Перейду к другому вопросу.

Мы видели, что существует глубокая аналогия между электрическими и механическими колебаниями. Можно провести много других аналогий. Вот одна аналогия, на которую обратил внимание Кирхгоф.

Изогнем упругий тонкий стержень (рис. 85). Его форму можно задать уравнением вида

$$\theta = f(s) \qquad (21)$$

(θ — угол с осью абсцисс; s — длина дуги). Вид функции f характеризует кривую.

В теории упругости доказывается, что функция (21) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + n^2 \sin\theta = 0, \qquad (22)$$

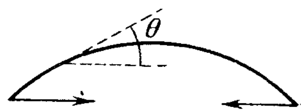

Рис. 85.

где n^2 — определенная комбинация из величин, характеризующих стержень.

Уравнение (22) аналогично уравнению колебаний маятника с большой амплитудой. Зависимость угла θ от длины дуги s такая же, как зависимость угла отклонения маятника от времени. Это — изящная и любопытная аналогия. Движение маятника в двух измерениях можно изобразить такой деформацией стержня, когда он образует кривую двойной кривизны. Самое интересное здесь то, что аналогия применима к колебаниям *большой* амплитуды.

ДВАДЦАТЬ ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/I 1931 г.)

Понятие о связях в механике. Связи голономные, неголономные и полуголономные. Полуголономные связи в электрических системах. Уравнения Лагранжа-Максвелла. Условие устойчивости Дирихле. Кинетическая и потенциальная энергия как квадратичные формы. Относительность рода связи.

Мы рассмотрим теперь колебания таких систем, для однозначного описания конфигурации которых недостаточно задать *одну* координату. (В случае маятника конфигурация определяется заданием *одной* координаты: угла отклонения; в случае контура с индуктивностью и емкостью — также *одной* координатой: зарядом конденсатора).

Оставив пока в стороне такие системы, как струна или антенна, имеющие бесконечное число степеней свободы[1], мы рассмотрим механические системы с конечным числом степеней свободы и их электрические аналоги — системы, состоящие из конечного числа индуктивностей и емкостей, причем сначала отвлечемся от сил трения. Мы не будем стремиться к большой общности. Все самое существенное мы выявим на системах с *двумя* степенями свободы. Мы подробно разовьем теорию для двух степеней свободы и укажем, как результаты обобщаются на любое число степеней свободы.

Пусть имеется k свободных точек. Если мы знаем силы, действующие между ними, то мы знаем и уравнения движения

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

(m_i — масса; $\mathbf{w}_i$ — ускорение; $\mathbf{F}_i$ — результирующая сила).

Часто задача ставится иначе. Имеется k точек, но со связями. Представим себе, например, маятник на жестком стержне. Он может двигаться в трех измерениях x, y, z. Маятник испытывает действие силы тяжести, а также сил со стороны стержня. Если бы мы знали все силы, то могли бы вычислить движение. Силы, действующей со стороны стержня, мы не знаем, но нам заранее известно, что при малейшем изменении длины стержня эта сила чрезвычайно возрастает. Поэтому можно считать, что длина стержня неизменна, т. е. что движение маятника происходит по кругу с центром в точке O.

Таким образом, тело движется в плоскости x, y, на него действует сила тяжести, и, кроме того, известно, что

$$x^2 + y^2 = l^2.$$

Требуется найти движение. Это — несколько другая постановка задачи, чем для системы свободных точек. Мы знаем только часть сил. Остальные силы неизвестны, но известно, что они налагают некоторые ограничения на координаты. Достаточно знать изменение одной из координат x или y, чтобы знать все движение.

Возьмем более общий случай. Имеется k точек и m функциональных соотношений между их координатами. Тогда имеются $n = 3k - m$ неизвестных величин, которые вполне определяют

[1] [См. часть II.]

движение. Число *независимых* координат, необходимое и достаточное для однозначного определения положения системы, называется числом степеней свободы системы.

Рассмотрим два маятника в плоскости, соединенных так, как показано на рис. 86. Между координатами x_1, y_1, x_2, y_2 обоих маятников имеется два соотношения:

$$x_1^2+y_1^2=l_1^2;$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l_2^2.$$

Это — система с двумя степенями свободы.

Пусть система имеет n степеней свободы. Если мы знаем, как n ее *независимых* координат меняются в зависимости от времени, то мы полностью знаем движение системы.

Для этих n координат можно составить уравнения, которые „ничего не знают" об остальных координатах. Это — уравнения Лагранжа (иногда говорят — уравнения Лагранжа второго рода; иногда, имея в виду не только механические, но и электрические и электромеханические системы, — уравнения Лагранжа-Максвелла).

