ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(29/XI 1931 г.)

Уравнения гидродинамики и вывод из них волнового уравнения. Определение понятия скорости волны. Скорость звука в газах по Ньютону и по Лапласу. „Элементарный вывод" уравнений двухпроводной электрической линии. Критика этого вывода. Правильная постановка задачи на основе теории Максвелла.

В прошлый раз мы получили для колебаний стержня уравнение

$$f(x,\ t)\rho q+\frac{\partial}{\partial x}\left(Eq\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\rho q\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\ . \tag{1}$$

Нужно помнить, что это уравнение справедливо лишь приближенно, при условии, что y (отклонение от положения равновесия) мало, так как только в этом случае (с точностью до величин второго порядка) производную для данной частицы можно заменить производной для данной точки пространства.

При составлении уравнения (1) был сделан еще ряд упрощений. В частности, предполагалось, что имеется только продольное смещение. В действительности имеется и поперечное движение. Им можно пренебрегать только если стержень не очень тонкий. Можно внести поправки, учитывающие поперечное движение.

Энергия стержня при наших предположениях состоит из потенциальной энергии

$$U=\frac{1}{2}\int\limits_0^l Eq\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

и кинетической энергии

$$T=\frac{1}{2}\int\limits_0^l \rho q\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx.$$

Эти выражения могут быть получены путем предельного перехода от дискретной модели.

Рассмотрим теперь трехмерную гидродинамическую или акустическую среду и выясним, каковы ее уравнения движения.

Гидродинамика исходит из следующего основного положения. Она утверждает, что если выделить некоторую массу (рис. 138), то действующие на нее силы могут быть заменены поверхностными силами. Это не само собой очевидная истина. Это утверждение связано с тем, что действие молекулярных сил распространяется лишь на очень небольшие расстояния.

Мы будем считать далее, что силы, действующие на каждую малую площадку, перпендикулярны к площадке и направлены внутрь выделенной массы, а их величина пропорциональна величине площадки. Предположение, что силы перпендикулярны к площадке, означает, что мы считаем среду идеальной жидкостью (или газом) в гидродинамическом смысле, т. е. жидкостью (или газом), не сопротивляющейся изменению формы. В твердом теле дело обстоит не так. В нем есть силы, сопротивляющиеся сдвигу.

Если в данном месте менять ориентацию площадки, то, как можно показать, величина давления на нее не зависит от ориентации площадки.

Напишем для рассматриваемой среды уравнение движения

$$\int_V \rho dV \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{K}. \qquad (2)$$

Рис. 138.

Здесь ρ — плотность; $\mathbf{u}$ — скорость; $\mathbf{K}$ — сумма всех сил, действующих на вещество, заключенное в объеме V. Уравнение (2) выражает то, что сумма всех ускорений, умноженных на соответствующие массы, равна сумме всех действующих сил.

Пусть, кроме поверхностных, имеются также и объемные силы. Тогда

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{f}\rho dV + \oint_S p\mathbf{n}dS, \qquad (3)$$

где $\mathbf{f}$ — объемная сила на единицу массы; p — давление, dS — элемент площади. Но

$$\oint_S p\mathbf{n}dS = -\int_V \nabla p \cdot dV \qquad (4)$$

(это справедливо для любого объема).

Пользуясь соотношениями (3) и (4), мы можем написать уравнение движения массы в виде

$$\int_V \left(\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{f}\rho + \nabla p\right) dV = 0.$$

Так как это верно для любого объема, то отсюда следует, что подинтегральная функция равна нулю:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho\mathbf{f} - \nabla p.$$

Производная $d\mathbf{u}/dt$ относится к данной материальной точке. Так должно быть по смыслу второго закона Ньютона, тут нет свободы выбора. Но[1]

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u},\ \nabla)\cdot\mathbf{u},$$

и, следовательно,

$$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\rho(\mathbf{u},\ \nabla)\cdot\mathbf{u}=\rho f-\nabla p.$$

Сколько здесь неизвестных? ρ, вообще говоря, — переменная, неизвестная величина. p и ρ связаны некоторым соотношением:

$$p=p(\rho),$$

вид которого зависит от уравнения состояния среды. Третье неизвестное — $\mathbf{u}$. Таким образом, для определенности задачи нужен еще один физический закон.

