Если ввести координаты q_1 и q_3 (рис. 100, *а*), то получатся другие парциальные системы (рис. 100, *в*).

При нашем определении период каждой парциальной системы (рис. 92, *б*) будет иной, чем у маятника без пружины. Мы просчитаем этот случай в следующий раз.

Рассмотрим (в общем случае) систему с двумя степенями свободы, как связанную. Тогда парциальные частоты n_1 и n_2 (частоты парциальных систем) определяются равенствами:

$$n_1^2 = \frac{a}{A}, \quad n_2^2 = \frac{b}{B}.$$

Найдем общее соотношение между нормальными и парциальными частотами.

Отношения a/A, b/B принадлежат к числу значений, принимаемых отношением (13), но не при $\xi = 0$ и не при $\eta = 0$. Поэтому

$$\omega_1^2 > n_1^2 > n_2^2 > \omega_2^2.$$

Итак, существует следующая закономерность: собственные частоты отдельных парциальных систем *лежат между частотами связанной системы.*

Если определить парциальные системы иначе, то между нормальными и парциальными частотами мы получим самые разнообразные соотношения.

ДВАДЦАТЬ ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(7/III 1931 г.)

Случай вырождения — случай двух одинаковых нормальных частот. Еще раз о парциальных системах и парциальных частотах. Задача о взаимодействии парциальных систем. Слабая и сильная связь; слабая и сильная „связанность“. Нормальные колебания и перекачка энергии в случае слабой и сильной „связанности“. Парадокс, связанный с полной перекачкой энергии при сколь угодно слабой связи.

Мы разбираем системы с двумя степенями свободы, описываемые уравнениями вида

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{x} + H\ddot{y} + ax + hy = 0, \\ H\ddot{x} + B\ddot{y} + hx + by = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Решая эти уравнения, мы узнаем частоты колебаний и отношения амплитуд, с которыми колеблются координаты x и y.

Может ли система с двумя степенями свободы иметь две одинаковые нормальные частоты?

Для этого должно быть

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{h}{H}\,. \tag{2}$$

Это возможно, если кинетическая энергия пропорциональна потенциальной энергии, или, точнее, если квадратичная форма $T(x, y)$ пропорциональна квадратичной форме $U(x, y)$.

Мы видели, что нормальные частоты суть максимальное и минимальное значения определенной дроби[1]. Здесь максимальное и минимальное значения совпадают. В случае (2) дробь имеет постоянное значение. Легко убедиться, что этот случай — настолько вырожденный, что он физически мало интересен.

В этом случае соответствующей обработкой уравнений можно сразу перейти к одной координате (без введения нормальных координат).

Умножим первое уравнение (1) на B, второе на H и вычтем:

$$(AB-H^2)\ddot{x}+(aB-hH)x=0. \tag{3}$$

Аналогичным образом получим:

$$(AB-H^2)\ddot{y}+(bA-hH)y=0. \tag{4}$$

Хотя это сразу, может быть, не видно, но для каждого из двух контуров, связанных так, что выполняется условие (2), получается отдельное уравнение (3) или (4). При соответствующем подборе коэффициента взаимной индукции M два контура (рис. 101) не связаны друг с другом. Связь через емкость и связь через взаимную индукцию компенсируют друг друга, в результате чего получаются два несвязанных контура.

Как было сказано в прошлой лекции, наша система может рассматриваться как состоящая из двух выделяемых определенным образом частичных (парциальных) систем, которые связаны между собой.

Часто опыт делается так, что приводит к следующей постановке вопроса: имеются две колебательные системы; как происходит взаимодействие между ними? Особенно важную роль играет такая постановка вопроса в молекулярной динамике, в тех случаях, когда изучается взаимодействие двух атомов. По волновой

[1] [См. 24-ю лекцию, формула (13) и дальше.]

механике взаимодействие двух атомов — это взаимодействие двух колебательных систем.

При том определении составляющих (парциальных) систем, которое мы дали, частоты каждой из них лежат между нормальными частотами (рис. 102). Связывая системы, мы раздвигаем нормальные частоты. Это — общая теорема, но если бы мы определили парциальные системы по-другому, то она была бы несправедлива.

Выбор парциальных систем зависит от выбора координат.

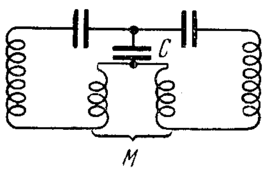

Рис. 101.

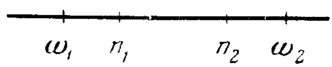

Рис. 102.

