

КОЛЕБАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ

(19/XI 1931 г.)

Теория относительности утверждает, что не существует абсолютно твердых тел. Различные подходы к задаче о колебаниях твердого тела. Предельный переход к сплошной среде в решении задачи об одномерной упругой цепочке. Вывод уравнения стержня из теории континуума. Замечания о понятии скорости волны. Производная для данного места и для данной частицы. Изотермический и адиабатический модули Юнга.

Теория относительности принципиально не допускает существования абсолютно твердого тела. Мы знаем, что ни один сигнал не может распространяться со скоростью большей, чем скорость света в вакууме. Это было бы не так, если бы существовало абсолютно твердое тело: перемещение твердого тела как целого можно рассматривать как сигнал, который мгновенно передается по телу. Если тело не абсолютно твердое, то при смещении одного его конца (в сторону другого конца) возникает сгущение, которое будет распространяться с определенной скоростью.

Состояние деформированного „твердого“ тела не может быть описано с помощью конечного числа параметров. На первый взгляд это несколько трудно соединить с представлением о молекулярной структуре тела.

Колебания сплошной среды играют важную роль в физике и ее приложениях. Возьмем вопрос о колебаниях струн в акустике. Это по многим соображениям — один из основных вопросов для нас, в частности потому, что в истории науки большую роль сыграли математические вопросы, связанные со струной. Борьба между различными взглядами на функцию развивалась как раз в связи с уравнением колебаний струны¹.

¹ [См. 5-ю лекцию части II.]

Струна, стержень — это распределенные системы в одном измерении. Есть и двухмерные системы. С ними мы имеем дело при изучении колебаний пластин и мембран. Важны и трехмерные распределенные системы.

Большое значение имеют задачи о колебании балки, о крутильных колебаниях валов. Затем идут вопросы, связанные с мостами. В первом приближении можно рассматривать мост как стержень. Далее идут вибрации корабля, колебания турбинных лопаток и т. д.

Другой круг вопросов — электрические распределенные системы, например лехерова система. Теория колебаний распределенных систем охватывает и вопросы, связанные с антеннами беспроводного телеграфа.

Динамика сплошного тела — это вопросы распространения колебаний. В случае электрических колебаний мы тоже имеем дело с вопросами распространения в сплошной среде.

Все эти вопросы представляют и чисто математический интерес. Физика дала громадный толчок математике. Именно в связи с задачами о колебаниях сплошной среды развились интегральные уравнения, отсюда же возникла теория разложения в ряды Фурье. В связи с этими задачами Бернулли первый сказал, что произвольную функцию можно разложить в тригонометрический ряд.

Мы не сможем здесь коснуться и малой доли всех вопросов. В частности, мы почти не будем касаться вопросов распространения, хотя они имеют очень большое значение.

Поясним на примере физическую постановку задач, относящихся к колебаниям в сплошной среде.

Пусть имеется стальной стержень и мы хотим изучить его динамику. Мы знаем, что все тела состоят из молекул. Кажется бы, проще всего разобрать вопрос с молекулярной точки зрения: даны силы, действующие между молекулами; требуется найти, как происходят колебания стержня. Этот путь в настоящее время невозможен по многим причинам, хотя бы по следующей. Для изучения молекулярного механизма нужна волновая механика, но попробуйте рассчитать задачу о 10^{21} телах!

Второй путь заключается в следующем. Мы рассматриваем тела с молекулярной точки зрения. Например, кристалл каменной соли мы рассматриваем как кристаллическую решетку, построенную из ионов хлора и ионов натрия. Но мы можем идеализировать силы и решать задачу так, как будто атомы или ионы в решетке

кристалла действуют друг на друга с определенными квазиупругими силами. Это — некоторый средний путь.

Есть еще третий путь. Тело рассматривается как сплошное. Считается, что плотность, упругость — непрерывные функции точки. Другими словами, мы идеализируем рассматриваемое тело как сплошное и применяем к нему математический аппарат непрерывных функций. Такая „сплошизация“ задачи применяется и при построении макроскопической электродинамики Максвелла на основе электронной теории Лоренца.

