ответ. Важно подчеркнуть, что система отвечает особенно сильно на *две* частоты.

Рассмотрим теперь очень специфический случай. Пусть

$$Y=0, \quad p=\sqrt{\frac{b}{B}}=n_2$$

(внешняя сила действует только на *первую* парциальную систему. Ее частота равна частоте *второй* парциальной системы). В этом случае получаем согласно (5)

$$\alpha=0.$$

Таким образом, если на парциальную систему x действует сила с частотой, равной собственной частоте парциальной системы y, то в координате x колебание не возбуждается. Это имеет очень важное практическое значение для электрических фильтров и успокоителей механических колебаний, например устройств для успокоения качки корабля.

ДВАДЦАТЬ СЕДЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(27/III 1931 г.)

Механические успокоители и электрические „пробки". Отсутствие резонанса при совпадении частоты внешней силы с одной из нормальных частот и в случае внешней силы, ортогональной к нормальному колебанию. Линейная система с двумя степенями свободы при наличии трения. Метод, позволяющий находить интегральные эффекты, не решая дифференциального уравнения.

В прошлый раз мы начали исследование поведения линейной системы с двумя степенями свободы под действием периодических внешних сил. Следует, может быть, напомнить, что наши обобщенные координаты x и y, вообще говоря, не являются декартовыми координатами. Поэтому наши внешние силы являются обобщенными силами (обобщенной силой может быть, например, момент силы). Но для простоты мы говорим просто о силах.

Пусть сила действует только на правую координату, а ее частота p равна собственной частоте второй координаты:

$$p=\sqrt{\frac{b}{B}}=n_2.$$

Тогда, как было показано в прошлой лекции, амплитуда первой координаты $\alpha = 0$. При этом амплитуду β второй координаты легко найти. Итак, в этом случае первая координата не колеблется. Это справедливо при любых h и H.

Если на один груз (M_1; рис. 109) действует периодическая сила, он будет совершать вынужденные колебания при всяком периоде силы. Привяжем пружину со вторым грузом M_2 (рис. 109), и пусть p соответствует собственной частоте второй пружины с грузом (при закрепленном первом грузе). Тогда амплитуда колебания первого груза равна нулю, происходит его *успокоение:* под действием прежней периодической силы он остается теперь в покое.

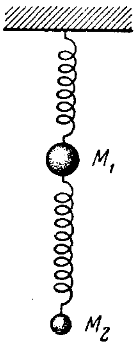

Рис. 109.

Если на диск, насаженный на вал (рис. 98), действует момент с парциальной частотой второго диска, то вращательные колебания первого диска будут успокоены.

Это явление находит существенные применения. На нем основаны механические успокоители.

Если установить на фундаменте мощную машину, не совсем выверенную, фундамент придет при резонансе в сильные колебания, что чрезвычайно нежелательно. Закрепить фундамент невозможно. Но для его успокоения достаточно поставить на фундамент другую колебательную систему и подобрать ее период так, чтобы он совпадал с периодом внешней силы. Дополнительная система (маятник) при этом колеблется, но это нас мало беспокоит. Мы нашли „выход“ силе и таким образом освободили фундамент от колебаний.

Успокоение наступает при $p = n_2$. Если же p — одна из частот связи (нормальных частот), наступает резонанс. Если машина не имеет постоянного числа оборотов и если нормальные частоты близки к парциальным, то легко может наступить переход от успокоения к резонансу; при этом машина начнет сильно раскачивать фундамент.

Полное успокоение имеет место только при отсутствии затухания. Если есть малое затухание, то $\alpha \neq 0$, а только очень мало. Но при этом не так страшна неточность совпадения частот p и n_2. Введя затухание, мы понижаем эффект успокоителя, но зато делаем его менее чувствительным к изменениям периода внешней силы. Полный расчет здесь очень громоздок, и мы не будем его проводить.

Приведем два существенных применения изложенной теории.

1. Успокоитель качки судов. Судно на воде приходит в колебания. Давно возник вопрос о том, как их успокоить. Было предложено много решений. Вот принцип одного из них — успокоителя Фрама (1911 г.). Вода в резервуаре (рис. 110) — одна колебательная система, корабль — другая. На корабль действует периодическая сила. Период колебаний воды в резервуаре подобран так, что он приблизительно совпадает с периодом качки. Вода начинает очень сильно колебаться, но колебания корабля заметно успокаиваются. Колебания воды не создают никаких неприятностей.