Если в некоторый объем входит определенное количество вещества (например, газа), то это вызывает изменение количества вещества:

$$\oint_S \rho\mathbf{u}\mathbf{n}dS=-\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV.$$

Отсюда на основании теоремы о дивергенции

$$\oint_S \mathbf{a}\mathbf{n}dS=\int_V \operatorname{div}\mathbf{a}\cdot dV$$

следует уравнение сплошности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\operatorname{div}\rho\mathbf{u}.$$

Мы получили систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\rho(\mathbf{u},\ \nabla)\cdot\mathbf{u}=\rho\mathbf{f}-\nabla p,\quad p=p(\rho),\\&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{u}=0.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Применим их сначала к плоской задаче: будем считать, что $\mathbf{u}$, ρ и p зависят только от x и что вектор $\mathbf{u}$ имеет только одну ком-

[1] [Формула (10) 1-й лекции относилась к *скаляру*.]

поненту, отличную от нуля, — компоненту по x. Уравнения (5) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}=\rho f-\frac{\partial p}{\partial x}, \quad p=p(\rho),\\ &\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial\rho u}{\partial x}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Это очень неприятные уравнения, так как они нелинейны. Решить их совсем нелегко. Эти уравнения послужили исходной точкой для работ Римана, в которых исследуется распространение разрывов волн.

Мы ограничимся малыми колебаниями. Напишем:

$$\rho=\rho_0+\delta\rho$$

и, считая, что u и $\delta\rho$ малы, пренебрежем величинами второго порядка относительно u и $\delta\rho$. Тогда уравнения существенно упростятся. Будем считать кроме того, что внешних (объемных) сил нет. Из первых двух уравнений (6) имеем:

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}, \quad p=p(\rho), \tag{7}$$

а из третьего

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\rho_0\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{8}$$

Мы хотим получить два уравнения с двумя неизвестными u и ρ. Для этого нужно исключить p с помощью второго уравнения (7). Продифференцируем его:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}. \tag{9}$$

С точностью до величин второго порядка, подставляя (9) в (7), имеем:

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}=-\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{\rho=\rho_0}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}. \tag{10}$$

В итоге мы получили два уравнения для u и ρ — уравнения (8) и (10). Мы сравним их потом с уравнениями для электрического случая.

Исключая u из (8) и (10), получаем:

$$a^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}, \tag{11}$$

где

$$a^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{\rho=\rho_0}. \tag{12}$$

Совершенно такое же уравнение получится для *u* при исключении ρ.

Что такое здесь *a*? Это требует особого рассмотрения.

Предположим, например, что мы осуществили очень короткий сигнал. Оказывается, что скорость такого сигнала — отношение пройденного им пути к времени — будет равна *a*.

Понятие скорости, которым мы только что воспользовались, взято из механики материальных *тел*. В основе понятия скорости тела лежит то, что можно отождествить тело при $t=t_0$ и при $t=t_1$. Скорость определяется как расстояние x_1-x_0, пройденное телом, деленное на время t_1-t_0. Но что назвать скоростью тела, если при движении оно разлетается на куски?

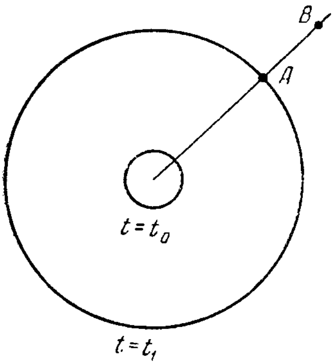

Рис. 139.

Можно ли пользоваться понятием скорости, когда мы имеем дело с сигналом, с возмущением? Возмущение распространяется во все стороны. Созданное в некотором месте возмущение (например, сгущение) изменяется при распространении. Возмущение не остается подобным тому, которое выпущено при $t=t_0$. Если в начале возмущение охватывает только малый объем, то через некоторое время будет существовать возмущенный слой с определенным внешним радиусом (рис. 139). Здесь можно ввести *разные* понятия скорости. Рассматривая время между прохождением фронта волны (внешней границы возмущения) через точку *A* и точку *B*, можно ввести понятие *скорости фронта*. Но можно дать также иные определения скорости, ввести, например, понятие *групповой* скорости. Величина *a*, входящая в наше уравнение (11), может быть определена из опыта как

$$a=\lambda\nu,$$

где ν — частота; λ — длина волны.

Вот как здесь происходило историческое развитие.

