Вот второй пример (рис. 91). Здесь

$$U=\frac{q_1^2}{2C_1}+\frac{q_2^2}{2C_2}, \qquad T=\frac{L_1\dot{q}_1^2}{2}+\frac{L_2\dot{q}_2^2}{2}+M\dot{q}_1\dot{q}_2.$$

Какова здесь связь? Емкостная или индуктивная?

На это следует ответить так: определение инерциальной (индуктивной) и силовой (емкостной) связи, в сущности, условно. Введем координаты:

$$q_1'=q_1+q_2, \quad q_2'=q_1-q_2.$$

Тогда в выражении для U появится член с произведением координат, т. е. будет иметь место емкостная связь. Можно возразить, что введение координат q_1' и q_2' — математическое ухищрение. Здесь „естественно“ сказать, что связь — индуктивная. Но в нашем механическом примере трудно сказать, что естественнее: взять за координаты ξ и θ (тогда связь силовая) или x_1 и x_2 (тогда связь инерциальная).

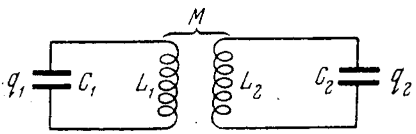

Рис. 91.

Таким образом, тип связи зависит от выбора обобщенных координат. Говоря о том или ином типе связи, нужно соблюдать известную осторожность. Может быть правильнее всего было бы говорить о типе связи по отношению к данным координатам.

ДВАДЦАТЬ ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ

(28/I 1931 г.)

Математическая теория линейной консервативной системы с двумя степенями свободы. Нормальные колебания. Секулярное уравнение. Связь между парциальными и нормальными частотами. Нормальные координаты. Общее решение как суперпозиция нормальных колебаний.

Рассмотрим общий случай малых колебаний консервативной системы с двумя степенями свободы около устойчивого положения равновесия. Потенциальная и кинетическая энергия — квадратичные формы соответственно от координат и скоростей:

$$\left.\begin{aligned} U&=ax^2+2hxy+by^2; \\ T&=A\dot{x}^2+2H\dot{x}\dot{y}+B\dot{y}^2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Обе квадратичные формы положительно дефинитны. При этом

$$\left.\begin{aligned} A>0,\ B>0,\ AB-H^2>0,\\ a>0,\ b>0,\ ab-h^2>0.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Подставляя (1) и (2) в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{\partial U}{\partial x}=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)+\frac{\partial U}{\partial y}=0,$$

получаем для нашей системы уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{x}+H\ddot{y}+ax+hy=0,\\ H\ddot{x}+B\ddot{y}+hx+by=0.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

На рис. 92, *а*, *б* показаны два примера систем с двумя степенями свободы. В качестве x и y можно взять заряды на любых двух конденсаторах (рис. 92, *а*) и углы отклонения маятников (рис. 92, *б*) или любые линейные комбинации этих величин.

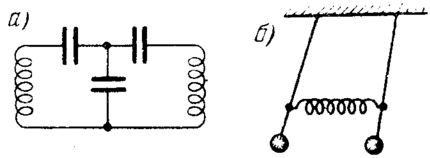

Рис. 92.

Можно ввести понятие *парциальных систем*[1]. Мы будем называть парциальными те системы с одной степенью свободы, которые получаются из данной системы с двумя степенями свободы при „закреплении“ одной из координат, т. е. в случае рис. 92, *а* — при разрыве цепи, к которой относится соответственно координата x или y, а в случае рис. 92, *б* — при закреплении того или другого маятника. Математически это означает следующее. Одну парциальную систему мы получим, положив, что в (1) $x=0$ (тождественно по t), другую — положив аналогичным образом в (1) $y=0$.

Для первой парциальной системы имеем:

$$T=A\dot{x}^2,\quad U=ax^2.$$

Эта система имеет собственную частоту n_1 (парциальную частоту), такую, что

$$n_1^2=\frac{a}{A}.$$

[1] [Подробнее см. 24-ую лекцию.]