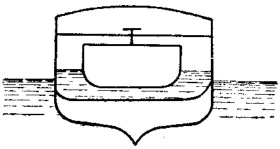

Рис. 110.

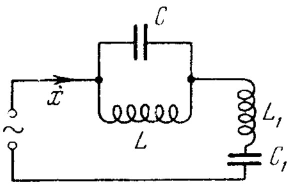

Рис. 111.

Конечно, волны не имеют какого-то одного определенного периода, и здесь нужно найти компромисс между степенью успокоения и нечувствительностью к периоду качки. Он достигается подбором затухания, которое регулируется открытием крана в трубе, через которую перекачивается воздух. Опыт дал благоприятные результаты.

2. „Пробка" в электротехнике. В схеме рис. 111, если

$$p^2 = \frac{1}{LC}, \tag{1}$$

то ток $\dot{x}$ в цепи L_1, C_1 будет равен нулю. Если же равенство (1) нарушено, $\dot{x} \neq 0$. Контур LC обладает бесконечным сопротивлением для определенной частоты и запирает цепь для этой частоты.

Явление здесь сходно с резонансом. В контуре рис. 112, *а* случай (1), когда ток максимален, принято называть резонансом напряжений, так как на конденсаторе и катушке получаются большие напряжения (по сравнению с общим напряжением на клеммах). В случае же „пробки" (рис. 112, *б*) говорят о резонансе токов, потому что ток в контуре LC имеет при условии (1) большую амплитуду (по сравнению с током в общей цепи). Эта теория очень проста, но простота куплена ценой отказа от рассмотрения затухания. При проектировании действительных устройств нужно, конечно, учитывать затухание. Выясним, какие изменения оно внесет.

Без затухания мы получили $\alpha=0$, $\beta\neq0$. Но если $\alpha=0$, то откуда берется энергия второго контура? Поскольку сопротивление отсутствует, нет ничего удивительного, что при *установившемся процессе* энергия во второй контур не поступает, — она в нем не потребляется.

Но пусть имеется сопротивление. Из математических соображений непрерывности можно заключить, что при достаточно малом сопротивлении ток мало отличен от того, который был бы без

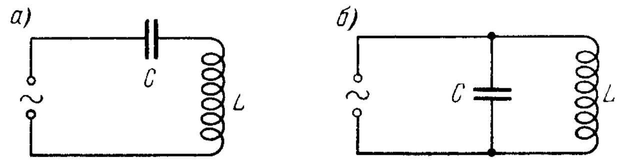

Рис. 112.

сопротивления. Пусть для простоты $L_1=0$, $C_1=\infty$ (рис. 111), т. е. речь идет о схеме рис. 112, *б*. Тогда амплитуда тока через C будет

$$I=pC\mathscr{E}. \tag{2}$$

Если сопротивление мало, то ток через L имеет амплитуду, очень близкую к этому значению. Но теперь потребляется мощность $RI^2/2$. Она откуда-то поставляется. Это возможно только благодаря тому, что есть ток во внешней цепи. Этот ток — в фазе с электровозбудительной силой (что очень легко показать), а тогда легко видеть, чему он равен:

$$\frac{RI^2}{2}=\frac{I_0\mathscr{E}}{2},$$

или на основании (2)

$$I_0=\mathscr{E}\frac{RC}{L}.$$

При малом сопротивлении ток очень мал.

Таким образом, в действительности пробка имеет конечное сопротивление, которое тем больше, чем меньше R. Если R мало, действие пробки очень острое.

На примере успокоителей особенно ясно, насколько нужно быть осторожными в вопросе о том, что́ называть парциальными частотами. Если стремиться сохранить тот результат, что успокоение наступает тогда, когда внешняя частота равна собственной частоте парциальной системы, то нужно пользоваться тем определением последней, которое мы дали.

Собственные частоты системы инвариантны по отношению к выбору координат, и, следовательно, частоты, при которых наступает резонанс, не зависят от выбора координат. Частота успокоения зависит от того, *где*, в какой координате тушится колебание. При включении внешней силы в три разные ветви (рис. 113) успокоение будет наступать при трех различных частотах внешней силы. Каждый раз это будет собственная частота контура, получающегося, если разорвать ветвь, в которую включена внешняя сила.

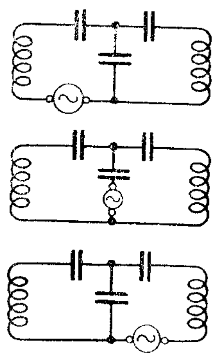

Рис 113.