Первым, кто теоретически исследовал скорость звука, был Ньютон (1687). Он исходил из закона Бойля

$$\frac{p}{\rho}=\frac{p_0}{\rho_0}$$

и получил:

$$a^2 = \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Ньютон придал этому результату красивую формулировку. Предположим, что атмосфера однородна и имеет высоту h и плотность ρ_0. Тогда атмосферное давление на поверхности земли равно

$$p_0 = gh\rho_0,$$

и, следовательно,

$$a = \sqrt{gh}.$$

Скорость звука, говорит Ньютон, равна скорости тела, падающего без сопротивления, с высоты, равной половине высоты атмосферы.

Вычисление по формуле Ньютона дает

$$a = 280 \text{ м/сек.}$$

Опыт этому резко противоречит.

Разрешение противоречия было указано Лапласом. Оно состоит в следующем. Отношение p/ρ постоянно при *изотермическом* процессе. В действительности процесс *не* изотермический, и эта зависимость несправедлива. Лаплас предложил принять вместо изотермического закона адиабатический. Это дает:

$$a = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}\gamma},$$

где

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

(C_p и C_v — теплоемкости при постоянном давлении и при постоянном объеме). Для воздуха $\gamma = 1{,}4$. При этом получается удовлетворительное совпадение с опытом.

В более позднее время стали определять γ посредством измерения a. Это имеет большое значение в связи с представлениями кинетической теории. Согласно кинетической теории (для газа, состоящего из жестких молекул)

$$\gamma = \frac{f+2}{f},$$

где f — число степеней свободы молекулы. Например, при $f=3$ (одноатомные молекулы) имеем $\gamma=1{,}67$. Кундтом и Варбургом измерение a было проделано для ртутного пара. Это — одноатомный газ, и для него получился результат, предсказанный кинетической теорией:

$$a=\sqrt{1{,}67\,\frac{p_0}{\rho_0}}\,.$$

Для благородных газов получается тот же результат.

С квантовой точки зрения весь вопрос выглядит иначе[1].

Случай Ньютона (изотермические деформации) и случай Лапласа (адиабатические деформации) принципиально отличаются от всех остальных. Только при изотермическом и адиабатическом процессах нет деградации энергии. Эти процессы обратимы. При всяком другом процессе между отдельными частями газа происходит обмен тепла при конечной разности температур — необратимый процесс, вызывающий потерю свободной энергии и затухание волны. На это указывали Релей и Стокс.

Перейдем к вопросу о колебаниях в распределенных электрических системах. Он столь же важен для нас, как вопрос о колебаниях в упругой сплошной среде.

Постараемся установить уравнения для колебаний тока в простом проводе.

Через сечение x втекло к моменту t количество электричества $Q(x)$; через сечение $x+dx$ вытекло к этому моменту количество электричества $Q(x+dx)$; ток через какое-нибудь сечение

$$I=\frac{\partial Q}{\partial t}\,. \tag{13}$$

Количество электричества, застрявшее в элементе dx, равно

$$Q(x)-Q(x+dx)=-\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx.$$

Пусть Cdx — емкость куска dx (C — емкость на единицу длины), V — его потенциал. Тогда

$$-\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx=Cdx\cdot V, \tag{14}$$

[1] [Ср. 10-ю и 11-ю лекции части I].

или, если мы возьмем производную по времени от обеих частей и подставим (13),

$$-\frac{\partial I}{\partial x}=C\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{15}$$

Это — первое уравнение.

По закону Ома

$$Rdx\cdot I=-\frac{\partial V}{\partial x}dx-Ldx\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{16}$$

Здесь R — сопротивление, L — индуктивность на единицу длины. Первый член правой части — разность потенциалов концов куска dx, второй — электродвижущая сила самоиндукции в этом куске.

Мы не рассматривали трения в упругой среде. Соответственно и здесь пренебрежем сопротивлением. Тогда мы получаем из (16):

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=L\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{17}$$

Таково второе уравнение.

Величины I и V удовлетворяют двум уравнениям: (15) и (17), подобно двум уравнениям (8) и (10) для ρ и u. Из них легко получить

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial I}{\partial x}\right)=L\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \tag{18}$$

Этим уравнением часто пользуются для антенн. Если $C=\mathrm{const}$, то получаем:

$$\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \tag{19}$$

Уравнение (18) аналогично уравнению стержня с переменным модулем упругости[1].