Здесь нужно быть иногда очень осторожными. Спросим себя например, что такое плотность в данной точке? Чтобы получить плотность, берут массу m и делят ее на объем V .

Если мы будем уменьшать объем, то будем получать различные значения частного. Можно искать предел

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{m}{V}.$$

Если бы вещество было сплошным, то, взяв достаточно малый объем и уменьшив его вдвое, мы получили бы практически неизменное отношение m/V . Но мы знаем, что вещество не сплошное. Пусть объем V такой, что в нем содержится только одна молекула. Что будет, если мы его уменьшим вдвое? Ни о каком пределе здесь говорить нельзя. Однако, если V не слишком велико и не слишком мало, то отношение m/V будет приблизительно постоянным, при условии, что состояние тела заметно изменяется лишь на расстояниях, больших по сравнению с расстояниями между молекулами. В кристаллах физики интересуются и такими процессами, где изменение состояния происходит на расстояниях, сравнимых с расстояниями между молекулами (высокие собственные частоты колебаний кристаллической решетки). Но мы будем заниматься только такими процессами, где этого еще нет.

Повторим кое-что, относящееся к колебаниям цепочки из дискретных частиц, имеющих одинаковую массу.

Отклонение k -той частицы (y_k) удовлетворяет уравнению

$$m \frac{d^2 y_k}{dt^2} = \alpha [(y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})] \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

В правой части стоит разность сил

$$f = \alpha \Delta a, \quad (2)$$

действующих справа и слева (a — расстояние между соседними частицами). Здесь возможны n колебаний:

$$y_k = A_s \sin \frac{ks\pi}{n+1} \cos(\omega_s t + \varphi_s) \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

причем их частоты даются формулой

$$\omega_s = 2\sqrt{\frac{\alpha}{m}} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)} \quad (4)$$

(имеется n различных частот).

Существенно то, что в выражения для амплитуд и частот входят молекулярные свойства, свойства отдельных частиц. Если общая масса и длина цепочки не изменяются, но молекулярные константы α и m , скажем, уменьшатся вдвое, то результаты (3) и (4) изменятся.

Выразим макроскопические постоянные через молекулярные.

Масса ρ' на единицу длины есть

$$\rho' = \frac{nm}{l} = \frac{m}{a}$$

(l — длина цепочки), так как $l = na$.

Если приложить силу f к концу стержня, то он растянется на некоторое Δl , причем

$$f = E' \frac{\Delta l}{l}, \quad (5)$$

где E' — „модуль упругости континуума“. Относительное удлинение стержня $\Delta l/l$ равно относительному удлинению каждой „ячейки“. Поэтому, сравнивая (2) и (5), получаем:

$$\alpha = \frac{E'}{a}.$$

Рассмотрим случай, когда отношение s/n мало.

Пусть мы имеем одномерную модель действительного кристалла. Здесь n — порядка 10^9 или 10^{10} . Если даже $s = 1000$ или $s = 10000$, то отношение s/n еще чрезвычайно мало.

В акустике требование малости отношения s/n ограничивает нас довольно мало. Например, в случае стержня на опыте дальше определенного s идти нельзя.

Для малых s/n формула (4) вырождается в следующую:

$$\omega_s = \frac{s\pi}{l} \sqrt{\frac{E'}{\rho'}}.$$

Таким образом, в выражение для частот низких тонов входят только макроскопические величины.

Перейдем к амплитудам. На основании (3), пренебрегая отличием между n и $n + 1$, имеем для амплитуды y_k в s -ом колебании:

$$A_s \sin \frac{ks\pi a}{na} = A_s \sin \frac{s\pi x}{l}.$$

Сюда входит $x = ka$ — расстояние k -той точки от начала. Справа стоит функция от x . В случае дискретной системы она имеет смысл только для определенных (дискретных) значений x . В сплошной системе она имеет смысл для непрерывно меняющегося x ; здесь она определена для любого x , и

$$y(x, t) = A_s \sin \frac{s\pi x}{l} \cos(\omega_s t + \varphi_s).$$

Итак, сначала у нас было n функций $y_k(t)$, определенных для дискретных значений k . Они удовлетворяли обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка. Теперь (при сплошности) у нас одна функция $y(x, t)$ от двух непрерывно меняющихся переменных. Во что обращаются дифференциальные уравнения? Легко видеть, что теперь имеется дифференциальное уравнение, связывающее производную от функции $y(x, t)$ по x и ее производную по t . Вот это уравнение:

$$\frac{E'}{\rho'} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (6)$$

При переходе к сплошной системе мы получаем, таким образом, одно дифференциальное уравнение, но в частных производных. В том, что наше $y(x, t)$ удовлетворяет уравнению (6), легко убедиться простой подстановкой.

