для передачи энергии от левого маятника к правому, и после того, как энергии маятников сравнялись. Дело здесь не в запасе энергии у каждого из маятников, а в том, как распределены толчки во времени.

ДВАДЦАТЬ ШЕСТАЯ ЛЕКЦИЯ

(17/III 1931 г.)

Примеры, где существенное значение имеет распределение нормальных колебаний. Когда можно приближенно рассматривать связанные колебания как вынужденные. Приближенное вычисление изменения нормальной частоты при малом изменении параметра. Вырожденный случай. Эффект слабой связи в теории возмущений. Вынужденные колебания в системе с двумя степенями свободы. Теорема взаимности. Резонанс. Успокоение.

Для систем с двумя степенями свободы нам остается, во-первых, подвести некоторые итоги, во-вторых, разобрать вынужденные колебания и, наконец, разобрать вопрос о затухании колебаний.

В прошлый раз мы рассчитали до конца простой пример двух связанных маятников. В общем случае электрической или механической системы, обозначая координаты через x и y, мы имеем общее решение вида

$$x = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$y = k_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + k_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Каждая координата совершает движение, которое может быть представлено, вообще говоря, как сумма двух гармонических колебаний с определенными периодами. В частности, система может колебаться с одним периодом (если $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$). Эти особенные колебания с одним периодом называются нормальными. Величины k_1 и k_2 характеризуют распределение нормальных колебаний по координатам. Знание периодов существенно в вопросах резонанса. Укажем теперь примеры, на которых выяснилось, насколько важно для чисто технических вопросов знание также и величин k_1 и k_2.

Пусть система колеблется под действием внешнего источника колебаний. Если внешняя сила действует только на одну парциальную систему, то тем не менее одновременно приходят в колебание обе. Если частота внешней силы значительно отличается от нормальных частот, то тип колебаний существенно другой, чем при нормальных колебаниях. Но пусть частота внешней силы очень близко подходит к ω_1 или ω_2. Тогда система начинает возбуждаться очень сильно (резонанс) и, кроме того, тип колебаний становится почти таким же, как при соответствующем нормальном колебании.

Физически речь может идти, например, о двух маятниках (рис. 86). Это — модель парохода с успокоителем качки[1], или пловучего маяка (фонарь подвешен на буе).

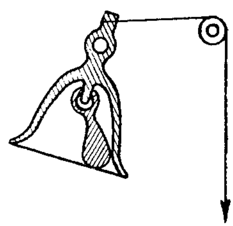

Рис. 106.

Вот еще система с двумя степенями свободы: колокол и язык (рис. 106). В 70-х годах прошлого века наблюдался случай, когда очень большой колокол не звонил. Постараемся понять, в чем здесь дело. Для того, чтобы сильно раскачать колокол, его тянут с одним из собственных периодов. Тип колебания приблизительно такой же, как при собственных колебаниях. Пусть $k_1 = 1$. Это значит, что вблизи резонанса $x = y$. Колокол отклоняется так же, как и язык. Они колеблются как целое, и язык не ударяет в колокол.

Для того, чтобы колокол или пловучий маяк правильно действовали, нужно, чтобы было $y = 0$, т. е. $k_1 = 0$ (y — отклонение языка или фонаря). Но в связанной системе никогда не бывает $k_1 = 0$: идеально успокоить фонарь невозможно. Чтобы обойти эту трудность, делают фонарь с очень большим собственным периодом. Здесь мы возвращаемся к уже известному нам случаю действия силы с коротким периодом на систему с очень длинным собственным периодом[2].

Обратимся снова к вопросу о взаимодействии между парциальными системами. Мы знаем, что здесь возможны два существенно различных случая — слабой и сильной „связанности". Если парциальные системы расстроены и связь мала, то в первом приближении каждая из них колеблется „сама по себе". Если частоты

[1] [См. 27-ю лекцию.]
[2] [См. 20-ю лекцию.]

парциальных систем совпадают, сильное взаимодействие будет и при сколь угодно слабой связи.

Вопрос о взаимодействии при слабой связи интересен и получил решающее значение в теории возмущений. Для того, чтобы понять, в чем тут дело, напишем снова уравнения связанных маятников:

$$\ddot{\varphi}_1 + n_1^2\varphi_1 = \frac{\lambda}{I_1}\varphi_2;$$

$$\ddot{\varphi}_2 + n_2^2\varphi_2 = \frac{\lambda}{I_2}\varphi_1.$$

Если бы во втором уравнении справа стояла заданная функция времени, то для второй парциальной системы была бы задача о вынужденных колебаниях системы с одной степенью свободы. Эту задачу мы уже рассматривали. Но в действительности мы не знаем $\varphi_1(t)$, ибо φ_1 связана таким же уравнением с φ_2, как φ_2 с φ_1. Поэтому здесь нужна *новая* теория.

