степенями свободы (в одном из контуров можно создать большую емкость и накопить много энергии).

Энергия перекачивается из одного контура в другой, возникают два колебания с разными частотами. При приеме на резонанс это нежелательно. Требование техники состояло в том, чтобы избежать в таком передатчике „двуволнистости". Но она органически связана с наличием двух степеней свободы. Ф. Браун предложил остроумный метод. Его идея заключалась вот в чем: надо убрать первый контур в тот момент, когда вся энергия перекачается во второй. Но как это сделать? Много труда было затрачено на решение этой задачи. М. Вину удалось найти новое физическое явление, решившее вопрос.

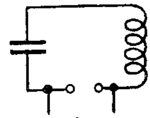

Рис. 115.

Вин создал очень малый разрядный промежуток, примерно в 0,1 мм. Когда в нем наступает пробой, он становится проводником. Но можно подобрать такие условия, при которых разрядный промежуток теряет свою проводимость, если ток становится очень слабым. Это достигается охлаждением. Тогда первый контур размыкается сам собой, автоматически, как только амплитуда его колебаний становится очень малой, и обратной перекачки энергии не происходит.

При этом среди радиоспециалистов возникли первые разговоры о проводниках, не подчиняющихся закону Ома. Уже здесь стало видно, насколько нелинейные системы — системы, не подчиняющиеся закону Ома, — существенны для радиотехники.

ДВАДЦАТЬ ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(6/IV 1931 г.)

Затухающие колебания системы с двумя степенями свободы. Оптические применения теории связанных колебаний. Примеры систем с бо́льшим числом степеней свободы. Самовозбуждение систем с произвольным числом степеней свободы; условия Раута—Гурвица. Случай кратных корней; ошибка Лагранжа.

Введем новые обозначения, которые нам понадобятся для систем с n степенями свободы. Будем обозначать координаты буквой q с индексом наверху, а нормальные колебания, как прежде, — индексом внизу.

Общее решение уравнений линейной системы с двумя степенями свободы с учетом затухания мы запишем теперь в таком виде:

$$q^{(1)} = R_1^{(1)} C_1 e^{-\delta_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1^{(1)} + \psi_1) + R_2^{(1)} C_2 e^{-\delta_2 t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2^{(1)} + \psi_2);$$

$$q^{(2)} = R_1^{(2)} C_1 e^{-\delta_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1^{(2)} + \psi_1) + R_2^{(2)} C_2 e^{-\delta_2 t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2^{(2)} + \psi_2).$$

Структура самой системы задает частоты и затухания колебаний, а также коэффициенты распределения амплитуд $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ (они написаны теперь в нормировке, отличной от прежней) и сдвиги фаз $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ между координатами. Величины C_1, C_2, ψ_1, ψ_2 — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями.

Существенно новое по сравнению с системой без затухания состоит здесь в том, что система задает сдвиги фаз между координатами.

Двадцать лет тому назад, до электронных ламп, когда приходилось работать с затухающими колебаниями, имело смысл подробно рассказывать о приближенных способах вычисления частот и затуханий в системе с двумя степенями свободы. Теперь это не имеет смысла, но несколько слов все же следует сказать.

Пусть у нас два индуктивно связанных контура со слабым затуханием. Частоты можно рассчитывать так, как будто нет затухания, так как оно влияет на частоты лишь во втором порядке. Затухание колебаний связанной системы зависит от затухания каждой парциальной системы в отдельности. При слабой связи величины δ_1 и δ_2 близки к тем затуханиям, которые каждый контур имел бы сам по себе. Когда связь сильна, положение несколько другое.

Задача о двух связанных системах имеет очень существенное значение в оптике.

Мы представляем себе, что в каждой молекуле газа находится оптический резонатор с определенной частотой ν. Свечение газа объясняется тем, что резонаторы колеблются с определенной частотой и газ испускает свет этой частоты.

Пусть теперь на газ падает извне световая волна. Под действием этой волны резонаторы приходят в колебания и поглощают энергию. Если период падающей волны и период собственных колебаний не совпадают, резонаторы колеблются слабо и поглощают мало. Если же периоды совпадают, то они колеблются сильно (резонанс) и поглощают много энергии. В этом заключается смысл закона Кирхгофа.

Преломление объясняется следующим образом. Когда резонатор колеблется под действием падающей волны, то он сам излучает. То, что мы видим, — это тот свет, который прошел сквозь газ, плюс вторичное излучение, которое испустили резонаторы под влиянием падающего света. Если подсчитать результат такого сложения, то как раз получается правильное значение показателя преломления [1].