Если в выражении для потенциальной энергии $h \neq 0$, то мы говорим, что имеется силовая (емкостная) связь; если в выражении для кинетической энергии $H \neq 0$, — что имеется инерциальная (индуктивная) связь; если $h \neq 0$, $H \neq 0$, — что имеется смешанная связь.

Это понятие качества или рода связи не инвариантно по отношению к выбору координат. Также не инвариантна и величина связи. Но остановимся на определенных координатах. Тогда имеет полный смысл говорить о том, что имеется связь определенного рода.

В случае равных корней секулярного уравнения согласно (2) налицо либо оба вида связи, либо оба отсутствуют. В нашем примере с вагоном (рис. 90), если мы берем координаты x_1 и x_2, получается инерциальная связь, а если мы берем координаты ξ и θ — силовая. Здесь сразу можно сказать, что корни неравны.

Рассмотрим теперь подробно взаимодействие парциальных систем. Выделим существенные вопросы и разберем их на несложном примере. Рассмотрим случай двух связанных маятников (рис. 103). Мы будем говорить о взаимодействии между двумя связанными системами, входящими в состав одной системы с двумя степенями свободы. Здесь

$$\begin{aligned} 2T &= I_1\dot{\varphi}_1^2 + I_2\dot{\varphi}_2^2, \\ 2U &= P_1\varphi_1^2 + P_2\varphi_2^2 + \lambda(\varphi_1 - \varphi_2)^2, \end{aligned} \tag{5}$$

где I_1 и I_2 — моменты инерции маятников; P_1 и P_2 — произведения их весов на расстояния центров тяжести от осей; λ — пропорционально коэффициенту упругости пружины. Можно сразу сказать, что в *данных* координатах связь силовая, так как

$$2U=(P_1+\lambda)\varphi_1^2+(P_2+\lambda)\varphi_2^2-2\lambda\varphi_1\varphi_2.$$

Полагая $\varphi_2=0$ или $\varphi_1=0$ (закрепляя маятники), получаем парциальные системы. Для них потенциальная энергия

$$U_1=\frac{P_1+\lambda}{2}\varphi_1^2 \text{ и } U_2=\frac{P_2+\lambda}{2}\varphi_2^2.$$

Собственные частоты парциальных (в нашем толковании) систем равны:

$$n_1=\sqrt{\frac{P_1+\lambda}{I_1}},\quad n_2=\sqrt{\frac{P_2+\lambda}{I_2}}. \qquad (6)$$

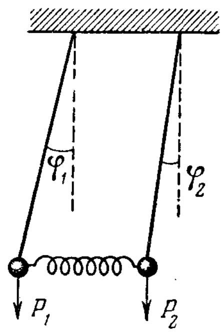

Рис. 103.

Обычно под частотами отдельных систем понимают:

$$n_1^*=\sqrt{\frac{P_1}{I_1}},\quad n_2^*=\sqrt{\frac{P_2}{I_2}}. \qquad (7)$$

Это — нечто другое. При $n_1=n_2$ возможно и $n_1^*=n_2^*$.

Мы увидим, что́ влечет за собой равенство или неравенство парциальных частот в нашем понимании. Мы увидим, что частотами парциальных систем целесообразно считать именно n_1 и n_2; особые явления наступают тогда, когда $n_1=n_2$, а не в том случае, когда маятники *без пружин* имеют одинаковые частоты (т. е. $n_1^*=n_2^*$).

Напишем, исходя из (5) и (6), уравнения движения, разделив их на I_1 и I_2:

$$\left.\begin{aligned}\ddot\varphi_1+n_1^2\varphi_1-\frac{\lambda}{I_1}\varphi_2=0;\\ \ddot\varphi_2+n_2^2\varphi_2-\frac{\lambda}{I_2}\varphi_1=0.\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Общее решение есть

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=C_1\cos(\omega_1t+\alpha_1)+C_2\cos(\omega_2t+\alpha_2),\\ \varphi_2&=k_1C_1\cos(\omega_1t+\alpha_1)+k_2C_2\cos(\omega_2t+\alpha_2),\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

причем

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\lambda^2/I_1 I_2}}{2}, \tag{10}$$

$$k_{1,2} = \frac{n_1^2 - n_2^2 \mp \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\lambda^2/I_1 I_2}}{2\lambda/I_1}. \tag{11}$$

Если для частоты мы берем знак плюс, то для коэффициента k нужно брать знак минус.

Выясним физическое содержание этих формул.

