Уравнения (19) имеют общее решение:

$$\xi_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \eta = C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

где ω_1 и ω_2 — нормальные частоты. Согласно (13)

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \\ y &= k_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + k_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Таково выражение общего решения в исходных координатах x, y. Мы могли бы его написать сразу (не переходя к нормальным координатам ξ и η) как сумму двух частных решений вида (4).

Сформулируем физический смысл уравнения (20).

Каждая из координат x и y совершает, вообще говоря, сумму двух гармонических колебаний с различными нормальными частотами ω_1 и ω_2.

Частоты эти задаются самой системой (видом кинетической и потенциальной энергии). Самой системой задаются также отношения k_1 и k_2 амплитуд каждого нормального колебания в обеих координатах (эти отношения могут быть как положительными, так и отрицательными). Сами амплитуды и фазы задаются начальными условиями. Каждое из гармонических колебаний имеет в обеих координатах одинаковую фазу.

ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/II 1931 г.)

Циклические координаты. Решение уравнений для линейной системы с двумя степенями свободы (без трения). Нормальные колебания, их частоты и распределения. Нормальные координаты. Нормальные частоты как экстремумы отношения двух квадратичных форм. Разделение системы на парциальные системы

Вообще говоря, интегрирование системы уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

описывающих движение системы с n степенями свободы недоступно. Но мы рассматриваем движение системы с n степенями свободы, находящейся вблизи устойчивого состояния равновесия. При этом дифференциальные уравнения приобретают сравнительно простой вид:

$$\sum_k (b_{ik}\ddot{q}_k + a_{ik}q_k) = 0 \qquad (i = 1,\ 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Это — система n линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Такая система легко интегрируется (по крайней мере в общем виде).

Теперь предпочитают работать с индексами. Для сложных систем это гораздо нагляднее. Но для случая системы с двумя степенями свободы мы воспользовались такими обозначениями:

$$a_{11} = a, \quad a_{12} = h, \quad a_{22} = b,$$

$$b_{11} = A, \quad b_{12} = H, \quad b_{22} = B,$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} 2T &= A\dot{x}^2 + 2H\dot{x}\dot{y} + B\dot{y}^2, \\ 2U &= ax^2 + 2hxy + by^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Дифференциальные уравнения (1) записываются при этом так:

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{x} + H\ddot{y} + ax + hy = 0, \\ H\ddot{x} + B\ddot{y} + hx + by = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Рассмотрим тот частный случай, когда одна из координат (скажем, y) не входит в выражение потенциальной энергии (этот случай часто встречается на практике). Тогда

$$h = 0, \quad b = 0.$$

Координата, не входящая в выражение потенциальной энергии, носит название *циклической*.

Если y — циклическая координата, имеем:

$$H\ddot{x} + B\ddot{y} = 0,$$

$$\left(A - \frac{H^2}{B}\right)\ddot{x} + ax = 0.$$

Для координаты x получается такое же уравнение второго порядка, как для системы с одной степенью свободы. Существуют, таким образом, случаи двух степеней свободы, которые сводятся на одну степень свободы.

Такова, например, система рис. 97. В электрическую энергию входит только q_1, а в магнитную энергию, конечно, входит и $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$. Соответствующая механическая задача: имеется вал с двумя дисками (рис. 98). Этот пример мы уже рассматривали[1]. Так можно идеализировать вал с пропеллером и мотором. Введя в качестве координат углы поворота маховика и пропеллера, мы можем свести здесь задачу на случай одной степени свободы.

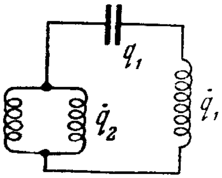

Рис. 97.

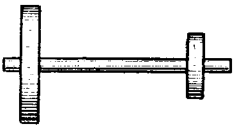
Рис. 98.

Если имеется n степеней свободы и m циклических координат, задача приводится к $n-m$ степеням свободы.

Вернемся к уравнениям (3).

Существует решение вида

$$x = C\cos(\omega t + \alpha),$$
$$y = kC\cos(\omega t + \alpha).$$

Эти выражения удовлетворяют уравнениям (2), если ω и k удовлетворяют алгебраическим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} -(A + Hk)\,\omega^2 + a + hk = 0; \\ -(H + Bk)\,\omega^2 + h + bk = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Требуется определить из них ω и k.

Можно задать ω или k и рассматривать уравнения (4) как уравнения с одной неизвестной (k или ω). В общем случае детерминант этих уравнений не равен нулю и они не имеют решения.

Если подобрать ω так, чтобы детерминант уравнений для неизвестной k равнялся нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \omega^2 A - a & \omega^2 H - h \\ \omega^2 H - h & \omega^2 B - b \end{vmatrix} = 0, \qquad (5)$$

то они имеют определенное решение.

[1] [См. 7-ю лекцию.]