‹*Из того, что я сейчас сказал, я ни слова не понимаю, потому что пользовался неправильными терминами.*

У нас получается уравнение телеграфистов, с которым все работают, которое справедливо и для антенны. Но *оправдать то, что мы сделали, я не сумею.*

Посмотрим, что же мы сделали нехорошего.

---

[1] [Сохранился текст, написанный Л. И. Мандельштамом, в близком соответствии с которым им была прочитана часть лекции, содержащая критику изложенного выше вывода уравнения антенны. Далее приводится в угловых скобках (с небольшой редакционной обработкой) этот текст Л. И. Мандельштама. Все подчеркивания принадлежат Л. И. Мандельштаму.]

Я считаю правильным такой путь: взять какой-нибудь простой случай распространения электромагнитных волн в проводах, который действительно поддается настоящему, хорошему, строгому исследованию, — исследовать его и установить, что там делается. Тогда мы сможем понять, почему оказывается, что для одного простого случая, который практически существенен, можно пользоваться уравнением (19).

Этот путь — довольно длинный, но без него обойтись нельзя. Техники работают с уравнением (18) и получают при этом хорошие результаты, но вы сейчас увидите, что ему пока еще нет никакого оправдания.

Я говорил о потенциале. Но при переменных полях понятие о потенциале отпадает.

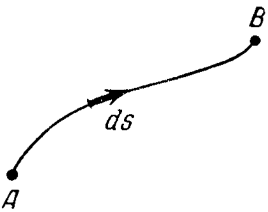

Рис. 140.

Первое уравнение Максвелла гласит:

$$-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Пусть поле постоянно, т. е. нет зависимости от t. Тогда $\partial \mathbf{H}/\partial t = 0$, и первое уравнение Максвелла обращается в следующее:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0.$$

Поле не имеет ротации. Оно может быть выражено как градиент некоторого скаляра. Этот скаляр мы называем потенциалом. Это понятие можно ввести благодаря тому, что $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$; при этом $\int E_s ds$ между двумя точками A и B (рис. 140) не зависит от пути. Именно поэтому можно величину интеграла между этими двумя точками обозначить как разность потенциалов между этими двумя точками. Как только $\int E_s ds$ *зависит от пути интеграции (а при всяком нестатическом поле дело обстоит, вообще говоря, именно так), понятие потенциала отпадает, — такой величины не существует.* Написанный нами интеграл зависит не только от того, между какими точками вы его берете; он зависит также от того, по какому пути вы его берете. *Общего понятия потенциала не существует.*

Ошибка, связанная с понятием потенциала, часто делается и в случае обычного замкнутого конденсатора. Но там можно обойти указанную здесь трудность. Это связано с тем, что все электрическое поле практически сосредоточено в самом конденсаторе. Можно доказать, что внутри конденсатора все пути приводят практически к одному и тому же значению $\int E_s ds$. В случае конденсатора можно указать класс путей, которые ведут при вычислении $\int E_s ds$ к одному и тому же результату, и эту величину можно назвать разностью потенциалов между обкладками конденсатора. В том случае, который нас теперь интересует, такого сосредоточения поля нет. Это мы должны заметить прежде всего. Но это не самое важное.

Что такое емкость элемента длины, что такое индуктивность элемента длины? Эти выражения лишены пока всякого смысла. Что мы имеем в виду, когда говорим об индуктивности катушки? Одно из определений индуктивности L таково: если через катушку пропускается ток I, то магнитная энергия равна $LI^2/2$ (другие определения ведут к тому же). Магнитная энергия катушки, если по ней идет ток, пропорциональна квадрату этого тока, и коэффициент пропорциональности называется индуктивностью.

А как обстоит дело в случае длинного провода? В каждом элементе — своя сила тока; сила тока меняется от точки к точке. Магнитное поле находится во всем пространстве. Магнитное поле от одного элемента прикладывается к магнитному полю от другого элемента. Но ведь энергия пропорциональна *квадрату* магнитного поля. *Магнитной энергии от одного элемента вообще не существует, есть только суммарная энергия всего магнитного поля, которая не разлагается на слагаемые так, что каждое слагаемое принадлежит одному элементу, другое — другому.* Нельзя говорить: вот энергия от этого элемента, вот энергия от другого. Нельзя говорить: магнитная энергия состоит из слагаемых, пропорциональных I^2 в отдельных элементах длины, — нет таких слагаемых. Но именно такое представление лежало в основе нашего определения индуктивности. Значит, если индуктивность определена так, как мы умеем ее определять, то здесь это понятие теряет всякий смысл.