Как объяснить, что в плотном газе наблюдается расширение спектральных линий, расплывание частоты? Исходя из только что указанных представлений, мы получаем очень простой ответ: когда резонаторы сближены, они образуют связанную систему. Такая система имеет ряд различных нормальных частот. Частоты испускаемого света соответствуют этим нормальным частотам. Таким образом, сюда прямо переносится то, что мы знаем о связанных системах. В настоящее время известно, что модель простого классического резонатора здесь непосредственно неприменима; атом гораздо сложнее. Но все черты резонансной теории, в сущности, сохраняются и в современной теории. Поведение атома под действием внешней силы чрезвычайно близко к тому, что мы знаем из классической модели простого резонатора. Многие основные черты старой интерпретации дисперсии, абсорбции, испускания света сохранились и в новой теории.

Перейдем к системам с n степенями свободы ($n > 2$).

Вал с двумя шкивами [2] является системой с двумя степенями свободы, но в действительных машинах бывает большее число шкивов. Иногда говорят: зачем рассматривать общий случай n степеней свободы, — он практически не встречается, достаточно рассмотреть 2, 3, 4 степени свободы. Это неправильно. Есть много случаев, когда необходимо рассматривать большое число степеней свободы. Правда, в обычных передатчиках устройства, имеющие больше чем три контура, редко встречаются. Но в фильтрах бывает 5—10 ячеек.

Теория колебаний систем с n степенями свободы интересна, в частности, в связи с вопросами структуры твердых тел и в особенности кристаллов [3].

---

[1] [См. том I, стр. 112 и след.]

[2] [См. 24-ю лекцию.]

[3] [См. 29-ю и 30-ю лекции.]

Рассмотрим систему с n степенями свободы, характеризуемую тремя квадратичными формами: кинетической энергией, диссипативной функцией и потенциальной энергией:

$$\left.\begin{aligned} 2T &= \sum_{i,k} a_{ik}\dot{q}^{(i)}\dot{q}^{(k)}, \\ 2F &= \sum_{i,k} b_{ik}\dot{q}^{(i)}\dot{q}^{(k)}, \\ 2U &= \sum_{i,k} c_{ik}q^{(i)}q^{(k)}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причем

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad b_{ik} = b_{ki}, \quad c_{ik} = c_{ki}.$$

Уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{(i)}}\right) + \frac{\partial U}{\partial q^{(i)}} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^{(i)}} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(без внешних сил) для такой системы имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik}\ddot{q}^{(k)} + b_{ik}\dot{q}^{(k)} + c_{ik}q^{(k)}\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Требуется решить эту систему дифференциальных уравнений.

Сделав подстановку

$$q^{(k)} = A^{(k)}e^{\lambda t}, \tag{3}$$

мы получаем систему алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik}\lambda^2 + b_{ik}\lambda + c_{ik}\right) A^{(k)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Неизвестными являются λ и $A^{(k)}$. Система линейна и однородна по отношению к $A^{(k)}$. Она имеет решения, отличные от нуля, только если детерминант

$$\Delta(\lambda) = 0, \tag{5}$$

или более подробно

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11} \ldots a_{1n}\lambda^2 + b_{1n}\lambda + c_{1n} \\ a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21} \ldots a_{2n}\lambda^2 + b_{2n}\lambda + c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\lambda^2 + b_{n1}\lambda + c_{n1} \ldots a_{nn}\lambda^2 + b_{nn}\lambda + c_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. только при определенных λ. Найдя корень детерминанта $\Delta(\lambda)$, мы подставим его в уравнения (4) и найдем затем значения всех $A^{(k)}$.

Уравнение (5) есть уравнение степени $2n$. Оно имеет $2n$ корней. Можно удовлетворить уравнениям движения (2), подставив в (4) первый корень уравнения (5) и найдя соответствующие $A^{(k)}$, а также подставив второй корень уравнения (5) и найдя соответствующие $A^{(k)}$, и т. д. Мы получим таким образом $2n$ частных решений системы (2):

$$q_1^{(k)} = A_1^{(k)} e^{\lambda_1 t}, \quad q_2^{(k)} = A_2^{(k)} e^{\lambda_2 t}, \ldots, \quad q_{2n}^{(k)} = A_{2n}^{(k)} e^{\lambda_{2n} t} \tag{6}$$

Если отдельные частные решения (6) линейно независимы, то общее решение будет

$$q^{(k)} = \sum_{i=1}^{2n} C_i A_i^{(k)} e^{\lambda_i t} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

где C_i — произвольные постоянные. (Общее решение системы $2n$ уравнений второго порядка содержит $2n$ независимых произвольных постоянных).

Система имеет n степеней свободы. Начальные условия задаются значениями n координат и n скоростей. В решении (7) можно подобрать C_i так, чтобы удовлетворить любым начальным условиям.

Кинетическая энергия всегда положительна; потенциальная энергия при колебаниях около устойчивого положения равновесия тоже положительна. Если колебания сопряжены с развитием тепла, то диссипативная функция тоже положительна.