Уравнение (5) — квадратное относительно ω^2. Квадратное уравнение может иметь разнообразные корни. Если равновесие устойчивое, то потенциальная энергия имеет минимум при $x=y=0$. Значит, квадратичные формы (2) положительны при любых x, y и $\dot{x}$, $\dot{y}$ (T всегда положительна). Математика доказывает, что при этих условиях оба корня уравнения (5) действительны и положительны.

Каждому значению ω соответствует свое значение k. Мы имеем два (положительные) значения ω ($\omega=\omega_1$, $\omega=\omega_2$) и два значения k ($k=k_1$, $k=k_2$), т. е. имеем, таким образом, два частных решения системы (3):

$$x=C_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1),$$
$$y=k_1C_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)$$

и

$$x=C_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2),$$
$$y=k_2C_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2).$$

Сумма их

$$\left.\begin{aligned} x&=C_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+C_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2),\\ y&=k_1C_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+k_2C_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

тоже будет решением при любых значениях C_1, C_2, α_1, α_2.

Смысл этого решения такой: если вывести систему с двумя степенями свободы из состояния равновесия, то каждая координата выразится, как функция времени, в виде суммы двух синусоидальных колебаний. Частоты ω_1 и ω_2 получаются из секулярного, или векового, или характеристического уравнения (5). Амплитуда каждой координаты в первом колебании произвольна. Но если выбрана амплитуда первой координаты C_1, то амплитуда первого колебания во второй координате не произвольна, а задается системой. То же самое имеет место для второго колебания.

Системой задаются величины ω_1, ω_2, k_1 и k_2. Величины k_1 и k_2 характеризуют *распределение* колебаний. Распределения, как и частоты, задаются параметрами системы. Абсолютные амплитуды в одной из координат, а также фазы, произвольны. Они задаются начальными условиями. (Заметим, что механика и электродинамика сами по себе не говорят, каково движение системы. Они учат, как движется система, *если заданы начальные условия*.)

Пусть при $t=0$

$$x=x_0,\ y=y_0,\ \dot{x}=\dot{x}_0,\ \dot{y}=\dot{y}_0. \tag{7}$$

Если заданы эти четыре величины, то мы знаем, как система будет себя вести дальше. Из начальных условий (7) определяются C_1, C_2, α_1, α_2. Этим вся задача однозначно определена. В технике отыскание собственных частот часто является жизненным вопросом.

Пусть вагон (его можно схематизировать так, как показано на рис. 90) движется с определенной скоростью. Он получает удары на стыках рельс. Здесь может возникнуть резонанс (как и в системе с одной степенью свободы): если частота ударов равна ω_1 или ω_2, вагон очень сильно раскачивается[1]. У спальных вагонов плавный ход связан, между прочим, с тем, что они имеют длинные периоды собственных колебаний. В машинах резонанс может приводить к разрушениям, в электрических системах — к перенапряжениям и пробоям. Чтобы этого не было, надо избегать того, чтобы внешняя сила попадала в такт с ω_1 или ω_2.

Вернемся к (6). Движение каждой координаты — не синусообразное. То, что его можно представить в виде суммы двух синусообразных колебаний (с постоянной амплитудой), имеет существенное значение. Дело в том, что очень часто система рассматриваемого здесь вида действует в качестве источника силы на другую линейную систему. Тогда, как мы знаем, именно такое представление целесообразно[2].

Вопрос о том, какими координатами характеризовать систему, не решается однозначно. Это вопрос вкуса и удобства.

Заданием x и y или ξ и θ мы вполне определяем конфигурацию системы (рис. 90). Между теми и другими координатами имеются определенные соотношения, а именно:

$$x_1 \equiv x = \xi - l_1\theta, \quad x_2 \equiv y = \xi + l_2\theta.$$

Получим ли мы те же самые величины ω_1, ω_2, k_1 и k_2, если воспользуемся другими координатами? Частоты колебаний получаются теми же самыми (ω_1 и ω_2 инвариантны). Но распределение будет зависеть от выбора координат.

Если мы перейдем к другим координатам, то может оказаться, в частности, $H=0$ или $h=0$. Это было очень ясно на примере, который разбирался в прошлый раз. Но можно ли подобрать координаты так, чтобы и h и H обратились в нули? Если это

---

[1] [См. 26-ю лекцию.]

[2] [См. 16-ю лекцию.]

удастся, то получатся чрезвычайно простые уравнения: система распадается на две системы, описываемые уравнениями вида

$$\left.\begin{array}{l} A_1\ddot{\xi}+a_1\xi=0, \\ A_2\ddot{\eta}+a_2\eta=0. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Частоты здесь находятся сразу:

$$\omega_1^2=\frac{a_1}{A_1}, \quad \omega_2^2=\frac{a_2}{A_2}; \tag{9}$$

k_1 и k_2 также находятся сразу, так как здесь

$$\xi=C_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1), \quad \eta=C_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2). \tag{10}$$

Величины k_1 и k_2 показывают, в каком отношении находятся амплитуды одного и того же колебания в одной и другой координате. В данном случае $k_1=0$, $k_2=\infty$.