Пусть, например, $s = 2$. В этом случае частота

$$\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E'}{\rho'}}.$$

Умножив ν_2 на длину волны $\lambda_2 = l$, получим:

$$\nu_2 \lambda_2 = \sqrt{\frac{E'}{\rho'}}.$$

Иногда вводят вместо линейной плотности ρ' обычную плотность (на единицу объема):

$$\rho = \frac{\rho'}{q}$$

(q — площадь поперечного сечения), причем

$$Eq = E'$$

(E — модуль Юнга). Мы можем написать вместо (6):

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

где

$$a = \sqrt{\frac{E'}{\rho'}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Всюду пишут: a есть скорость распространения колебаний, так как скорость распространения волн есть

$$v = \lambda \nu.$$

Но я хотел бы здесь предостеречь от ошибок. Что такое скорость? Какое отношение имеют друг к другу величины v и a ? На первый взгляд — никакого, так как в рассматриваемой задаче нет распространения; речь идет о стоячих волнах.

Понятие скорости нельзя без критики применять к волновому движению, нужно точно определить, что под ним понимается. Скорость движения волн есть нечто принципиально другое, чем скорость движения частицы (хотя и есть некоторая связь между этими двумя понятиями). Когда без критики отождествляли эти два понятия, то наталкивались на неприятности. Нет скорости волны *вообще*. Можно говорить, например, о *фазовой* скорости, о скорости *фронта*, о *групповой* скорости. Вот уже три различные понятия скорости волн, а для частиц достаточно одного. В случае волнового движения с понятием скорости нужно быть осторожным.

Вернемся к разбираемому вопросу. Мы исходили из дискретной системы, путем предельного перехода в решении пришли к определенному решению для сплошной среды и убедились дифференцированием, что оно удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению.

Часто поступают иначе (это делается во многих учебниках): вместо перехода к пределу в решениях стремятся провести предельный переход от самих уравнений дискретной системы к уравнению в частных производных. Делается это так.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{E'}{\rho' a^2} [(y_{x+a} - y_x) - (y_x - y_{x-a})] \quad (7)$$

(k -тая точка находится на расстоянии x от начала). Делают фокус: разлагают $y_{x\pm a}$ по формуле Тэйлора:

$$y_{x+a} - y_x = y' a + y'' \frac{a^2}{2} + y''' \frac{a^3}{6} + \dots, \quad y_{x-a} - y_x = -y' a + y'' \frac{a^2}{2} - \dots$$

Если сложить эти выражения, подставить в (7) и отбросить малые величины, то получится уравнение (6).

Но в исходном уравнении (7) функция y определена лишь для дискретных точек, и, следовательно, у нее нет производных по x ! Дифференцирование по x — очень сомнительный прием, хотя и дающий верный результат. Его оправдание связано с тем, что непрерывную функцию можно определить ее значениями во всех рациональных точках. Если функцию, заданную в рациональных точках, мы заменяем непрерывной функцией, то эта функция — единственная.

Впрочем, в физике всюду приходится делать такие вещи.

После того как мы себе уяснили связь между „дискретным“ и „сплошным“ подходом, постараемся рассмотреть всю проблему с самого начала со „сплошной“ точки зрения.