Это практическое приложение подтверждает целесообразность нашего определения парциальных систем.

Когда частота внешней силы совпадает с одной из нормальных частот, происходит сильное возбуждение колебаний, наступает резонанс. Здесь есть, однако, момент, существенно отличающий системы с двумя степенями свободы от системы с одной степенью свободы. В простом контуре при $p=\omega_0$ (ω_0 — собственная частота) резонанс не наступает, только если амплитуда внешней силы равна нулю. Точно так же при двух степенях свободы резонанса не будет ни при $p=\omega_1$, ни при $p=\omega_2$, если $X=Y=0$. Это — тривиальный случай. Но в случае двух степеней свободы есть еще другой, не тривиальный, случай отсутствия резонанса при $p=\omega_1$ или $p=\omega_2$, который специфичен для систем, имеющих больше чем одну степень свободы. Выясним, когда он наступает. Согласно уравнению (5) предыдущей лекции имеем:

$$\alpha=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X & h-Hp^2 \\ Y & b-Bp^2 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Пусть p совпадает с одной из нормальных частот. Мы получаем резонанс ($\alpha=\infty$) в предположении, что детерминант в числителе не обращается в нуль. Если же он тоже равен нулю, т. е.

$$X(b-Bp^2)-Y(h-Hp^2)=0, \tag{4}$$

то α не обращается в ∞, резонанса не наступает. В случае свободных колебаний, если частота их равна p, отношение амплитуд есть

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{b - Bp^2}{h - Hp^2} = -\frac{h - Hp^2}{a - Ap^2}. \tag{5}$$

Таким образом, резонанс не наступает, несмотря на совпадение внешней частоты с нормальной частотой, если

$$X\alpha + Y\beta = 0, \tag{6}$$

где α и β — амплитуды обеих координат при соответствующем нормальном колебании.

Речь шла только об амплитуде α первой координаты. Но если p совпадает с нормальной частотой, то из (5) следует, что при условии (6) верхний детерминант в выражении для β тоже обращается в нуль и, следовательно, β также не обращается в ∞.

Мы можем рассматривать X и Y как компоненты вектора на плоскости, характеризующего распределение внешней силы, а α и β в формуле (5) — как компоненты вектора, определяющего форму нормального колебания. Условие (6) есть условие перпендикулярности (ортогональности) этих векторов. Таким образом, резонанс не наступает, если вектор, соответствующий силе, ортогонален к вектору, соответствующему собственному колебанию. В такой форме можно обобщить этот результат на n степеней свободы.

Можно избежать нежелательного резонанса, соответствующим образом распределяя искусственно силу между координатами. Для каждой нормальной частоты подбор распределения силы должен быть различным.

Все это имеет место в таком чистом виде, если нет затухания. При наличии малого затухания основные результаты — те же, но явления теряют остроту, смазываются. Резонанс устраняет бесконечности. В отсутствие затухания вычисления настолько проще, что лучше сначала все выяснить без затухания, а потом вносить поправки на затухание.

Для случая затухания уравнения Лагранжа нужно писать так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = Q_i,$$

где Q_i — сумма обобщенных внешних сил и сил трения.

Релей обратил внимание на следующее. Для сил трения или сопротивления, зависящих от скоростей, существует во многих случаях так называемая *диссипативная функция*. Это такая функция $F(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$ обобщенных скоростей, удвоенное значение которой равно количеству энергии, рассеиваемой в единицу времени на трение. При этом силы трения таковы:

$$Q_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}.$$

Если мы найдем функцию F, то мы будем знать силы трения. Обычно можно узнать, какова эта функция, из физических соображений.

Возьмем в качестве примера два индуктивно связанных электрических контура. Здесь

$$2T = L_1\dot{q}_1^2 + L_2\dot{q}_2^2 + 2M\dot{q}_1\dot{q}_2,$$

$$2U = \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2}.$$

Складывая потери в единицу времени в обоих контурах, получаем для диссипативной функции выражение

$$2F = R_1\dot{q}_1^2 + R_2\dot{q}_2^2.$$

Уравнения движения имеют теперь вид

$$\left.\begin{aligned} L_1\ddot{q}_1 + M\ddot{q}_2 + R_1\dot{q}_1 + \frac{q_1}{C_1} = 0, \\ L_2\ddot{q}_2 + M\ddot{q}_1 + R_2\dot{q}_2 + \frac{q_2}{C_2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Отличие от прежних уравнений в том, что теперь вошли первые производные $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$. Раньше переменные входили или с двумя точками, или без точек, и мы могли положить:

$$q = A\cos(\omega t + \alpha),$$

заранее зная, что косинус сократится. Теперь так не получится. Но мы можем воспользоваться решением в виде экспоненциальной функции, так как при дифференцировании она себя повторяет. Будем искать решение в виде

$$q_1 = \alpha e^{mt}, \quad q_2 = \beta e^{mt}. \tag{8}$$

Подставляя (8) в уравнения (7), получаем уравнения

$$\left.\begin{aligned}\left(L_1m^2+R_1m+\frac{1}{C_1}\right)\alpha+Mm^2\beta=0;\\ Mm^2\alpha+\left(L_2m^2+R_2m+\frac{1}{C_2}\right)\beta=0.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

Здесь неизвестны α, β и m. По отношению к α и β эти уравнения линейны. Они имеют не тривиальное решение только тогда, когда равен нулю детерминант

$$\Delta=\begin{vmatrix} L_1m^2+R_1m+\frac{1}{C_2} & Mm^2\\ Mm^2 & L_2m^2+R_2m+\frac{1}{C_2}\end{vmatrix}.\tag{10}$$

Развертывая детерминант, мы получаем для m уравнение четвертой степени:

$$m^4\left(1-\frac{M^2}{L_1L_2}\right)+m^3\left(\frac{R_1}{L_1}+\frac{R_2}{L_2}\right)+m^2\left(\frac{1}{L_1C_1}+\frac{1}{L_2C_2}+\frac{R_1R_2}{L_1L_2}\right)+$$
$$+m\left(\frac{R_1}{C_2}+\frac{R_2}{C_1}\right)\frac{1}{L_1L_2}+\frac{1}{L_1L_2C_1C_2}=0.\tag{11}$$

Когда нет трения, все просто: уравнение — биквадратное, оба его корня m^2 отрицательны, так как

$$1-\frac{M^2}{L_1L_2}>0,\quad \frac{1}{L_1C_1}+\frac{1}{L_2C_2}>0,\quad \frac{1}{L_1L_2C_1C_2}>0$$

и, следовательно,

$$m=i\omega,$$

где ω — действительная частота.

При наличии трения все очень усложняется. Решение уравнения четвертой степени — дело очень неприятное. Но сказать кое-что о корнях можно и не решая уравнения. Они — либо действительные, либо комплексные, попарно сопряженные. Если R_1 и R_2 малы, то корнями будут четыре комплексных величины:

$$m_1=\delta'+i\omega',\quad m_2=\delta'-i\omega',\quad m_3=\delta''+i\omega'',\quad m_4=\delta''-i\omega'',$$

так что частотное решение уравнений (7) имеет вид

$$q_1=\alpha' e^{\delta' t+i\omega' t},\quad q_2=\beta' e^{\delta' t+i\omega' t}.$$

Таким образом, если есть малое трение или сопротивление, то общее решение состоит из суммы двух колебаний с частотами ω' и ω'', с возрастающими или затухающими (смотря по знаку δ' и δ'') амплитудами. Весь вопрос в том, чтобы найти δ и ω. Для этого нужно решить уравнение (11). Найдя δ и ω, мы сможем из уравнений (9) определить α и β. Это нам даст величины

$$\frac{\beta}{\alpha} = k.$$

Здесь есть очень существенное отличие от случая отсутствия затухания. Там отношение k было действительной величиной, т. е. фаза нормального колебания в первой и второй координате была всегда одна и та же. Теперь отношение получается комплексным. Это означает, что есть сдвиг фаз между координатами.

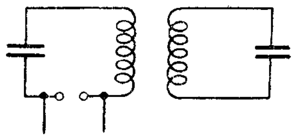

Рис. 114.

Таким образом, в случае системы с трением или сопротивлением характерным является

1) затухание колебаний,

2) сдвиг фаз между колебаниями каждой из частот в обеих координатах.

Было время, когда вопрос о затухающих колебаниях в системах с двумя степенями свободы стоял очень остро. В передатчиках использовали тогда собственные колебания связанных систем (рис. 114). Второй контур соответствует антенне. Когда искровой промежуток пробивается, контуры начинают колебаться, происходят затухающие колебания с двумя частотами. Важно было рассчитать, как зависят эти колебания от параметров контуров. Пользуясь тем, что сопротивления малы, находили приближенное решение. Теперь затухающими колебаниями почти не пользуются, и эти проблемы в значительной степени утратили интерес.