Корни уравнения (5) могут быть действительными или комплексными. Так как коэффициенты уравнения (5) действительны, то комплексные корни являются попарно сопряженными. Можно доказать, что в случае, когда все три квадратичные формы (1) дефинитны и положительны, действительные корни отрицательны, а действительные части всех комплексных корней отрицательны или равны нулю.

Действительным корням соответствуют частные решения (3) вида

$$e^{-\delta t} \quad (\delta > 0),$$

т. е. апериодическое стремление координат к нулю.

Пусть уравнение (5) имеет комплексные корни

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\delta + i\omega,\\ \lambda_1^* &= -\delta - i\omega,\end{aligned} \quad (\delta > 0). \tag{8}$$

Если при $\lambda = \lambda_1$ уравнения (4) имеют решения $A^{(k)}$, то при $\lambda = \lambda_1^*$ они имеют решения $A^{(k)*}$. Поэтому частным решением уравнений (2) является действительная функция

$$q^{(k)} = \alpha A^{(k)} e^{(-\delta + i\omega)t} + \alpha^* A^{(k)*} e^{(-\delta - i\omega)t}, \tag{9}$$

где α — произвольная комплексная постоянная.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} A^{(k)} &= R^{(k)} e^{i\varphi^{(k)}}, & R^{(k)} &= |A^{(k)}|,\\ \alpha &= Ce^{i\psi}, & C &= |\alpha|.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

В результате несложных выкладок из (9) и (10) получается

$$q^{(k)} = R^{(k)} C e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi^{(k)} + \psi).$$

Пусть все корни уравнения (5) комплексные. Тогда

$$q^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} R_j^{(k)} C_j e^{-\delta_j t} \cos(\omega_j t + \varphi_j^{(k)} + \psi_j) \tag{11}$$

есть общее решение системы (2), так как оно содержит $2n$ независимых произвольных постоянных C_j, ψ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Физический смысл его следующий: изменение каждой координаты есть сумма n колебаний, вообще говоря, затухающих. Абсолютные амплитуды и абсолютные фазы суть произвольные, зависящие от начальных условий, постоянные. Что же касается относительных амплитуд и фаз, то они строго определены самой системой. Часто забывают, что относительные фазы здесь задаются системой.)

То, что я здесь говорил о корнях уравнения (5), изложено в весьма изящной форме у Гельмгольца, в томе его „Теоретической физики“, посвященном акустике[1].

В настоящее время наибольший интерес для нас представляет вопрос совсем другого характера — вопрос о возникновении и самовозбуждении колебаний. Есть системы, для которых мы

[1] [H. v. Helmholtz. Vorlesungen über theoretische Physik, т. III, § 19 и § 21. Лейпциг, 1898.]

приходим к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, но где отнюдь не сказано, что происходят потери энергии: в этих системах могут быть и отрицательные сопротивления. Для схем, содержащих контуры и лампы, уравнение (5) может иметь положительные корни, а также комплексные корни с положительной действительной частью. Если хотя бы один корень λ положителен или имеет положительную действительную часть, состояние равновесия неустойчиво, система удаляется от него (самовозбуждается).

Поставим вопрос о том, каковы условия устойчивости и неустойчивости равновесия в системе, описываемой системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Это важно, в частности, для нахождения условий самовозбуждения лампового генератора, так как при учете сеточного тока задача уже не сводится на рассмотрение системы с одной степенью свободы[1].

Заметим, что положительная дефинитность функции F — достаточное, но не необходимое условие устойчивого равновесия системы, описываемой уравнениями (2).

Пусть дана система m линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. К такой системе можно привести нашу систему из линейных уравнений второго порядка, причем $m = 2n$, где n — число степеней свободы. Решая ее подстановкой (3), мы придем к детерминантному уравнению m-ой степени, которое мы запишем теперь так:

$$a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_m = 0. \tag{12}$$

Требуется указать необходимые и достаточные условия того, чтобы все корни этого уравнения имели отрицательные действительные части (случай, когда действительная часть какого-нибудь корня равна нулю, мы не рассматриваем). Такой критерий существует. Он был дан сначала Раутом, а затем — в особо изящной форме — Гурвицем. Я приведу его без доказательства. Строгое доказательство имеется в ряде книг. Оно довольно длинное, хотя и значительно упрощено по сравнению с первоначальным.

Пусть

$$a_0 > 0.$$

---

[1] [См. 13-ю и 14-ю лекции.]

Это условие не нарушает общности, так как при $a_0 < 0$ мы можем умножить уравнение (12) на -1. Напишем детерминанты:

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots \tag{13}$$

$$D_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0\ldots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1\ldots 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{2m-1} & \ldots & \ldots 0 \end{vmatrix}.$$

Элементы детерминантов с индексами, превышающими m, здесь надо полагать равными нулю (они вводятся для удобства записи и легкого запоминания).