Для распределенной системы нельзя говорить об индуктивности элемента длины. Можно говорить только об индуктивности целого провода, в котором течет определенный ток. Это видно уже из того, что если вы возьмете катушку вдвое большей длины, то индуктивность вовсе не увеличится вдвое; между тем, если бы название „индуктивность на единицу длины“ было оправдано, то должно было бы получиться увеличение вдвое. На самом деле нет ничего подобного. Поэтому понятие „индуктивность элемента длины" не определено. То же самое и для емкости: выражение „емкость элемента длины" непонятно.

Какая здесь разница с механикой? Когда мы рассматриваем стержень, мы говорим о массе такого-то куска, и масса куска стержня имела определенный смысл, независимо от того, есть ли другие куски или нет. *Масса аддитивна*: сумма масс равна массе суммы. Поэтому мы могли установить дифференциальное уравнение для стержня, ограничиваясь рассмотрением одного кусочка. В электрических системах энергия всегда распределена в трехмерном пространстве. В механических системах масса может быть сосредоточена в очень малом пространстве; в электрических системах подобное положение *невозможно — существенную роль там играет поле во всем пространстве, именно это — самое существенное*. Здесь всякая задача трехмерна, здесь такое упрощение, как в механике, абсолютно недопустимо. В рассматриваемой нами электрической системе упрощение, которое мы ввели для контура, для катушки теряет смысл, между тем как для элемента стержня понятие массы не теряет смысла. Можно установить уравнение для стержня независимо от того, какой он — короткий или длинный; для нашей электрической системы такой подход абсолютно недопустим.

Я мог бы указать такую аналогию (аналогии вообще не решают вопроса, я хочу только пояснить, в чем тут дело). Представьте себе, что стержень находится в жидкости, масса которой сравнима с массой стержня. Тогда то, что мы писали для элемента стержня — масса, умноженная на ускорение, равняется силе, — ничего не дает, потому что все зависит от движения жидкости во всем пространстве; сила, действующая на элемент стержня, зависит теперь от того, например, близок к нему конец стержня или нет. Если бы в природе стержни всегда находились в каких-нибудь плотных жидкостях, то методы, основанные на рассмотрении отдельного элемента длины, были бы непригодны и для стержней, мы не пришли бы к таким методам, они ничего не давали бы. Принципиально и для стержня в воздухе возникает обсуждаемый нами вопрос, — нужно учесть массу воздуха. Но здесь это, к счастью, дает настолько малую поправку, что от нее можно отвлечься. *В электрическом случае это не поправка, а главное. Поэтому отвлекаться от этого никак нельзя.* Это было бы все равно, что отвлекаться от того, что мы хотим рассмотреть. В этом принципиальная разница.

Несмотря на это, можно в известном смысле спасти положение. Но для того, чтобы знать, когда можно и целесообразно вводить понятие, о котором только что шла речь, нужно взять какой-нибудь вопрос, который мы сумеем решить до конца.

Теперь поставим задачу и не будем бояться, что придется проделать некоторые вычисления. Практически мы все равно будем работать с уравнением (18), потому что оно часто является хорошим первым приближением. Но мы все-таки физики: нам нужно выяснить затруднения, связанные с обсуждаемыми понятиями. Так, как они вводятся обычно, они просто не имеют никакого смысла.>

Возьмем случай двух параллельных проводов (лехерову систему, рис. 141) и разберем для этого случая распространение электромагнитных волн с точки зрения уравнений Максвелла. Мы выполним необходимую работу, если решим статическую задачу.

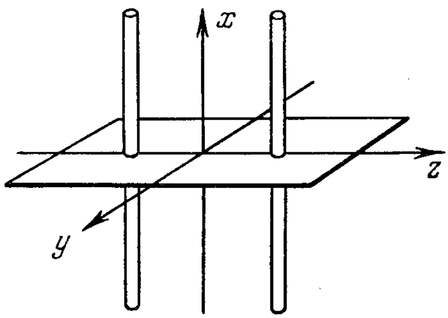

Рис. 141.

