ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ

(3/XII 1931 г.)

Рассмотрение двухпроводной линии на основе теории Максвелла. Статические задачи. Динамические задачи. Волновое уравнение. Условие применимости до-максвелловского рассмотрения. Постановка математической задачи о колебаниях распределенной системы; граничные и начальные условия.

Мы перешли в прошлый раз к вопросу об электрических колебаниях в системе из параллельных проводов.

Мы считаем проводники идеальными. В этом случае внутри проводников

$$\mathbf{E}=0, \quad \mathbf{H}=0$$

и, кроме того, на поверхности проводников вектор **E** направлен перпендикулярно поверхности, а вектор **H** — тангенциально к ней:

$$E_{\parallel}=0, \quad H_{\perp}=0.$$

Мы должны теперь связать с **E** и **H** поверхностные плотности тока и заряда (это почти что вопрос обозначений).

Мы сделаем следующее первое предположение (потом мы его оправдаем). Мы предположим, что **E** и **H** лежат в плоскостях, перпендикулярных к осям проводов. Мы имеем тогда:

$$\varepsilon \oint E_n ds = 4\pi e_1, \tag{1}$$

$$\oint H_s ds = \frac{4\pi}{c} I, \tag{2}$$

где интегралы берутся по замкнутой линии, охватывающей один из проводов; e_1 есть заряд на единицу длины этого провода. Уравнение (1) мы можем написать на основании того, что

$$\varepsilon \int E_n dS = 4\pi e_1,$$

где интеграл взят по боковой поверхности цилиндра единичной высоты; так как для него $dS = 1 \cdot ds$, то

$$\int E_n dS = \oint E_n ds.$$

Согласно Максвеллу, уравнения (1) и (2) являются, в сущности, определениями тока и заряда. По Максвеллу, все дело в поле, а „сила тока“ и „заряд“ — это лишь *названия* величин:

$$\frac{c}{4\pi}\int H_s ds, \quad \frac{\varepsilon}{4\pi}\int E_n ds.$$

Но с нашей точки зрения сила тока и заряд — реальные вещи, в особенности с точки зрения электронной теории.

Энергия в некотором объеме V есть

$$W=\frac{1}{8\pi}\int(\varepsilon E^2+\mu H^2)\,dV.$$

Часто, излагая уравнение Максвелла, ничего не говорят об энергии. Но, по моему мнению, переход от уравнений Максвелла к другим явлениям дается именно этой зависимостью — зависимостью энергии от $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Без нее вся теория слепа, так как на опыте мы исследуем электрические явления через неэлектрические (механические, тепловые и т. п.). Переход от одних к другим совершается с помощью выражения энергии.

Рассмотрим случай, когда поле *статическое*.

Пусть $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не зависят от времени, т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}=0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=0.$$

В этом случае уравнения (20) предыдущей лекции распадаются на две группы: одну для $\mathbf{E}$, другую для $\mathbf{H}$. Получаются две совершенно независимые задачи: электростатическая и магнитостатическая. Если же поля переменные, то сразу получается связь между электрическими и магнитными величинами.

Основную задачу мы решим сразу, если будут решены обе стационарные (статические) задачи.

Вместо электрического поля, связанного с зарядом e_1, и магнитного поля, связанного с током I, мы введем величины:

$$\mathbf{E}_0=\varepsilon\frac{\mathbf{E}}{e_1}, \quad \mathbf{H}_0=c\frac{\mathbf{H}}{I}. \tag{3}$$

Мы делаем это для того, чтобы лучше выявить связь между обеими стационарными задачами. В переменных $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ уравнения получают простое написание. Заметим прежде всего, что

$$\oint E_{0n}ds=4\pi, \quad \oint H_{0s}ds=4\pi.$$

Начнем с электростатической задачи. В этой задаче

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E}=0. \tag{4}$$

Возьмем сперва хорошо известный случай концентрического кабеля (рис. 144). (Практически нас больше интересует случай двух параллельных проводов. Он будет подробно разобран на семинаре).