Для второй парциальной системы имеем:

$$T = B\dot{y}^2, \quad U = by^2,$$

$$n_2^2 = \frac{b}{B}$$

(n_2 — вторая парциальная частота).

Будем искать решение уравнения (3) системы с двумя степенями свободы в таком виде:

$$\begin{aligned} x &= C\cos(\omega t + \alpha), \\ y &= kC\cos(\omega t + \alpha), \end{aligned} \tag{4}$$

где C, k, ω, α — постоянные. Движение типа (4) мы будем называть *нормальным* колебанием, его частоту ω — *нормальной частотой*.

Подставляя (4) в (3) и сокращая на общий множитель $\cos(\omega t + \alpha)$, получаем систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (\omega^2 A - a) + (\omega^2 H - h)k = 0, \\ (\omega^2 H - h) + (\omega^2 B - b)k = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Рассматривая эти уравнения как систему двух линейных уравнений относительно неизвестной k, напишем условие их совместности:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 A - a & \omega^2 H - h \\ \omega^2 H - h & \omega^2 B - b \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Это — уравнение, определяющее неизвестную величину ω^2. Оно называется секулярным уравнением. Обозначим

$$\omega^2 = \xi$$

и запишем секулярное уравнение в таком виде:

$$F(\xi) = 0,$$

где $F(\xi)$ — полином второй степени:

$$F(\xi) = \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\xi + \lambda_3. \tag{7}$$

Уравнение

$$\eta = F(\xi)$$

есть уравнение параболы. Абсциссы точек, в которых она пересекает ось ξ, равны корням уравнения (6), т. е. квадратам частот искомых колебаний вида (4).

Развертывая детерминант уравнения (6) и сравнивая с (7), мы видим, что

$$\lambda_1 = AB - H^2, \quad \lambda_2 = 2hH - aB - bA, \quad \lambda_3 = ab - h^2.$$

На основании (2)

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_3 > 0.$$

При большом ξ знак η совпадает со знаком члена $\lambda_1 \xi^2$, и, следовательно, η положительно. При $\xi = 0$ имеем

$$\eta = F(0) = \lambda_3,$$

и, следовательно, η здесь также положительно.

Подставляя в (7) значения ξ:

$$\xi = n_1^2 = \frac{a}{A}, \quad \xi = n_2^2 = \frac{b}{B},$$

получаем:

$$F\left(\frac{a}{A}\right) = -\left(H\frac{a}{A} - h\right)^2 < 0;$$

$$F\left(\frac{b}{B}\right) = -\left(H\frac{b}{B} - h\right)^2 < 0.$$

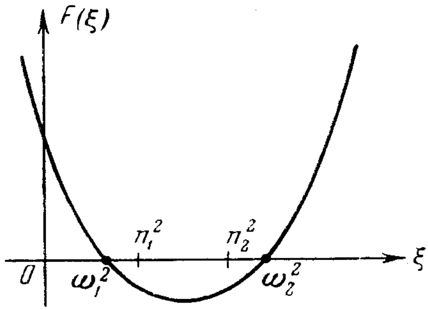

Рис. 93.

Итак, парабола пересекает ось абсцисс и имеет вид, показанный на рис. 93. Корни ω_1^2 и ω_2^2 уравнения (5) действительны и положительны, причем

$$\omega_1^2 \leqslant n_1^2 \leqslant n_2^2 \leqslant \omega_2^2.$$

Парциальные частоты лежат между нормальными частотами и — в крайнем случае — совпадают с ними.

Применим полученные результаты к случаю системы, состоящей из двух индуктивно связанных контуров (рис. 91). Здесь

$$2T = L_1\dot{q}_1^2 + L_2\dot{q}_2^2 + M\dot{q}_1\dot{q}_2,$$

$$2U = \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2}.$$

Секулярное уравнение

$$\begin{vmatrix} \omega^2 L_1 - \dfrac{1}{C_1} & \omega^2 M \\ \omega^2 M & \omega^2 L_2 - \dfrac{1}{C_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Введем парциальные частоты:

$$n_1^2 = \frac{1}{L_1C_1}, \quad n_2^2 = \frac{1}{L_2C_2} \tag{8}$$

и обозначим

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1L_2}. \tag{9}$$

Развертывая детерминант и воспользовавшись (8) и (9), получаем:

$$\sigma\omega^4 - (n_1^2 + n_2^2)\omega^2 + n_1^2n_2^2 = 0. \tag{10}$$

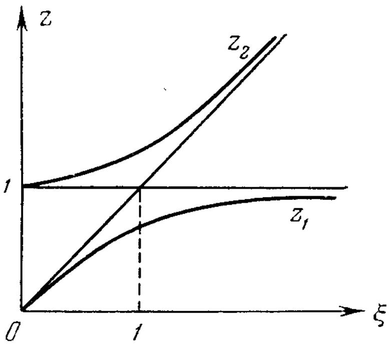

Рис. 94.

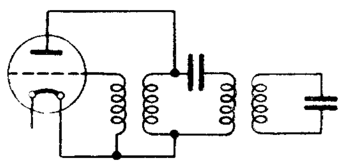

Рис. 95.

Введем еще „расстройку“ парциальных частот

$$\xi = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \tag{11}$$

и величину

$$z = \frac{\omega^2}{n_1^2} \tag{12}$$

(квадрат отношения нормальной частоты к одной из парциальных). Подставляя (11) и (12) в (10), получаем

$$\sigma z^2 - (1 + \xi) z + \xi = 0.$$

На плоскости (z, ξ) этому уравнению соответствует семейство гипербол (каждая гипербола соответствует определенному значению параметра σ). Одна из таких гипербол изображена на рис. 94. Каждому значению расстройки ξ соответствуют две ординаты: z_1, z_2 (две нормальные частоты). Рис. 94 наглядно показывает, как нормальная частота зависит от расстройки парциальных систем.

Построенный нами график имеет большое значение при исследовании некоторых нелинейных систем, например лампового генератора, колебательный контур которого индуктивно связан с другим колебательным контуром (рис. 95). Здесь при определенных условиях происходит следующее. Имеет место периодическое (незатухающее) колебание, частота которого практически совпадает с одной из нормальных частот той линейной консервативной системы, в которую превратилось бы устройство рис. 95 при отсутствии лампы и сопротивлений в контурах. При изменении расстройки ξ частота генерируемого колебания меняется так, как показано на рис. 96. При $\xi < \xi_1$ возможны колебания только с частотой ω_2, при $\xi > \xi_2$ — только с частотой ω_1; при $\xi_1 < \xi < \xi_2$ в зависимости от истории системы происходят колебания либо с частотой ω_1, либо с частотой ω_2 (явление „затягивания" — своеобразный гистерезис). Переход от частоты ω_1 к частоте ω_2 или наоборот происходит скачком.

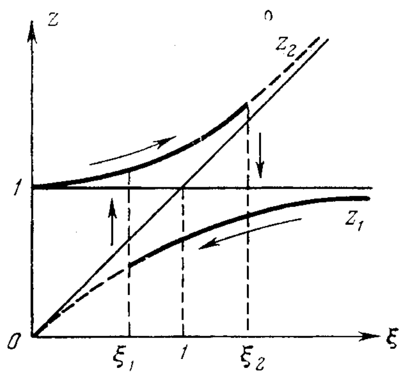

Рис. 96.

Найдя нормальные частоты, мы можем определить из (5) соответствующие значения отношения амплитуд k. Обозначим их k_1 и k_2.

Введем посредством уравнений

$$x = \xi + \eta,$$
$$y = k_1\xi + k_2\eta \qquad (13)$$

новые обобщенные координаты ξ и η. Подставив (13) в (1), получаем:

$$\left.\begin{aligned} T &= (A + 2Hk_1 + Bk_1^2)\dot{\xi}^2 + 2\,[A + H(k_1 + k_2) + Bk_1k_2]\dot{\xi}\dot{\eta} + \\ &\quad + (A + 2Hk_2 + Bk_2^2)\dot{\eta}^2; \\ U &= (a + 2hk_1 + bk_1^2)\xi^2 + 2\,[a + h(k_1 + k_2) + bk_1k_2]\,\xi\eta + \\ &\quad + (a + 2hk_2 + bk_2^2)\eta^2. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Заметим теперь, что на основании (5)