Вначале встречались такого рода недоумения. Если мы сначала пустим первую систему, то она должна колебаться со своим собственным периодом и на вторую систему будет действовать периодическая сила с частотой n_1. Между тем по теории должно быть *две* частоты. Откуда взялась вторая частота?

Парадокс получался только потому, что не умели правильно решать задачу. Существование двух частот вполне естественно и с физической точки зрения: если первое движение возбуждает второе, то оно изменяется под действием этого второго движения. Сила, действующая на φ_2, уменьшается по амплитуде, а сила с переменной амплитудой — это уже не синусообразная сила.

Но есть ли случаи, когда применимы рассуждения, сводящие задачу о связанных колебаниях на задачу о вынужденных? Если они есть, то в таких случаях удобно решать задачу, как задачу о вынужденных колебаниях. (Например, радиопередатчик на 100 квт и приемник образуют связанную систему, но здесь наверное можно считать, что приемник совершает колебания под действием заданной внешней силы.)

В нашем случае линейной системы задачу о связанных колебаниях можно свести приближенно к задаче о вынужденных колебаниях тогда, когда связь мала и есть сильная расстройка между парциальными системами ($|k_1| \ll |k_2|$). При этом можно положить

$$x = \cos \omega_1 t$$

(x колеблется почти так, как будто второй координаты нет). Случай, когда связь мала по отношению к расстройке, соответствует слабой связанности в нашем смысле.

Можно показать, что и при совпадении парциальных частот, т. е. когда $n_1 = n_2$, если связь слабая, такой способ рассмотрения допустим в первое, начальное время после того, как пустили первый маятник (второй вначале покоится), т. е. в течение определенного числа периодов, зависящего от связи. Это время тем меньше, чем больше связь. Здесь нельзя забывать, что с течением времени наступает полная перекачка энергии.

До сих пор затухание не учитывалось. Пусть теперь имеется затухание и такое, что колебания затухнут раньше, чем успеет произойти заметная перекачка энергии. Тогда и при настройке парциальных систем ($n_1 = n_2$) мы получим все, что нужно, сводя задачу о связанных колебаниях на задачу о вынужденных колебаниях.

Разумеется, как угодно малая расстройка физически не может играть никакой роли в теории связанных колебаний. В окончательном результате не может иметь значения, являются ли парциальные системы тождественными или слегка различными. Как теперь известно, эту точку зрения нельзя переносить в теорию атомных явлений. Там мы имеем основание говорить об особых случаях полной тождественности двух систем. Вне наших возможностей не допустить различия двух макроскопических систем хотя бы на один атом. В макроскопических системах точное число атомов не может играть роли. Но когда речь идет об *одном* атоме, дело обстоит иначе. Различие между тождественностью и нетождественностью системы имеет в волновой механике важный физический смысл.

Возьмем связанную систему (рис. 107). Как выделить нормальные колебания на опыте? С помощью волномера (при очень слабой связи между волномером и исследуемой системой) можно разделить колебания с частотами ω_1 и ω_2; но если они близки, то раздельный прием очень труден. Свяжем, однако, с исследуемой системой две катушки так, как показано на рис. 107. Тогда ток I будет линейной комбинацией координат x и y:

$$I = s_1 x + s_2 y.$$

Если мы подберем коэффициенты трансформации s_1 и s_2 так, чтобы было $s_1 + s_2 k_1 = 0$, т. е. $s_1/s_2 = -k_1$, то в токе I будет отсутствовать частота ω_1, и мы физически осуществим в дополнительной цепи вторую нормальную координату. Аналогичным образом мы можем физически осуществить первую нормальную координату.

В теории колебаний встречается целый класс задач следующего типа. Дана система с такими-то частотами и такими-то распределениями амплитуд. Изменим параметры системы. Как изменятся при этом частоты и распределения?

Вообще говоря, для новых значений параметров нужно заново решать всю задачу о нахождении частот и распределений. Но часто бывает так, что параметры изменены *очень мало*, и тогда, в первом приближении, можно узнать, как меняются частота и распределение без сложных вычислений.

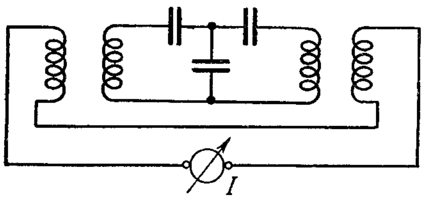

Рис. 107.