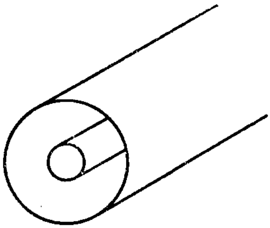

Рис. 144.

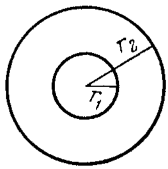

Рис. 145.

В кабеле поле радиально, причем, как известно из элементарных курсов,

$$E=\frac{2e_1}{\varepsilon r}.$$

Так как мы рассматриваем электростатический случай, то можно ввести потенциал

$$\psi=-\frac{2e_1}{\varepsilon}\ln r.$$

Подсчитаем емкость на единицу длины кабеля:

$$C=\frac{e_1}{\psi_1-\psi_2}=\frac{\varepsilon}{2\ln(r_2/r_1)}.$$

Энергия находится в слое между металлическими цилиндрами и равна (на единицу длины)

$$W=\frac{e_1^2}{2C}=\frac{e_1^2}{\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

С этим выражением связана одна очень важная вещь, которая имеет существенное значение и для наших колебательных задач.

Попробуем перейти к случаю *одного* бесконечного заряженного цилиндра. Пусть $r_2\to\infty$. Тогда

$$C\to 0, \quad W\to\infty.$$

Итак, если мы имеем дело с *одним* бесконечным проводом, то из задачи о концентрическом кабеле мы для него ничего не получим, мы приходим к нелепости. Это означает, что в случае бесконечного провода вторая обкладка *никогда* не бывает безразлична.

Возьмем для сравнения случай концентрических шаров с радиусами r_1 и r_2 (рис. 145). Здесь

$$\text{емкость} = \frac{\text{заряд}}{\text{разность потенциалов}} = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Если $r_2 \to \infty$, то емкость стремится к r_1. В этом и только в этом смысле говорят о емкости *одного* проводника. Это понятие имеет смысл только для проводника, конечного во всех направлениях. Для одного бесконечного цилиндра емкости не существует. Поэтому говорить о емкости на единицу длины одного бесконечно длинного проводника — абсурд. Если вторая обкладка находится на расстоянии, не очень большом по отношению к длине цилиндрического проводника, ее влияние существенно.

Таким образом, мы должны заранее сказать, что нельзя строить теорию для одного бесконечно длинного провода. Но если у нас n проводов и сумма их зарядов равна нулю, то все эти затруднения отпадают. Мы будем рассматривать именно тот случай, когда

$$\sum_i e_i = 0 \tag{5}$$

(e_i — заряд i-го провода на единицу длины). Можно считать, что симметричная лехерова система удовлетворяет этому условию, если $d/l \ll 1$ (d — расстояние между проводами, l — их длина) и если расстояние до земли очень велико. Но если она несимметрична, условие (5) не выполнено. При измерениях с такой лехеровой системой начинаются всякие неприятности, и мы видим теперь, как это связано со всей теорией.

Пусть ось x направлена вдоль проводов (рис. 141). Тогда все величины, входящие в наши уравнения, не зависят от x.

Будем искать функцию φ, такую, что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Потребуем кроме того, чтобы φ была постоянна на каждом проводе и чтобы на первом проводе было

$$\oint \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = 4\pi,$$

а на втором проводе

$$\oint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds = -4\pi.$$

Если такая функция найдена, то, взяв

$$\mathbf{E}_0 = -\operatorname{grad}\varphi, \tag{6}$$

мы получим поле $\mathbf{E}_0$, удовлетворяющее всем поставленным условиям. В самом деле, так как

$$E_{0x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

а φ от x не зависит, то $\mathbf{E}_0$ перпендикулярно оси x. Далее, $\operatorname{rot}\mathbf{E}_0$ равен нулю, так как $\mathbf{E}_0$ есть градиент скаляра; $\operatorname{div}\mathbf{E}_0$ равна нулю в силу дифференциального уравнения для φ. Остается еще условие, что $\mathbf{E}_0$ перпендикулярно к проводнику. Но если φ на проводнике постоянно, то $\operatorname{grad}\varphi$ перпендикулярен к его поверхности.

