в ускоренно движущемся контуре явления происходят так, как будто контур остается в покое, но зато действует электровозбудительная сила

$$-\frac{sm}{e} \ddot{\xi}. \quad (20)$$

Величина  $m/e$  очень мала:

$$\frac{m}{e} = \frac{1}{1,8 \cdot 10^7} \text{ CGSm.}$$

Какова может быть амплитуда электровозбудительной силы (20) при колебательном движении катушки? Здесь главное — частота. Пусть частота равна 200 колебаний в секунду, амплитуда — 0,5 см и пусть  $s = 100 \text{ м} = 10^4 \text{ см}$  (большая катушка). Тогда амплитуда электровозбудительной силы будет

$$\mathcal{E} = \frac{10^4 \cdot 0,5 \cdot 4\pi^2 \cdot 4 \cdot 10^4}{1,8 \cdot 10^7} \text{ CGSm} \approx 10^{-4} \text{ вольта.}$$

Это вполне измеримая величина.

Опыт такого рода был сделан Толмэнном и Стюартом<sup>1</sup>. Он был сделан не совсем так, как здесь говорилось. У них не было конденсатора ( $C = \infty$ ) и  $L \frac{di}{dt}$  было мало по сравнению с  $Ri$ . Таким образом, к этому опыту было приближенно применимо уравнение

$$Ri = -\frac{sm}{e} \ddot{\xi}.$$

Толмэн и Стюарт раскручивали катушку и внезапно ее останавливали. При этом наблюдалось появление кратковременного тока. Из опыта можно было найти отношение  $e/m$ .

Можно было бы, заморозив контур, уменьшить  $R$  и благодаря этому увеличить эффект. При очень низких температурах главную роль будет играть член  $L \frac{di}{dt}$ , но с помощью емкости можно для определенной частоты скомпенсировать индуктивный член и таким путем, пользуясь резонансом, получить довольно большие токи.

Я не вдаюсь в подробности, связанные с такими опытами. Для меня важно было изложить лишь относящиеся к этому кругу вопросов принципиальные соображения.

Быть может, есть случаи (при разрядах в вакууме), когда добавочная индуктивность  $sm/Ne^2$  играет заметную роль. Это интересно было бы выяснить.

<sup>1</sup> [Опубликован в 1915 г. В 1911 г. аналогичный опыт был осуществлен Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси. См. Н. Д. Папалекси. Собрание трудов, стр. 379 и след.]

Перейду к другому вопросу.

Мы видели, что существует глубокая аналогия между электрическими и механическими колебаниями. Можно провести много других аналогий. Вот одна аналогия, на которую обратил внимание Кирхгоф.

Изогнем упругий тонкий стержень (рис. 85). Его форму можно задать уравнением вида

$$\theta = f(s) \quad (21)$$

( $\theta$  — угол с осью абсцисс;  $s$  — длина дуги). Вид функции  $f$  характеризует кривую.

В теории упругости доказывается, что функция (21) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + n^2 \sin \theta = 0, \quad (22)$$

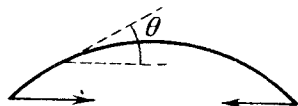


Рис. 85.

где  $n^2$  — определенная комбинация из величин, характеризующих стержень.

Уравнение (22) аналогично уравнению колебаний маятника с большой амплитудой. Зависимость угла  $\theta$  от длины дуги  $s$  такая же, как зависимость угла отклонения маятника от времени. Это — изящная и любопытная аналогия. Движение маятника в двух измерениях можно изобразить такой деформацией стержня, когда он образует кривую двойной кривизны. Самое интересное здесь то, что аналогия применима к колебаниям *большой* амплитуды.

## ДВАДЦАТЬ ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/1 1931 г.)

*Понятие о связях в механике. Связи голономные, не голономные и полуголономные. Полуголономные связи в электрических системах. Уравнения Лагранжа-Максвелла. Условие устойчивости Дирихле. Кинетическая и потенциальная энергии как квадратичные формы. Относительность рода связи.*

Мы рассмотрим теперь колебания таких систем, для однозначного описания конфигурации которых недостаточно задать *одну* координату. (В случае маятника конфигурация определяется заданием *одной* координаты: угла отклонения; в случае контура с индуктивностью и емкостью — также *одной* координатой: зарядом конденсатора).