Принято вводить обозначение

$$\rho^2 = \frac{\lambda^2}{(P_1 + \lambda)(P_2 + \lambda)} \tag{12}$$

и называть отвлеченное число ρ коэффициентом связи. Последний член под корнем в (10) и (11) можно написать так:

$$\frac{4\lambda^2}{I_1 I_2} = 4\rho^2 n_1^2 n_2^2.$$

Здесь нет пока хорошей терминологии. Говорят, что *связь слаба*, если

$$\rho \ll 1. \tag{13}$$

Это значит, что добавочный член в энергии, обусловленной связью, мал по сравнению с остальными. Но это мало что дает, т. е. *не это* характеризует явления.

Немного больше дало бы такое определение малости связи:

$$\frac{\lambda}{P_1 + \lambda} \ll 1, \quad \frac{\lambda}{P_2 + \lambda} \ll 1.$$

Это значило бы, что связь мала, если пружина мало влияет *на каждый* маятник.

Существенна *другая* малость. Важно соотношение двух величин под корнем:

$$(n_1^2 - n_2^2)^2 \quad \text{и} \quad 4\rho^2 n_1^2 n_2^2.$$

Важно, как мы сейчас увидим, выполняется или нет условие

$$\rho \ll \frac{|n_1^2 - n_2^2|}{n_1 n_2}. \tag{14}$$

Решающее значение имеет разность $n_1^2 - n_2^2$. Если $n_1 = n_2$, то физически не бывает слабой связи.

Важна степень физической „связанности". И в том случае, когда ρ очень мало, т. е. связь очень мала, „связанность" систем может быть велика.

Выразим это иначе. Нас интересует, получится ли сильное взаимодействие. Оказывается, что в случае, когда ρ очень мало по отношению к единице, но не по отношению к $|n_1^2 - n_2^2|/n_1 n_2$, то, несмотря на „слабую связь", взаимодействие будет очень сильное.

Если мы хотим определить „связанность" так, чтобы она характеризовала взаимодействие, то в качестве условия малой связанности нужно требовать, чтобы выполнялось условие (14). При этом если $n_1 = n_2$, то вообще не может быть малой „связанности".

Если отдельные системы расстроены одна по отношению к другой, то с точностью до величин второго порядка по λ (т. е. если отбросить члены порядка λ^2 и т. д.)

$$\omega_1^2 = n_1^2, \quad \omega_2^2 = n_2^2.$$

При слабой связи, если „связанность" достаточно слабая, то в первом порядке нормальные частоты не отличаются от парциальных.

Рассмотрим величины k_1 и k_2. Величина k_1 характеризует относительную силу первого колебания во второй координате; величина $1/k_2$ характеризует относительную слабость второго колебания в первой координате.

При вычислении k_1 мы не имеем права пренебречь λ^2. С точностью до членов высшего порядка по λ

$$k_1 = -\frac{\lambda}{\left(n_1^2 - n_2^2\right) I_2}, \quad k_2 = \frac{\left(n_1^2 - n_2^2\right) I_1}{\lambda}.$$

Если I_1 и I_2 — одного и того же порядка, но если $\lambda/\left(n_1^2 - n_2^2\right)$ малая величина, то k_1 — очень малая, k_2 — очень большая величина. Картина ясна: первое колебание ограничено главным образом первой системой, второе колебание — главным образом второй системой. Каждая частота соответствует „своему" маятнику. Уже одно это показывает, что физически связь очень мала. Каждый маятник колеблется почти так, как будто бы другого нет.

Если $n_1 = n_2 = n$, то для частот получаются такие выражения:

$$\omega_1^2 = n^2 (1 + \rho), \quad \omega_2^2 = n^2 (1 - \rho).$$

Если парциальные системы имеют одинаковые собственные периоды, то, как мы видим, связь сказывается на частотах в первом порядке по λ (так как ρ пропорционально λ). При различных n_1 и n_2 частоты *не* отличались в первом по λ. Важно знать, что получится при $n_1 = n_2$ для k_1 и k_2. Здесь

$$k_1 = -\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}, \quad k_2 = +\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}.$$

Теперь относительная сила первого колебания во втором маятнике и второго колебания в первом вовсе не мала. В частности, если $I_1 = I_2$, то

$$k_1 = -1, \ k_2 = 1,$$

причем это соотношение *не* зависит от величины связи. Как бы связь ни была слаба, и первое и второе колебания одинаково сильно представлены как в первом, так и во втором маятнике:

$$\varphi_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2);$$

$$\varphi_2 = -C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Резюмируем. Если оба маятника расстроены ($n_1 \neq n_2$) и слабо связаны [выполнено (14)], то каждый сохраняет приблизительно свою частоту. Если мы отклоним и приведем в колебание первый маятник, то второй почти не колеблется.