Такие системы, для которых при наличии связей могут быть определены n независимых величин (связи выражаются при этом соотношениями между координатами), называются *голономными* системами. Сами эти величины называются обобщенными координатами.

Обобщенные координаты, полностью характеризующие конфигурацию системы, можно выбрать различным образом. При этом одни обобщенные координаты являются функциями от других обобщенных координат. Для того, чтобы написать уравнение движения, нужно выбрать какие-нибудь n независимых обобщенных координат.

Голономные системы характеризуются тем, что связи выражаются уравнениями между самими координатами. Так обстоит дело, например, если точка находится на поверхности:

$$f(x,\ y,\ z)=0. \tag{1}$$

Могут быть другого рода связи — связи неголономные, которые выражаются уравнениями вида

$$f(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})=0. \tag{2}$$

Этот случай существенно отличен от предыдущего. Здесь, вообще говоря, нельзя исключить одну из координат. Особенно важен случай, когда уравнения вида (2) линейны по отношению к скоростям.

Самый простой пример связи вида (2) — повозка с двумя колесами (скат). Положение системы определяют азимут θ и координаты середины x и y. Не существует определенного соотношения между x, y и θ. Пусть скат движется по абсолютно шероховатой поверхности. Тогда движение в каждый данный момент перпендикулярно к оси. В направлении стрелки (рис. 87) скат двигаться не может; он может только катиться. Это условие отсутствия скольжения выражается уравнением

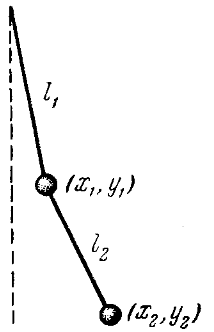

Рис. 86.

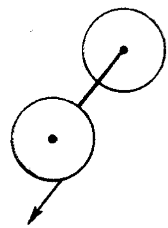

Рис. 87.

$$dy - \operatorname{tg}\theta\, dx = 0.$$

Здесь исключение одной из координат x, y, θ невозможно. Уравнения движения систем с неголономными связями совершенно другие, чем для голономных систем.

В теории колебаний задачи только что рассмотренного типа нас не интересуют. Но есть промежуточный случай, который представляет большой интерес для теории колебаний. Пусть связь выражается уравнением вида

$$A dx + B dy + C dz = 0 \tag{3}$$

(A, B, C — функции x, y, z. Для простоты записи мы ограничимся тремя координатами). Это так называемое уравнение Пфаффа. Левая часть может иметь, но может и не иметь (если число переменных больше двух) интегрирующий множитель. Для ската левая часть заведомо не имеет интегрирующего множителя. Условие существования интегрирующего множителя может быть записано так:

$$\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=0,$$

где $\mathbf{E}$ — вектор с компонентами A, B, C.

Пусть левая часть уравнения (3) имеет интегрирующий множитель, т. е. превращается по умножении на некоторую функцию в полный дифференциал некоторой функции F. Тогда уравнение связи интегрируемо и дает

$$F(x, y, z)=\mathrm{const}. \tag{4}$$

Мы получаем зависимость между координатами. В случае голономной связи уравнение между координатами задано, оно не содержит произвольных постоянных. Если связь выражается соотношением вида (4), где правая часть — произвольная постоянная, то мы будем называть систему *полуголономной* (или семиголономной).

Неголономные системы — такие, где связи выражаются неинтегрируемыми уравнениями между дифференциалами координат. Полуголономные системы — такие, где связи выражаются интегрируемыми уравнениями между дифференциалами. Такие системы сходны с голономными, но в них имеется по одной лишней произвольной постоянной на каждое уравнение связи вида (4).

Поясним на самом простом примере, что такое полуголономная система.

Начнем с простого контура с самоиндукцией и конденсатором (рис. 88, *а*). Это система с одной степенью свободы. Здесь две произвольные постоянные: начальный заряд и начальный ток. Рассмотрим теперь контур с двумя последовательно соединенными конденсаторами (рис. 88, *б*). Всякий скажет: здесь тоже одна степень свободы, причем контур содержит емкость C, такую, что

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}.$$

Казалось бы, этот случай не отличается от первого.