Далее

$$\mathbf{E} = \frac{e_1}{\varepsilon}\mathbf{E}_0, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\psi,$$

где ψ — обычный потенциал:

$$\psi = -\frac{e_1}{\varepsilon}\varphi.$$

Для статического случая можно определить емкость C на единицу длины. Определяется она так:

$$C = \frac{e_1}{\psi_1 - \psi_2} = \frac{e_1}{\int\limits_1^2 E_s ds} = \frac{\varepsilon}{\int\limits_1^2 E_{0s} ds}. \tag{7}$$

Мы выразили ее через $\mathbf{E}_0$.

Я думаю, что все это известно, и хотел лишь написать, что это имеет место в общем случае.

Менее известна соответствующая магнитная задача. Чем она отличается от электрической? Здесь, аналогично (4),

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_0 = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H}_0 = 0,$$

но в отличие от электростатики — и это, на первый взгляд, кажется немного затруднительным — здесь тангенциальные слагающие на проводниках отличны от нуля: на первом проводнике

$$\oint H_{0s} ds = 4\pi. \tag{8}$$

Я утверждаю, однако, что, зная φ, мы легко найдем $\mathbf{H}_0$, положив

$$H_{0x}=0, \quad H_{0y}=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad H_{0z}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{9}$$

В самом деле, при этом

$$\operatorname{div}\mathbf{H}_0=\frac{\partial H_{0x}}{\partial x}+\frac{\partial H_{0y}}{\partial y}+\frac{\partial H_{0z}}{\partial z}=0$$

и

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_0=0,$$

так как

$$\operatorname{rot}_x\mathbf{H}_0=\frac{\partial H_{0z}}{\partial y}-\frac{\partial H_{0y}}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,$$

$$\operatorname{rot}_y\mathbf{H}_0=\frac{\partial H_{0x}}{\partial z}-\frac{\partial H_{0z}}{\partial x}=0,$$

$$\operatorname{rot}_z\mathbf{H}_0=\frac{\partial H_{0y}}{\partial x}-\frac{\partial H_{0x}}{\partial y}=0.$$

Легко видеть, что $\mathbf{H}_0$ удовлетворяет также условиям на поверхности проводников. Заметим, что скалярное произведение $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$ равно нулю, т. е. $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{H}_0$. Но мы доказали, что $\mathbf{E}_0$ перпендикулярно к поверхности проводника. Следовательно, $\mathbf{H}_0$ тангенциально к этой поверхности.

Не трудно далее убедиться, что $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ по абсолютной величине равны друг другу. На основании (6) и (9) имеем:

$$H_0^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=E_0^2.$$

Следовательно, если

$$\oint E_{0n}ds=4\pi$$

(а это условие у нас выполнено), то и

$$\oint H_{0s}ds=4\pi,$$

т. е. выполнено условие (8).

В только что решенной нами задаче о стационарном токе можно ввести понятие индуктивности на единицу длины, соответственно понятию емкости на единицу длины в электростатической задаче.

Одно из определений самоиндукции есть

$$\int\mu H_n dS=\frac{1}{c}LI,$$

где слева стоит поток магнитной индукции через контур, по которому течет ток I. Возьмем наш случай. Так как **H** пропорционально I, то поток магнитной индукции, проходящий через поверхность $ABCD$ (рис. 146), где $AB = CD = 1$, мы можем представить в таком виде:

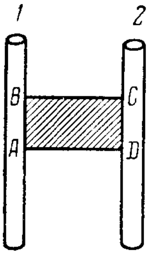

Рис. 146.

$$\mu \int H_n dS = \frac{L}{c} I,$$

где L по определению — индуктивность на единицу длины.