Совсем другое дело в случае *равных* парциальных частот. Как бы ни была слаба связь, нормальные колебания таковы: маятники колеблются с одинаковыми амплитудами, при более быстром колебании — навстречу друг другу (рис. 104, *а*), при более медленном — в одну сторону (рис. 104, *б*).

Таковы нормальные (синусоидальные) колебания. Посмотрим теперь, каково будет взаимодействие, если мы выведем первый маятник из состояния равновесия, а второй — нет. При этом будет колебание, отличное от нормального. Нам нужно решить задачу о том, как передается энергия от одного маятника к другому.

Зададим для простоты такие начальные условия. Пусть при $t = 0$

$$\varphi_1 = 1, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \dot{\varphi}_1 = 0, \qquad \dot{\varphi}_2 = 0.$$

Взяв в (9) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, мы удовлетворим последним двум условиям. Первые два условия дают уравнения:

$$C_1 + C_2 = 1, \quad k_1 C_1 + k_2 C_2 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{k_2}{k_1 - k_2}, \quad C_2 = \frac{k_1}{k_1 - k_2},$$

так что

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{k_1 - k_2}(-k_2 \cos \omega_1 t + k_1 \cos \omega_2 t), \\ \varphi_2 &= \frac{k_1 k_2}{k_1 - k_2}(-\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t). \end{aligned} \tag{15}$$

Эти уравнения и дают нам ответ на вопрос о том, как передается энергия от первого маятника ко второму, если вначале возбужден первый маятник.

Заметим, что выражение для φ_2 можно представить в виде

$$\varphi_2 = \frac{2k_1 k_2}{k_1 - k_2} \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \tag{16}$$

Второй множитель — быстро колеблющаяся синусоида, а первый множитель — переменная амплитуда. Получаются *биения*. Максимальное значение φ_2 наступает тогда, когда оба множителя равны единице:

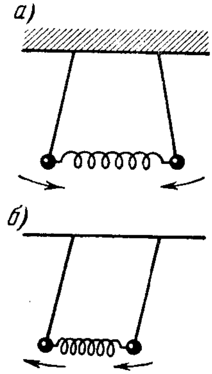

Рис. 104.

$$\varphi_{2\,\max} = \frac{2k_1 k_2}{k_1 - k_2},$$

или, если подставить сюда (11),

$$\varphi_{2\,\max} = \frac{2\lambda}{I_2 \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\lambda^2/I_1 I_2}}. \tag{17}$$

Возьмем первый случай, когда

$$(n_1^2 - n_2^2)^2 \gg \frac{4\lambda^2}{I_1 I_2}.$$

Тогда приближенно

$$\varphi_{2\,\max} = \frac{2\lambda}{I_2 (n_1^2 - n_2^2)}.$$

Таким образом, если парциальные системы расстроены, то при слабой связи передача энергии ничтожна и тем меньше, чем меньше λ.

Совсем иначе будет в случае, если парциальные системы настроены, т. е. $n_1 = n_2$. Тогда

$$\varphi_{2\,\max} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}.$$

При „резонансе“ парциальных частот колебание „заразительно“. Если $I_1 = I_2$, т. е. маятники тождественны, то $\varphi_{2\,\max} = 1$, — максимальное значение отклонения второго маятника равняется начальному отклонению первого маятника. Это значит, что *вся* энергия передается через некоторое время второму маятнику. В этом состоит другое проявление того, что если связь как угодно слаба, но отдельные системы друг на друга настроены, то все же „связанность“ очень велика.

Если есть различие между n_1 и n_2, то всегда можно выбрать столь малое λ, чтобы не было заметного взаимодействия. Если же $n_1 = n_2$, то „слабо“ связать системы невозможно: всегда есть сильное взаимодействие.

Как зависит амплитуда $\varphi_{2\,\max}$ от расстройки? Формула (17) напоминает формулу

$$X = \frac{E}{L\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}} \tag{18}$$

для колебаний системы с одной степенью свободы под действием синусоидальной внешней силы. Там мы имели явления резонанса. Структура формулы (17) — совершенно та же. Достаточно малой расстройки между частотами, чтобы сильно расстроить передачу энергии.

Но в случае (18) амплитуда силы постоянна, теперь же она переменна. Второй маятник не может получить больше энергии, чем имеет вначале первый. Когда один раскачивается, другой теряет энергию. Здесь — не действие на маятник силы с заданной амплитудой, а *взаимодействие*. Как бы велико ни было λ, $\varphi_{2\,\max}$ не будет больше единицы.

Картина смещений обоих маятников показана на рис. 105.