Необходимое и достаточное условие того, что все корни уравнения (12) имеют отрицательные действительные части (сюда входят и действительные отрицательные корни), состоит в том, чтобы все эти детерминанты были положительны:

$$D_j > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{14}$$

При развертывании детерминантов все сильно упрощается вследствие того, что многие элементы равны нулю.

Пусть, например, $m = 3$. Условия (13) принимают вид

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \quad a_3 > 0.$$

В случае n степеней свободы характеристическое уравнение порядка $m = 2n$. Какому же физическому случаю соответствует $m = 3$? Случаю двух степеней свободы, из которых одна — вырожденная. Такой случай мы встречаем в простейшем генераторе (рис. 43), когда принимаем во внимание сеточный ток. Здесь можно говорить, что число степеней свободы равно полутора.

Если мы хотим получить самовозбуждение, то надо нарушить хотя бы одно из условий (13). Если мы хотим иметь усилитель, то ни одно из них не должно быть нарушено. Условия (13) используются также при исследовании вопросов устойчивости регуляторов. В сущности, там имеет место то же самое, что и в электрических усилителях. В настоящее время знание условий устойчивости (13) совершенно необходимо. Они завоевали огромное место в технических расчетах.

Вернемся к системе без затухания. Разберем вопрос, имеющий интересную историю, который часто ставит начинающих втупик. Его разъяснение имеет серьезное педагогическое значение. В общем решении

$$q^{(k)}=\sum_{j=1}^{n} C_j A^{(k)} \cos(\omega_j t+\varphi_j) \tag{15}$$

уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{q}^{(k)}+c_{ik}q^{(k)})=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

имеется $2n$ произвольных постоянных. Они определяются из уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (-\omega^2 a_{ik}+c_{ik}) A^{(k)}=0. \tag{17}$$

Пусть детерминантное уравнение для ω^2 имеет равные корни; например

$$\omega_1=\omega_2.$$

Тогда

$$C_1A_1^{(k)}\cos\omega_1 t+C_2A_2^{(k)}\cos\omega_2 t=(C_1+C_2)A_1^{(k)}\cos\omega_1 t.$$

Эта уже не сумма двух независимых решений. C_1 и C_2 теперь не независимые произвольные постоянные интеграции. Если два корня равны, то теряется одна постоянная интегрирования, а это значит, что (15) не есть общее решение. Каково же теперь общее решение? На этот вопрос Лагранж дал следующий ответ: в случае, когда имеется два равных корня $\omega_1=\omega_2$, уравнения (16) имеют еще частное решение вида

$$t\cos\omega_1 t;$$

если имеется три равных корня $\omega_1=\omega_2=\omega_3$, система (16) имеет решение, содержащее член с множителем t^2, и т. д. При этом Лагранж сказал примерно следующее: так как этот вопрос нас не очень интересует, то мы не будем в него углубляться.

На то, что утверждение Лагранжа ошибочно, указал Вейерштрасс. Дело заключается вот в чем. В случае кратных корней характеристического уравнения система вида (16) имеет „обычно" решение с множителями t, t^2 и т. д. Но мы имеем дело с *особым* случаем системы линейных дифференциальных уравнений: вследствие того, что система (16) происходит от дифференцирования квадратичных форм, она обладает определенными свойствами симметрии ($a_{ik}=a_{ki}$, $c_{ik}=c_{ki}$). В этом особом случае система дифференциальных уравнений имеет *и при наличии кратных корней* уравнения для ω^2 *только* решение вида $\cos\omega t$.

Но как же в таком случае получить при наличии кратных корней частные решения в достаточном числе для построения общего решения? Ответ здесь такой.

В случае простого корня ω_1, если выбрана одна из амплитуд $A_j^{(k)}$, скажем $A_1^{(k)}$, то все остальные $A^{(k)}$ этим вполне определены. Но система линейных однородных уравнений, детерминант которой равен нулю, однозначно определяет отношения неизвестных не всегда, а только если не все миноры этого детерминанта равны нулю. Поясним это на примере.

Рассмотрим систему ($n=3$)

$$a_1x+b_1y+c_1z=0,$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=0,$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=0.$$

Пусть детерминант системы равен нулю. Если не все миноры равны нулю, то третье уравнение есть следствие первых двух и первые два уравнения однозначно определяют отношения x/z, y/z. Если же все миноры равны нулю, то второе и третье уравнения являются следствием первого, и, таким образом, мы имеем для трех неизвестных одно уравнение. Можно задать произвольно *две* из величин x, y, z.

Именно такой случай имеет место для системы (17) при подстановке в нее значения ω^2, являющегося кратным корнем ее детерминантного уравнения. Здесь можно задать произвольно две амплитуды, скажем $A_1^{(1)}$ и $A_1^{(2)}$. Благодаря этому получается требуемое число постоянных интегрирования.