Однако он отличается от первого случая: можно один конденсатор зарядить, а другой нет. Заряды конденсаторов не вполне зависимы, но *ток* через оба конденсатора — один и тот же, так как нет накопления электричества на соединительном проводнике:

$$\dot{Q}_1=\dot{Q}_2.$$

Вот какова здесь связь. Она накладывается на производные от координат Q_1 и Q_2 или на их дифференциалы:

$$dQ_1 = dQ_2.$$

Эту связь можно сразу проинтегрировать:

$$Q_1 - Q_2 = \text{const}.$$

Здесь можно выразить Q_1 через Q_2, и тогда получится одна степень свободы, но зато появляется произвольная постоянная. Любое ее значение не противоречит связи.

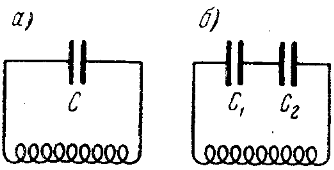

Рис. 88.

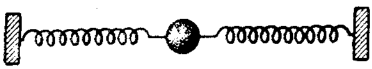

Рис. 89.

Можно подойти к полуголономным системам и с другой стороны. Рассмотрим чисто голономную систему

$$f(x, y, z) = \text{const}$$

и будем давать константе различные значении $A_1, A_2, \ldots$, т. е. будем рассматривать *различные* чисто голономные системы. Можно считать, что у нас *одна* система, но с лишней произвольной постоянной, т. е. полуголономная система.

В системе, показанной на рис. 89, если точки закрепления пружин передвижные, получается лишняя произвольная постоянная.

Остановимся на голономных системах. Самыми удобными уравнениями движения для них являются уравнения Лагранжа. Они дают то и только то, что нужно. Они справедливы для любых координат. Они одинаковы как для механических, так и для электрических систем. Выводить их здесь я не могу, а скажу только, как они пишутся и что они утверждают.

Пусть имеется n обобщенных координат:

$$q_1, q_2, \ldots, q_n.$$

Можно выразить через них декартовы координаты. Через обобщенные координаты и n обобщенных скоростей:

$$\dot{q}_1,\ \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$$

можно выразить декартовы компоненты обычных скоростей.

Так как радиусы-векторы $\mathbf{r}_\mu$ отдельных точек — функции обобщенных координат:

$$\mathbf{r}_\mu = \mathbf{f}_\mu (q_1,\ q_2, \ldots q_n),$$

то скорости

$$\dot{\mathbf{r}}_\mu = \sum_\lambda \frac{\partial \mathbf{f}_\mu}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda,$$

и, следовательно, выражение кинетической энергии через обобщенные координаты и скорости имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_\mu m_\mu \dot{r}_\mu^2 = \sum_{i,k} \alpha_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k. \tag{5}$$

Таким образом, кинетическая энергия — квадратичная функция обобщенных скоростей, в которой коэффициенты — функции обобщенных координат.

Элементарная работа сил выражается суммой членов вида

$$Q_\lambda \delta q_\lambda,$$

где Q_λ — обобщенная сила. Выражение Q_λ называется обобщенной *силой* по аналогии с тем, что имеет место в декартовых координатах, где работа определяется как произведение $X\delta x$ (X — сила, δx — перемещение).

Рассмотрим, например, тело, вращающееся вокруг оси. Здесь работа при повороте на угол $\delta\theta$ есть $M\delta\theta$, где M — момент „обычной“ силы. В данном случае обобщенной силой является момент „обычной“ силы. (Обобщенная сила может иметь другую размерность, чем обычная сила.)

Для того, чтобы найти, как изменяются со временем обобщенные координаты, нужно составить и решить уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} = Q_\lambda \qquad (\lambda = 1,\ 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Это и есть уравнения движения в форме Лагранжа.

Может случиться, что обобщенные силы Q_λ — такие функции только от q_λ, что

$$Q_\lambda = -\frac{\partial U(q_1, q_2, \ldots, q_n)}{\partial q_\lambda}.$$

Функция $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ есть не что иное, как потенциальная энергия, выраженная через обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$. В этом случае, т. е. при потенциальных силах Q_λ, уравнения движения принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial U}{\partial q_\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Эти уравнения справедливы и для электрических цепей, если считать, что U — электрическая, а T — магнитная энергия, q_λ — заряды, $\dot{q}_\lambda$ — токи. Из уравнений Лагранжа получаются все законы колебаний механических, электрических и смешанных систем. Эти уравнения очень общи.

Нас будут интересовать специально *линейные* колебательные системы (нелинейные системы гораздо сложнее). Для линейных механических и электрических колебательных систем функции T и U имеют один и тот же вид и получаются одинаковые уравнения движения.

Перейдем к исследованию устойчивости равновесия.

Устойчивым состоянием равновесия называется такое состояние равновесия, что если систему вывести из него, и притом так, что изменения координат, а также скорости, достаточно малы, то они будут оставаться сколь угодно малыми в течение любого времени.