Оказывается, что такие координаты подобрать можно. Если решить исходную задачу о нахождении ω_1^2, ω_2^2, k_1, k_2 и связать новые координаты с исходными соотношениями:

$$\left.\begin{array}{l} x=\xi+\eta, \\ y=k_1\xi+k_2\eta, \end{array}\right\} \tag{11}$$

то для потенциальной и кинетической энергии получатся выражения, в которых произведения отсутствуют:

$$\left.\begin{array}{l} 2U=a_1\xi^2+\alpha_2\eta^2, \\ 2T=A_1\dot{\xi}^2+A_2\dot{\eta}^2. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Отсюда сразу следует (8) и (9), причем частоты инвариантны по отношению к преобразованию (11).

Тривиальный случай, когда $k_1=0$, $k_2=\infty$, это — случай двух не связанных маятников. Для всех рассматриваемых систем с двумя степенями свободы, как бы они ни были сложны, всегда можно подобрать такие координаты, при которых задача приводится к этому тривиальному случаю. Такие координаты называются *нормальными координатами*. Однако, чтобы подобрать нормальные координаты, нужно сначала решить задачу, выраженную уравнениями (4) и (5). Таким образом, в вычислительном смысле существование нормальных координат не дает облегчения.

Подойдем к вопросу с другой стороны.

Пусть

$$\omega^2 = \frac{ax^2 + 2hxy + by^2}{Ax^2 + 2Hxy + By^2} \tag{13}$$

(мы образуем такую дробь и *обозначаем* ее ω^2). Зададимся „странным" вопросом: при каких значениях x и y эта дробь получает максимальное значение и при каких значениях x и y — минимальное? (Здесь важны не сами x и y, а отношение x/y). Введем нормальные координаты ξ, η. Тогда

$$\omega^2 = \frac{a_1\xi^2 + a_2\eta^2}{A_2\xi^2 + A_2\eta^2}. \tag{14}$$

Если при $x = x_1$ $y = y_1$ выражение (14) имеет максимум, то при соответствующих $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$ выражение (14) тоже имеет максимум. При введении нормальных координат задача упрощается.

Пусть

$$\frac{a_1}{A_2} > \frac{a_2}{A_2}. \tag{15}$$

Если ξ и η оба отличны от нуля, то можно написать:

$$\omega^2 = \frac{a_1 + b_1}{A_1 + B_1}, \tag{16}$$

где

$$b_1 = a_2\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2, \quad B_1 = A_2\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2. \tag{17}$$

Не трудно видеть, что значение дроби (16) заключено между a_1/A_1 и b_1/B_1. В самом деле, пусть

$$a_1 = A_1 l;$$

тогда вследствие (15)

$$b_1 < B_1 l$$

и далее

$$\frac{a_1 + b_1}{A_1 + B_1} < \frac{A_1 l + B_1 l}{A_1 + B_1} = l,$$

т. е.

$$\frac{a_1 + b_1}{A_1 + B_1} < \frac{a_1}{A_1}.$$

Аналогично найдем:

$$\frac{a_1 + b_1}{A_1 + B_1} > \frac{a_2}{A_2}.$$

Таким образом, мы доказали следующее: какие бы ни были ξ, η, если только они не равны нулю,

$$\frac{a_2}{A_2} < \omega^2 < \frac{a_1}{A_1}.$$

Далее, есть такие значения ξ и η, при которых ω^2 принимает значения a_1/A_1 и a_2/A_2. В самом деле, первое значение ω^2 принимает при $\xi=0$, $\eta\neq 0$, а второе — при $\xi\neq 0$, $\eta=0$. Следовательно,

$$\frac{a_2}{A_2} \leqslant \omega^2 \leqslant \frac{a_1}{A_1}. \tag{18}$$

Получился интересный результат (нормальные координаты здесь важны для доказательства; сам результат не относится специально к нормальным координатам): максимальное значение выражения (13), т. е. отношения квадратичных форм

$$\frac{U(x, y)}{T(x, y)},$$

равно квадрату одной собственной частоты, его минимальное значение — квадрату другой собственной частоты.

Перейдем теперь к другому вопросу.

Я умышленно говорил все время об одной системе с двумя степенями свободы, а не о *двух* связанных системах, из которых каждая имеет одну степень свободы.

Система с двумя степенями свободы может получиться генетически из сближения двух систем, из которых каждая имела одну степень свободы. Часто система с двумя степенями свободы интересна как результат связи двух систем, каждая из которых имеет одну степень свободы.