Я хотел бы обратить ваше внимание на то, как удается иногда обходить решение уравнений (ряд опытов приводит к вопросам, на которые можно ответить, не решая уравнений).

Часто важно знать интегральный эффект в первом или во втором контуре, например, какая рассеялась энергия

$$\int_0^\infty Ri^2 dt.$$

Можно найти этот интеграл, не решая уравнений. На этом примере мы увидим, в чем состоит метод.

Пусть, например, в начале ($t=0$) заряжен только первый контур и начальные условия таковы:

$$q_1=q_{10}, \quad q_2=0, \quad i_1\equiv\dot{q}_1=0, \quad i_2\equiv\dot{q}_2=0. \tag{12}$$

Умножим первое уравнение (7) на $i_1=\dot{q}_1$, второе — на $i_2=\dot{q}_2$ и сложим, а затем проинтегрируем по t от 0 до ∞. Учитывая начальные условия (12), мы получаем:

$$\int_0^\infty R_1 i_1^2 dt + \int_0^\infty R_2 i_2^2 dt = \frac{q_{10}^2}{2C_1}.$$

Физический смысл здесь ясен: первоначально сообщенная энергия равна потребленной энергии. Интерес представляет применение этого метода к электродинамометру[1]. Если по обмоткам пропускаются токи i_1 и i_2, то вращательный момент пропорционален величине

$$\int_0^\infty i_1 i_2 dt.$$

Важно знать, при каких условиях этот момент будет равен нулю. Это будет, оказывается, при любых R_1 и R_2, если

$$L_1C_1=L_2C_2.$$

Этот результат далеко не тривиален.

Ряд подобных вопросов удается решить именно таким способом. Очень часто при рассмотрении затухающих колебаний приходится пользоваться приближенными методами. Метод, о котором сейчас шла речь, является не приближенным, а точным.

Затухающие колебания отжили свой век в радиотехнике, но жаль забыть некоторые замечательные проблемы, на решение которых было затрачено много остроумия.

В самом начале в передатчиках применялся простой контур (рис. 115). Это очень невыгодно. Передатчик должен решать две задачи: первая — генерация, вторая — излучение. Их нерационально решать в одном контуре. Поэтому были введены системы с двумя

[1] [Ср. том I, стр. 173, а также 12-ю лекцию.]

степенями свободы (в одном из контуров можно создать большую емкость и накопить много энергии).

Энергия перекачивается из одного контура в другой, возникают два колебания с разными частотами. При приеме на резонанс это нежелательно. Требование техники состояло в том, чтобы избежать в таком передатчике „двуволнистости". Но она органически связана с наличием двух степеней свободы. Ф. Браун предложил остроумный метод. Его идея заключалась вот в чем: надо убрать первый контур в тот момент, когда вся энергия перекачается во второй. Но как это сделать? Много труда было затрачено на решение этой задачи. М. Вину удалось найти новое физическое явление, решившее вопрос.

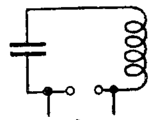

Рис. 115.

Вин создал очень малый разрядный промежуток, примерно в 0,1 мм. Когда в нем наступает пробой, он становится проводником. Но можно подобрать такие условия, при которых разрядный промежуток теряет свою проводимость, если ток становится очень слабым. Это достигается охлаждением. Тогда первый контур размыкается сам собой, автоматически, как только амплитуда его колебаний становится очень малой, и обратной перекачки энергии не происходит.

При этом среди радиоспециалистов возникли первые разговоры о проводниках, не подчиняющихся закону Ома. Уже здесь стало видно, насколько нелинейные системы — системы, не подчиняющиеся закону Ома, — существенны для радиотехники.

ДВАДЦАТЬ ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(6/IV 1931 г.)

Затухающие колебания системы с двумя степенями свободы. Оптические применения теории связанных колебаний. Примеры систем с бо́льшим числом степеней свободы. Самовозбуждение систем с произвольным числом степеней свободы; условия Раута—Гурвица. Случай кратных корней; ошибка Лагранжа.

Введем новые обозначения, которые нам понадобятся для систем с n степенями свободы. Будем обозначать координаты буквой q с индексом наверху, а нормальные колебания, как прежде, — индексом внизу.