Такой подход характерен для теории возмущений. Проиллюстрируем его на простом примере системы с двумя степенями свободы. Напишем снова:

$$U = ax^2 + 2hxy + by^2,$$
$$T = A\dot{x}^2 + 2H\dot{x}\dot{y} + B\dot{y}^2.$$

Отбросим точки в выражении для T, обозначим

$$\frac{y}{x} = \xi$$

и составим отношение полученных таким образом выражений:

$$\frac{a + 2h\xi + b\xi^2}{A + 2H\xi + B\xi^2}. \qquad (1)$$

Мы доказали, что максимальное и минимальное значения этой функции от ξ получаются соответственно при $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$ и равны квадратам нормальных частот [1].

Пусть теперь немного изменился один из параметров, входящий в T или U. Изменятся нормальные частоты и отношения ξ_1 и ξ_2. Утверждение состоит в следующем: чтобы найти с точностью до величин второго порядка относительно изменения параметра новый максимум выражения (1), нужно подставить в него *прежнее* ξ_1.

[1] [См. 24-ю лекцию.]

Докажем это. Будем менять, скажем, параметр a и рассматривать ω_1^2 как функцию параметра a и величины ξ_1:

$$\omega_1^2 = f(a, \xi),$$

причем $\xi = \xi(a)$, т. е.

$$\omega_1^2 = f[a, \xi(a)].$$

Если меняется параметр a, то меняется и ω_1^2, причем в первом порядке:

$$\Delta\omega_1^2 = \frac{\partial f}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{d\xi}{da}\Delta a,$$

где производную $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ нужно брать при неизмененных параметрах и подставить в нее старое значение a.

Но при старом значении a подстановка значения $\xi = \xi_1$ обращает величину ω_1^2 в максимум, и потому

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta\omega_1^2 = \frac{\partial f}{\partial a}\Delta a.$$

Изменение ξ выпадает.

Для того, чтобы пояснить математическую сторону дела, приведем следующий пример: возьмем функцию

$$x^2 + ax$$

и изменим параметр a. При этом изменяется значение x, дающее экстремум функции. Но если a изменяется на малую величину *первого* порядка, то значение x, соответствующее экстремуму, остается прежним с точностью до величин *второго* порядка.

Только что указанный простой способ нахождения изменения частот имеет одно очень важное исключение. Это — случай, когда в исходной системе нет связи и обе частоты совпадают:

$$n_1^2 = \frac{a}{A} = n_2^2 = \frac{b}{B},$$

а возмущение заключается в том, что вводится малая связь.

Если мы захотим применить общий способ, мы должны будем подставить в выражение (1) для возмущенной системы значения ξ в невозмущенной системе. Но чему считать равным это ξ? Неизвестно. В исходной системе ξ может иметь какие угодно значения. Так решать задачу нельзя.

Но легко доказать следующее. Если

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B},$$

то при наличии связи

$$\xi_1=-\xi_2, \quad \xi_1=\sqrt{\frac{a}{b}},$$

а раз мы нашли ξ_1 и ξ_2, то очень просто найти обычным путем нормальные частоты как максимум и минимум выражения (1). Здесь также есть исключительный случай — тот, когда

$$\frac{h}{H}=\frac{a}{A}.$$

Но тогда и при возмущении попрежнему нет связи.

Случай, когда две тождественные системы с одной степенью свободы, сначала не связанные, приходят в слабую связь, имеет в теории возмущений большое значение. При этом всегда наступает полная перекачка энергии. К этому случаю применим только что указанный способ расчета.

Перейдем к вопросу о действии внешней периодической силы на систему с двумя степенями свободы. Вернемся к уравнениям Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i.$$

Если обобщенные силы Q_i содержат, помимо слагаемых Q_i', имеющих потенциальную энергию:

$$Q_i'=-\frac{\partial U}{\partial q_i},$$

еще слагаемые Q_i'', происходящие от внешних воздействий, уравнения принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial (U-T)}{\partial q_i}=Q_i''.$$

Пусть система имеет две степени свободы и пусть на координаты x и y действуют синусоидальные силы с частотой p (например, рис. 108). Тогда мы получаем уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{x}+H\ddot{y}+ax+hy&=X\cos pt;\\ H\ddot{x}+B\ddot{y}+hx+by&=Y\cos pt.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Будем искать решение в виде

$$x = \alpha \cos pt, \\ y = \beta \cos pt. \tag{3}$$

Подставляя эти формулы в дифференциальные уравнения, получаем для α и β систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (a - Ap^2)\,\alpha + (h - Hp^2)\,\beta = X; \\ (h - Hp^2)\,\alpha + (b - Bp^2)\,\beta = Y. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Из них мы определим амплитуды обеих координат при действии внешней силы. При собственном колебании детерминант должен был равняться нулю. Из этого условия мы определяли нормальные частоты. При любом p, таком, что детерминант системы отличен от нуля, система (4) имеет решение. При этом однородные уравнения не имеют решения.

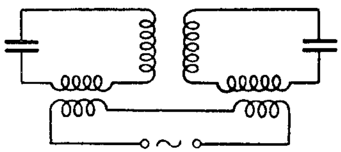

Рис. 108.