$$\omega_1^2(A + Hk_1) = a + hk_1, \qquad \omega_2^2(A + Hk_2) = a + hk_2;$$

$$\omega_1^2(H + Bk_1) = h + bk_1, \qquad \omega_2^2(H + Bk_2) = h + bk_2.$$

Сложим уравнения первого столбца, умножив предварительно второе на k_1:

$$\omega_1^2(A + 2Hk_1 + Bk_1^2) = a + 2hk_1 + bk_1^2. \qquad (15)$$

Сложим теперь уравнения второго столбца, умножив предварительно второе на k_2:

$$\omega_2^2(A+2Hk_2+Bk_2^2)=a+2hk_2+bk_2^2. \tag{16}$$

Если же проделать аналогичную операцию, но умножая на k_2 и k_1 вместо k_1 и k_2, то получим еще:

$$\left.\begin{aligned}\omega_1^2[A+H(k_1+k_2)+Bk_1k_2]=a+h(k_1+k_2)+bk_1k_2;\\ \omega_2^2[A+H(k_1+k_2)+Bk_1k_2]=a+h(k_1+k_2)+bk_1k_2.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

При $\omega_1^2\neq\omega_2^2$ из (17) следует, что

$$A+H(k_1+k_2)+Bk_1k_2=0,$$

$$a+h(k_1+k_2)+bk_1k_2=0.$$

Следовательно, выражения (14) не содержат членов с произведениями $\dot\xi\dot\eta$ и $\xi\eta$ и имеют вид

$$\begin{aligned}T&=A_1\dot\xi^2+A_2\dot\eta^2,\\ U&=a_1\xi^2+a_2\eta^2,\end{aligned} \tag{18}$$

причем

$$\frac{a_1}{A_1}=\omega_1^2,\quad \frac{a_2}{A_2}=\omega_2^2.$$

В системе координат $(\xi,\ \eta)$ нет ни силовой, ни инерциальной связи. Мы показали, что подходящим выбором обобщенных координат всегда можно привести обе квадратичные формы (14) к каноническому виду (18), т. е. привести их к суммам квадратов. Координаты ξ и η называются нормальными координатами.

Уравнения Лагранжа в новых обобщенных координатах

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\xi}\right)+\frac{\partial U}{\partial\xi}=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\eta}\right)+\frac{\partial U}{\partial\eta}=0,$$

имеют вид

$$\left.\begin{aligned}A_1\ddot\xi+a_1\xi=0;\\ A_2\ddot\eta+a_2\eta=0.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

В одно из них входит только обобщенная координата ξ, в другое — только обобщенная координата η.

Уравнения (19) имеют общее решение:

$$\xi_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \eta = C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

где ω_1 и ω_2 — нормальные частоты. Согласно (13)

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \\ y &= k_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + k_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Таково выражение общего решения в исходных координатах x, y. Мы могли бы его написать сразу (не переходя к нормальным координатам ξ и η) как сумму двух частных решений вида (4).

Сформулируем физический смысл уравнения (20).

Каждая из координат x и y совершает, вообще говоря, сумму двух гармонических колебаний с различными нормальными частотами ω_1 и ω_2.

Частоты эти задаются самой системой (видом кинетической и потенциальной энергии). Самой системой задаются также отношения k_1 и k_2 амплитуд каждого нормального колебания в обеих координатах (эти отношения могут быть как положительными, так и отрицательными). Сами амплитуды и фазы задаются начальными условиями. Каждое из гармонических колебаний имеет в обеих координатах одинаковую фазу.

ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/II 1931 г.)

Циклические координаты. Решение уравнений для линейной системы с двумя степенями свободы (без трения). Нормальные колебания, их частоты и распределения. Нормальные координаты. Нормальные частоты как экстремумы отношения двух квадратичных форм. Разделение системы на парциальные системы

Вообще говоря, интегрирование системы уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

описывающих движение системы с n степенями свободы недоступно. Но мы рассматриваем движение системы с n степенями