При очень слабой связи перекачка энергии от первого маятника ко второму происходит очень медленно, но если $n_1 = n_2$, то в конце концов перекачается *вся* энергия. Но можно ли поверить, что такая полная перекачка получится на самом деле при сколь угодно слабой связи? Мы пришли к парадоксу. В реальных условиях этого не может быть. Теория правильна, но она перестает быть применимой при слишком малой связи. В молекулярной физике область применимости нашей теории простирается гораздо дальше, чем для маятников. Там она дает „парадоксальные", но реально наблюдаемые вещи: очень сильное взаимодействие при чрезвычайно слабых связях. Там это имеет еще большее значение, чем в обычной теории колебаний.

Разберем подробнее наш парадоксальный результат.

Пусть λ очень мало (представим себе, что мы уносим второй маятник в другую комнату). Тогда приближенно

$$\omega_1 = n\left(1 + \frac{\rho}{2}\right),\quad \omega_2 = n\left(1 - \frac{\rho}{2}\right).$$

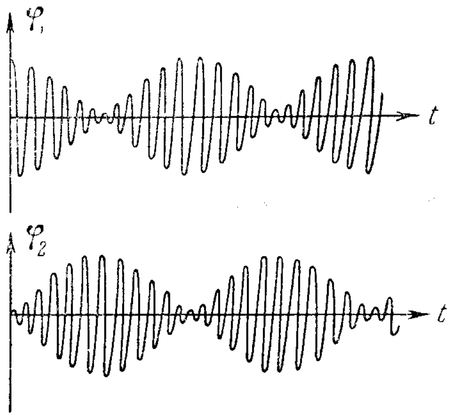

Рис. 105.

Разность нормальных частот $\omega_1 - \omega_2$ очень мала по сравнению с $\omega_1 + \omega_2$. В начальный момент величина φ_2 равна нулю. Она станет заметной только через колоссальное время. В предельном случае бесконечно слабой связи перекачка будет длиться бесконечное время. Это и ограничивает применение теории на практике. Будем оценивать время по отношению к периоду. Если перекачка длится 10^{10} периодов, то это практически значит, что перекачки никогда не произойдет. Но в молекулярной физике 10^{10} периодов составляют, например, 10^{-2} секунды, а это на наши масштабы — конечное время.

Но это еще не все. Мы вели расчет для идеальных условий. Если передача должна длиться очень долго, то прежде чем она произойдет, вся энергия будет „съедена" даже маленьким трением.

В том, что было сказано о перекачке, математическая сторона ясна, но возникает следующий физический вопрос. Пустим левый маятник. Он толкает правый маятник, раскачивает его. Пусть правый раскачался настолько, что он обладает половиной всей энергии. Почему его энергия будет и дальше увеличиваться? Строгий ответ дается математическим решением задачи, но хочется иметь наглядную картину. Дело в том, что левый маятник сообщает толчки правому маятнику в *определенные* моменты. В случае $n_1 = n_2$ толчки продолжают наступать в моменты, благоприятные для передачи энергии от левого маятника к правому, и после того, как энергии маятников сравнялись. Дело здесь не в запасе энергии у каждого из маятников, а в том, как распределены толчки во времени.

ДВАДЦАТЬ ШЕСТАЯ ЛЕКЦИЯ

(17/III 1931 г.)

Примеры, где существенное значение имеет распределение нормальных колебаний. Когда можно приближенно рассматривать связанные колебания как вынужденные. Приближенное вычисление изменения нормальной частоты при малом изменении параметра. Вырожденный случай. Эффект слабой связи в теории возмущений. Вынужденные колебания в системе с двумя степенями свободы. Теорема взаимности. Резонанс. Успокоение.

Для систем с двумя степенями свободы нам остается, во-первых, подвести некоторые итоги, во-вторых, разобрать вынужденные колебания и, наконец, разобрать вопрос о затухании колебаний.

В прошлый раз мы рассчитали до конца простой пример двух связанных маятников. В общем случае электрической или механической системы, обозначая координаты через x и y, мы имеем общее решение вида

$$x = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$y = k_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + k_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Каждая координата совершает движение, которое может быть представлено, вообще говоря, как сумма двух гармонических колебаний с определенными периодами. В частности, система может колебаться с одним периодом (если $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$). Эти особенные колебания с одним периодом называются нормальными. Величины k_1 и k_2 характеризуют распределение нормальных колебаний по координатам. Знание периодов существенно в вопросах резонанса. Укажем теперь примеры, на которых выяснилось, насколько важно для чисто технических вопросов знание также и величин k_1 и k_2.