Вырежем кусок стержня — элемент длины (рис. 137). Одно из основных утверждений теории упругости состоит в том, что силы, действующие на него со стороны остальной части тела, могут быть заменены поверхностными силами (это совершенно не очевидно). Между деформациями и этими силами существует определенная зависимость. Для не очень больших деформаций имеет место пропорциональность, т. е. закон Гука. Пусть произошла какая-то деформация. Благодаря деформации возникает напряжение. Сила, действующая на сечение x , будет

$$f_x = \left(qE \frac{\partial y}{\partial x} \right)_x;$$

сила, действующая на сечение $x + \Delta x$, будет

$$f_{x+\Delta x} = \left(qE \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}.$$

Их результирующая F равна произведению массы выделенного элемента на его ускорение:

$$F = \left(qE \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(qE \frac{\partial y}{\partial x} \right)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(qE \frac{\partial y}{\partial x} \right) \Delta x = \rho \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Кроме сил упругости, могут быть и другие, например внешние объемные силы. Обозначим через $f(x, t)$ объемную силу, действующую на единицу массы. Тогда на кусок Δx действует объемная сила $f(x, t)\rho q\Delta x$. Прибавляя ее к F и сокращая на Δx , получаем уравнение

$$f(x, t)\rho q + \frac{\partial}{\partial x} \left(qE \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \rho q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (8)$$

В нашем рассуждении не требуется, чтобы E , ρ и q были постоянными. Можно было бы рассмотреть неоднородный стержень

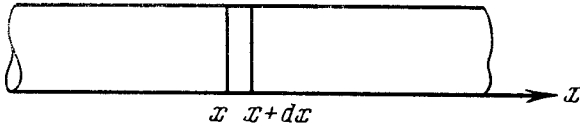


Рис. 137.

и в молекулярном представлении, считая, что упругости пружин и массы меняются с номером по определенному закону. Но там это очень сильно усложнит дело.

Предположим для начала, что q , E и ρ постоянны. В этом случае (8) превращается в

$$f(x, t) + a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (9)$$

Сделаем два небольшие замечания (часто забывают о существенных в данном вопросе вещах, забывают о сделанных ограничениях и в результате сталкиваются с неприятностями).

1. У нас y — функция от x и от t . Как нужно понимать частную производную по t ? Она характеризует изменение по t для данного x . Это — производная в *данном месте*. Но законы Ньютона относятся к данной частице, а не к данному месту. По смыслу законов Ньютона, когда мы составляем производную по времени, мы должны следить за определенной частицей; для того, чтобы получить ускорение, мы должны взять скорость в момент t и в момент $t + \Delta t$ для одной и той же частицы. Производная, взятая для данной частицы, и производная в данной точке пространства — не одно и то же. Соотношение между производ-

ной по времени для данной частицы $D\varphi/Dt$ и производной в данной точке пространства $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ таково:

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\mathbf{u}, \text{grad } \varphi). \quad (10)$$

Здесь имеется член, содержащий скалярное произведение скорости на градиент φ . При малых колебаниях — это член второго порядка, в чем и лежит оправдание проявленной нами „ловкости рук“.

Уравнения Ньютона инвариантны по отношению к галилеевой группе преобразований. Волновое уравнение по отношению к ней *не* инвариантно. Оно инвариантно по отношению к преобразованию Лоренца. Но мы вывели волновое уравнение из уравнений Ньютона, и поэтому оно, казалось бы, должно быть инвариантно по отношению к преобразованию Галилея. Противоречие связано как раз с отбрасыванием члена $(\mathbf{u}, \text{grad } \varphi)$.

2. Мы считали, что стержень обладает вполне определенным модулем Юнга. Но на самом деле модуль Юнга зависит от температуры. Из термодинамики следует, что при упругих деформациях температура меняется и при этом модуль Юнга изменяется. Он *принципиально* не является постоянной величиной. Можно рассматривать два крайних случая. Во-первых, случай очень медленных деформаций, происходящих при постоянной температуре (происходит выравнивание температуры с окружающей средой). Вещество имеет при этом некоторый определенный модуль Юнга. Во-вторых, случай настолько быстрых деформаций, что стержень не успевает отдавать тепло внешней среде. Тогда вещество имеет другой модуль Юнга.

Обычно в твердых телах ни то, ни другое неправильно, но, к счастью, зависимость модуля Юнга от температуры ничтожна; она особенно значительна в газах.