Но может возникнуть обратный вопрос: имеется заданная система с двумя степенями свободы. Из каких двух систем с одной степенью свободы она произошла? Этот вопрос напрашивается сам собой. В случае рис. 99, *а* все просто, но как быть в случае рис. 100, *а*? Нужно ли считать так, как на рис. 100, *б* или так, как на рис. 100, *в*? Да и в случае рис. 99, *а* — только кажущаяся простота; какие две системы связаны здесь между собой, если взаимная индукция осуществляется через железо (рис. 99, *б*)?

Разделение целого на части не однозначно. То же самое у нас было с рядом Фурье, с помощью которого мы разлагали периодическую функцию на сумму других функций. В молекулярной физике возникает аналогичный вопрос о том, как твердые тела —

кристаллические решетки — разделять на молекулы. Но можно искать целесообразную точку зрения.

Разделение по „историческому“ признаку, по признаку того, как происходило присоединение частей одних к другим (по тому, как „приносили куски системы из магазина“), вряд ли целесообразно. Но есть целесообразное определение.

Каков критерий целесообразности определения? То, что, пользуясь им, можно установить закономерность. В данном случае целесообразно такое разделение системы, при котором можно установить закономерную связь между свойствами полной системы и свойствами парциальных систем (ее частей). Разные разделения законны, но все, кроме одного, ни к чему не ведут, так как не приводят к закономерностям. Во всяком случае я могу сказать, что знаю только одно определение, которое является целесообразным. Вот оно.

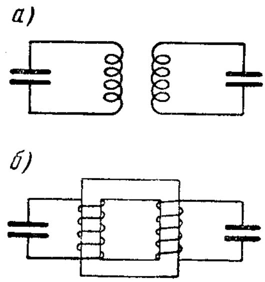

Рис. 99.

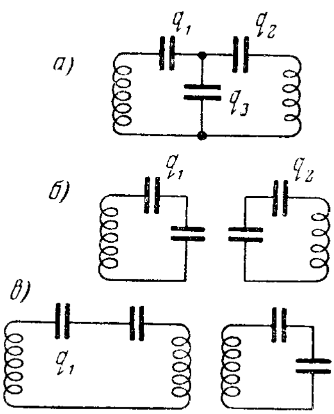

Рис. 100.

Пусть даны выражения T и U. Положим одну координату равной нулю. Мы получим систему с одной степенью свободы. Положим теперь другую координату равной нулю. Мы получим другую систему с одной степенью свободы. Связь между этими двумя парциальными системами дает нам исходную систему. Наша исходная система получается в результате связи этих двух систем.

Что значит положить $x=0$? Это значит, что мы закрепили один маятник (рис. 92, *б*) или разорвали один провод (рис. 99, *б*). Железо при этом должно остаться.

Разделение на парциальные системы зависит от тех координат, из которых мы исходим. Если в качестве координат выбраны q_1 и q_2 (рис. 100, *а*), то получатся одни парциальные системы (рис. 100, *б*).

Если ввести координаты q_1 и q_3 (рис. 100, *а*), то получатся другие парциальные системы (рис. 100, *в*).

При нашем определении период каждой парциальной системы (рис. 92, *б*) будет иной, чем у маятника без пружины. Мы просчитаем этот случай в следующий раз.

Рассмотрим (в общем случае) систему с двумя степенями свободы, как связанную. Тогда парциальные частоты n_1 и n_2 (частоты парциальных систем) определяются равенствами:

$$n_1^2 = \frac{a}{A}, \quad n_2^2 = \frac{b}{B}.$$

Найдем общее соотношение между нормальными и парциальными частотами.

Отношения a/A, b/B принадлежат к числу значений, принимаемых отношением (13), но не при $\xi = 0$ и не при $\eta = 0$. Поэтому

$$\omega_1^2 > n_1^2 > n_2^2 > \omega_2^2.$$

Итак, существует следующая закономерность: собственные частоты отдельных парциальных систем *лежат между частотами связанной системы.*

Если определить парциальные системы иначе, то между нормальными и парциальными частотами мы получим самые разнообразные соотношения.

ДВАДЦАТЬ ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(7/III 1931 г.)

Случай вырождения — случай двух одинаковых нормальных частот. Еще раз о парциальных системах и парциальных частотах. Задача о взаимодействии парциальных систем. Слабая и сильная связь; слабая и сильная „связанность". Нормальные колебания и перекачка энергии в случае слабой и сильной „связанности". Парадокс, связанный с полной перекачкой энергии при сколь угодно слабой связи.

Мы разбираем системы с двумя степенями свободы, описываемые уравнениями вида

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{x} + H\ddot{y} + ax + hy = 0, \\ H\ddot{x} + B\ddot{y} + hx + by = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Решая эти уравнения, мы узнаем частоты колебаний и отношения амплитуд, с которыми колеблются координаты x и y.