Дирихле доказал, что достаточное условие устойчивости равновесия заключается в том, что в состоянии равновесия должно быть

$$U(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \text{minimum},$$

т. е. если в положении равновесия потенциальная энергия имеет минимум, то равновесие устойчиво. Докажем это утверждение (необходимые условия равновесия мы затрагивать не будем).

Если мы прибавим к U постоянную величину, уравнения движения не изменятся. Мы можем поэтому считать, что минимум U соответствует $U = 0$. Тогда при малом отклонении от равновесия $U > 0$. Так как справедлив закон сохранения энергии, то $T + U = \text{const}$, причем и $T > 0$. Следовательно, если мы дадим системе достаточно малое начальное отклонение, при котором $T_0+U_0<\varepsilon$ ($\varepsilon>0$), то и в дальнейшем

$$T+U<\varepsilon,$$

т. е. значения координат и скоростей не выйдут за известные пределы и, следовательно, равновесие устойчивое.

Одно маленькое замечание: из того, что кинетическая энергия всегда остается меньше ε, мы заключаем, что ни одна точка системы не может получить большой скорости. При этом мы рассуждаем так: если T достаточно мала, то каждый ее член $m_i v_i^2/2$ тоже достаточно мал:

$$\frac{m_i v_i^2}{2}<\varepsilon.$$

Тогда и $|v_i|$ меньше некоторой заданной величины. Но это рассуждение годится только для систем, состоящих из конечного числа точек, каждая из которых имеет конечную массу. Если наша система — континуум, то может случиться, что входящая в ее состав очень маленькая масса, несмотря на то, что $T<\varepsilon$, получит очень большую скорость. Пусть, например, поверхность воды находится в равновесии. Для того, чтобы быть уверенным, что равновесие устойчиво, нужно доказать, что при $T<\varepsilon$ сколь угодно маленькая капля не получит сколь угодно большой скорости.

Рассмотрим движение системы вблизи положения равновесия:

$$q_1=q_1^0,\ q_2=q_2^0, \ldots,\ q_n=q_n^0.$$

Введем новые координаты:

$$q_1'=q_1-q_1^0,\ q_2'=q_2-q_2^0, \ldots,\ q_n'=q_n-q_n^0.$$

При дифференцировании по времени q_λ^0 выпадают, так что

$$\dot{q}_1'=\dot{q}_1,\ \dot{q}_2'=\dot{q}_2, \ldots,\ \dot{q}_n'=\dot{q}_n.$$

Изменив таким образом начало координат, мы имеем в положении равновесия:

$$q_1'=0,\ q_2'=0, \ldots,\ q_n'=0,$$

и в новых координатах

$$U(0,\ 0, \ldots, 0)=\text{minimum}.$$

Разложим U в степенной ряд около положения равновесия. Опуская штрихи в обозначении новых координат, имеем:

$$U(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i + \sum_{i,k} b_{ik} q_i q_k + \ldots$$

Так как в положении равновесия U минимум, то все $\partial U/\partial q_i$ равны нулю. Ограничимся здесь очень малыми отклонениями. Тогда кубические члены малы по сравнению с квадратичными, и в первом приближении их можно отбросить. Для двух степеней свободы можно считать, что

$$U = b_{11} q_1^2 + 2b_{12} q_1 q_2 + b_{22} q_2^2. \tag{8}$$

Перейдем к кинетической энергии (5). Разложим функцию α_{ik} в степенной ряд по q_λ:

$$\alpha_{ik} = a_{ik} + \sum_l \beta_{ikl} q_l + \ldots$$

Отбросив и здесь все члены, кроме первого, получаем в случае двух степеней свободы следующее выражение для T:

$$T = a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2. \tag{9}$$

Из выражений (8) и (9) мы получим в качестве уравнений Лагранжа два совокупных линейных дифференциальных уравнения для q_1 и q_2.

В задачах, которые мы будем рассматривать, электростатическая энергия есть квадратичная функция с постоянными коэффициентами от зарядов. Коэффициенты определяются емкостями C. Магнитная энергия — квадратичная функция токов, т. е. производных от зарядов. В ней коэффициенты определяются индуктивностями L. Величины C и L не зависят от зарядов и токов. Таким образом, вид формул (8) и (9) для всех рассматриваемых задач одинаков. Мы применим их к частным случаям и на них выявим свойства изучаемых систем. (Нагляднее всего исходить из конкретных физических примеров.)

Мы рассмотрим сегодня два простых примера.