Напишем решения неоднородных уравнений в виде отношения детерминантов:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X & h - Hp^2 \\ Y & b - Bp^2 \end{vmatrix}, \quad \beta = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a - Ap^2 & X \\ h - Hp^2 & Y \end{vmatrix}, \tag{5}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a - Ap^2 & h - Hp^2 \\ h - Hp^2 & b - Bp^2 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Здесь возникает ряд вопросов, чуждых системе с одной степенью свободы.

Пусть $Y = 0$, $X \neq 0$ (сила действует только на первую парциальную систему). Тогда

$$\beta = -\frac{X(h - Hp^2)}{\Delta}.$$

Пусть теперь сила действует только на вторую парциальную систему: $X = 0$, $Y \neq 0$. При этом

$$\alpha = -\frac{Y(h - Hp^2)}{\Delta}.$$

Мы получили замечательное свойство — свойство, далеко идущее и очень общее: если на вторую координату действует сила

$Y=1$, то движение первой координаты — такое же, как движение второй координаты, когда на первую будет действовать сила $X=1$. Это — знаменитая *теорема взаимности*. Она справедлива для систем с любым числом степеней свободы, и — в соответствующим образом измененной формулировке — для сплошных систем. Она широко применяется в радиотехнике и в оптике.

Я укажу на одно ее применение в беспроволочной телеграфии. Имеются две радиостанции A и B с какими угодно антеннами. Пусть один раз станция A передает, а B принимает, а в другой раз B передает, а A принимает. Теорема взаимности утверждает, грубо говоря, что станция A так же принимает станцию B, как станция B принимает станцию A. Если в направлении B станция A передает сильнее, то она и принимает сильнее колебания, приходящие из направления B. Это отнюдь не само собой понятно. Это связано с линейностью уравнений. Вот тривиальный пример, когда это перестает быть справедливым. Пусть антенна станции A перегружается, в ней пробивается изоляция. Тогда станция B принимать не будет, а станция A попрежнему хорошо принимает станцию B. Это происходит потому, что нарушается линейность: когда происходит пробой, ток не растет пропорционально напряжению, проводник не подчиняется закону Ома.

Ионизированные слои атмосферы не подчиняются линейным зависимостям. При достаточно больших амплитудах они должны дать нарушение взаимности, но я не думаю, чтобы это легко было обнаружить на опыте [1].

Вернемся к формулам (5) и (6).

Пусть p приближается к ω_1 или ω_2. При этом

$$\Delta \to 0, \quad \alpha \to \infty, \quad \beta \to \infty.$$

Получаются два положения резонанса. При приближении к резонансу начинает играть роль затухание, но если мы захотим его учесть, то нам нужно будет решать чрезвычайно громоздкие уравнения.

Затухание приводит к тому, что при резонансе получается чрезвычайно большая, но конечная амплитуда. Для многих вопросов достаточно знать, при каких частотах имеет место резонанс. На этот вопрос уравнения (5) часто дают достаточно правильный

[1] [Нелинейные явления в ионосфере (Люксембург-Горьковский эффект) были впервые замечены в 1933 г.]

ответ. Важно подчеркнуть, что система отвечает особенно сильно на *две* частоты.

Рассмотрим теперь очень специфический случай. Пусть

$$Y=0, \quad p=\sqrt{\frac{b}{B}}=n_2$$

(внешняя сила действует только на *первую* парциальную систему. Ее частота равна частоте *второй* парциальной системы). В этом случае получаем согласно (5)

$$\alpha=0.$$

Таким образом, если на парциальную систему x действует сила с частотой, равной собственной частоте парциальной системы y, то в координате x колебание не возбуждается. Это имеет очень важное практическое значение для электрических фильтров и успокоителей механических колебаний, например устройств для успокоения качки корабля.

ДВАДЦАТЬ СЕДЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(27/III 1931 г.)

Механические успокоители и электрические „пробки". Отсутствие резонанса при совпадении частоты внешней силы с одной из нормальных частот и в случае внешней силы, ортогональной к нормальному колебанию. Линейная система с двумя степенями свободы при наличии трения. Метод, позволяющий находить интегральные эффекты, не решая дифференциального уравнения.

В прошлый раз мы начали исследование поведения линейной системы с двумя степенями свободы под действием периодических внешних сил. Следует, может быть, напомнить, что наши обобщенные координаты x и y, вообще говоря, не являются декартовыми координатами. Поэтому наши внешние силы являются обобщенными силами (обобщенной силой может быть, например, момент силы). Но для простоты мы говорим просто о силах.

Пусть сила действует только на правую координату, а ее частота p равна собственной частоте второй координаты:

$$p=\sqrt{\frac{b}{B}}=n_2.$$