Если писать уравнения Максвелла в электростатической или электромагнитной системе единиц, то период собственных колебаний контура

$$\tau = 2\pi\sqrt{LC}.$$

В гауссовой системе он выражается сложнее:

$$\tau = \frac{2\pi}{c}\sqrt{LC}.$$

Здесь нам невыгодно пользоваться электрической или электромагнитной системой. Нам нужно, чтобы в уравнения вошла константа c, и мы будем поэтому пользоваться гауссовой системой. При этом магнитная энергия будет

$$W_m = \frac{L}{2c^2} I^2.$$

В гауссовой системе уравнения Максвелла таковы:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Здесь $\mathbf{j}$ — плотность тока. Если нет электровозбудительных сил, то

$$\mathbf{j}=\lambda\mathbf{E}$$

(λ — электропроводность).

Вот вся система максвелловских уравнений, но она еще пуста. Ее нужно связать с неэлектромагнитными явлениями, с превращениями энергии. Мы хотим знать силы, знать развиваемое количество тепла. Для этого нужно указать связь между напряженностями полей и энергией. Энергия в объеме V есть

$$W=W_e+W_m=\frac{1}{8\pi}\int\limits_V(\varepsilon E^2+\mu H^2)\,dV$$

(dV — элемент объема).

Кроме того, нужно еще знать, как ведут себя $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на границе тел и в бесконечности.

Уравнения Максвелла приводят к требованию, чтобы тангенциальные компоненты были непрерывны. Для упрощения переходов мы примем, что наши проводники идеальны ($\lambda=\infty$) и что объемных зарядов не существует:

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=0.$$

При $\lambda=\infty$ внутри проводников имеем:

$$\mathbf{E}=0$$

— при абсолютно хорошем проводнике внутри проводов нет полей и нет токов: скин-эффект выражен до конца.

Если заряды имеются только на поверхности, плотность тока характеризуется количеством электричества, проходящим в единицу времени, не через поверхность, а через линию (рис. 142). Мы имеем тогда только поверхностные токи, которые в этом случае вообще не входят в дифференциальные уравнения.

С точки зрения электронных представлений принятие поверхностных токов есть идеализация, абстракция. Электрические силовые линии ведут себя в действительности так, как на рис. 143. Их плотность убывает непрерывно. Если мы обращаем в нуль толщину переходного слоя, то мы должны допустить разрывное изменение напряженности поля. Мы должны признать допустимость *скачка* электрического и магнитного полей.

Мы приходим к такому условию: $\mathbf{E}$ везде непрерывно, за исключением поверхности проводников, где

$$E_n=4\pi\sigma$$

(σ — поверхностная плотность заряда).

Совершенно так же нужно поступить с токами. Убывание магнитного поля при переходе в проводник должно происходить скачком. Магнитные линии должны быть направлены тангенциально к поверхности проводника, причем

$$[\mathbf{H}, \mathbf{n}] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i},$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности, а $\mathbf{i}$ — плотность поверхностного тока.

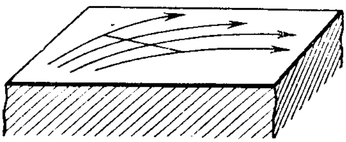

Рис. 142.

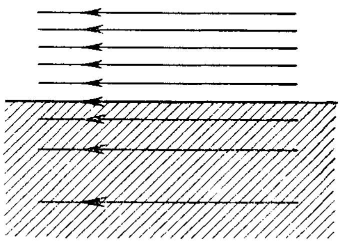

Рис. 143.

Итак, мы получаем следующие основные уравнения задачи:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t};\\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t};\\ E_n &= 4\pi\sigma, \quad [\mathbf{H}, \mathbf{n}] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i};\\ E_t &= 0, \quad H_n = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Оказывается, что в интересующем нас случае эту систему очень просто решить.

Уравнения, относящиеся к $\mathbf{E}$ и к $\mathbf{H}$, сплетены. Но для статических задач система (20) распадается на две группы уравнений, в одну из которых входят только величины, связанные с $\mathbf{H}$, в другую — только величины, связанные с $\mathbf{E}$. Электростатическая задача решается отдельно, магнитная — тоже отдельно. Мы и разобьем задачу на две. Сначала мы решим статическую электрическую и статическую магнитную задачи. Затем мы свяжем их решения так, чтобы удовлетворить уравнениям в общем случае переменных полей.