Первый пример: балка на двух пружинах (рис. 90). Этот пример и практически интересен, так как представляет собой простую модель вагона на двух рессорах. Нужно выбрать координаты, однозначно определяющие конфигурацию системы. Пусть ξ — координата центра тяжести P, x_1 и x_2 — координаты концов,

θ — угол поворота балки. Между этими четырьмя координатами имеются два соотношения (угол θ по предположению мал):

$$x_1 = \xi - l_1\theta,$$

$$x_2 = \xi + l_2\theta.$$

Какие координаты здесь „естественные“? Физически все они равноправны. Но вопрос о „естественности“ тех или иных координат играл когда-то очень большую роль.

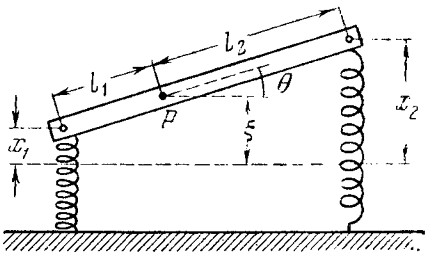

Рис. 90.

Сначала мы напишем выражение кинетической энергии в одной системе координат, а выражение потенциальной — в другой. Пусть k_1 и k_2 — коэффициенты упругости пружин. Тогда потенциальная энергия

$$U = \frac{k_1x_1^2}{2} + \frac{k_2x_2^2}{2}.$$

По теореме Кёнига можно складывать кинетические энергии поступательного и вращательного движений, и, следовательно,

$$T = \frac{M\dot{\xi}^2}{2} + \frac{I\dot{\theta}^2}{2}$$

(M — масса балки; I — ее момент инерции).

Почему мы написали потенциальную энергию в одних, а кинетическую энергию в других координатах? Потому что при этом в обоих выражениях нет произведений координат или скоростей. Но выразим ξ и θ через x_1 и x_2. При этом в выражение кинетической энергии войдет, кроме суммы квадратов, также и произведение скоростей. Наоборот, если перейти к ξ и θ, то кинетическая энергия будет суммой квадратов, а потенциальная энергия будет содержать член с произведением координат.

Если потенциальная энергия содержит произведение координат, то говорят, что имеется *силовая* связь (в механическом случае) или ёмкостная связь (в электрическом случае). Если кинетическая энергия содержит произведение скоростей, то говорят: система связана *инерциально* (в механическом случае) или индуктивно (в электрическом случае). Если и в U, и в T есть члены с произведениями, то связь смешанная.

Вот второй пример (рис. 91). Здесь

$$U=\frac{q_1^2}{2C_1}+\frac{q_2^2}{2C_2}, \qquad T=\frac{L_1\dot{q}_1^2}{2}+\frac{L_2\dot{q}_2^2}{2}+M\dot{q}_1\dot{q}_2.$$

Какова здесь связь? Емкостная или индуктивная?

На это следует ответить так: определение инерциальной (индуктивной) и силовой (емкостной) связи, в сущности, условно. Введем координаты:

$$q_1'=q_1+q_2, \quad q_2'=q_1-q_2.$$

Тогда в выражении для U появится член с произведением координат, т. е. будет иметь место емкостная связь. Можно возразить, что введение координат q_1' и q_2' — математическое ухищрение. Здесь „естественно" сказать, что связь — индуктивная. Но в нашем механическом примере трудно сказать, что естественнее: взять за координаты ξ и θ (тогда связь силовая) или x_1 и x_2 (тогда связь инерциальная).

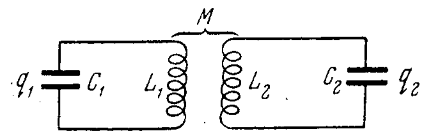

Рис. 91.

Таким образом, тип связи зависит от выбора обобщенных координат. Говоря о том или ином типе связи, нужно соблюдать известную осторожность. Может быть правильнее всего было бы говорить о типе связи по отношению к данным координатам.

ДВАДЦАТЬ ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ

(28/I 1931 г.)

Математическая теория линейной консервативной системы с двумя степенями свободы. Нормальные колебания. Секулярное уравнение. Связь между парциальными и нормальными частотами. Нормальные координаты. Общее решение как суперпозиция нормальных колебаний.

Рассмотрим общий случай малых колебаний консервативной системы с двумя степенями свободы около устойчивого положения равновесия. Потенциальная и кинетическая энергия — квадратичные формы соответственно от координат и скоростей:

$$\left.\begin{aligned} U&=ax^2+2hxy+by^2; \\ T&=A\dot{x}^2+2H\dot{x}\dot{y}+B\dot{y}^2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$