Заменяя **H** через $\mathbf{H}_0$, а интеграл по поверхности — интегралом по пути от провода *1* до провода *2*, получаем:

$$\frac{\mu}{c} \int_1^2 H_{0n} ds = \frac{L}{c}.$$

На основании соотношения между $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{E}_0$ можно написать:

$$\frac{\mu}{c} \int_1^2 E_{0s} ds = \frac{L}{c},$$

откуда

$$L = \mu \int_1^2 E_{0s} ds. \tag{10}$$

Из сравнения (7) и (10) получается:

$$CL = \varepsilon\mu. \tag{11}$$

Это очень важное соотношение. L и C зависят от расположения и формы проводников, но их произведение зависит только от свойств среды, в которой находятся проводники. Для воздуха имеем с большой точностью

$$CL = 1.$$

О емкости и индуктивности на единицу длины здесь можно говорить благодаря тому, что электрическое и магнитное поля перпендикулярны оси x; поэтому как в электрическом, так и в магнитном поле можно выделить отдельные *слои*.

До сих пор ток и заряд у нас были постоянны. Пусть теперь

$$I = I(x, t), \quad e_1 = e_1(x, t).$$

Я утверждаю, что картина поля такова: $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ остаются в плоскостях, перпендикулярных оси x (электрическое и магнитное поля попрежнему не имеют x-компонент), и в каждой такой плоскости электрическое и магнитное поле связаны с e_1 и I так же, как в статическом случае. При этом величины полей не зависят от x. До сих пор электростатическая и „токовая“ задачи были независимы. Я утверждаю, что теперь между ними существует определенная связь.

Докажем эти утверждения.

Ясно, что при только что описанной картине с дивергенциями все остается в порядке, так как попрежнему членов с $\partial/\partial x$ в них не будет, а члены с $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$ останутся прежними. Посмотрим, как обстоит дело с роторами. Имеем:

$$c \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Для произвольных скаляра φ и вектора $\mathbf{A}$ имеем:

$$\operatorname{rot} \varphi\mathbf{A} = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} + [\nabla\varphi, \mathbf{A}]$$

(эту общую формулу легко вывести). Поэтому

$$\operatorname{rot} I\mathbf{H}_0 = I \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 + [\nabla I, \mathbf{H}_0].$$

Но $\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = 0$, а ∇I имеет только компоненту по оси x, равную по величине $\partial I/\partial x$. Векторное произведение $[\nabla I, \mathbf{H}_0]$ имеет направление вектора $\mathbf{E}_0$ (это ясно из рассмотрения направлений векторов $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$) и равно по величине $-\frac{\partial I}{\partial x}\mathbf{E}_0$. Следовательно,

$$c \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{\partial I}{\partial x}\mathbf{E}_0.$$

Так как

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial e_1 \mathbf{E}_0}{\partial t}$$

и $\mathbf{E}_0$ не зависит от t, мы можем написать первое уравнение Максвелла в таком виде:

$$-\frac{\partial I}{\partial x}\mathbf{E}_0 = \frac{\partial e_1}{\partial t}\mathbf{E}_0.$$

Получается следующий результат: чтобы удовлетворялось первое уравнение Максвелла, должно быть

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{\partial e_1}{\partial t}. \tag{12}$$

Аналогично доказывается, что второе уравнение Максвелла удовлетворяется, если

$$-\frac{\partial e_1}{\partial x}=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{13}$$

Таким образом, мы получим точное, строгое решение нашей полной задачи, если возьмем:

$$\mathbf{E}=\frac{e_1}{\varepsilon}\mathbf{E}_0,\quad \mathbf{H}=\frac{I}{c}\mathbf{H}_0,$$

где $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — решения статических задач для соответствующего x, а e_1 и I удовлетворяют уравнениям (12) и (13). Единственная трудность при решении задачи состоит в том, чтобы найти φ.

В первую очередь нас интересуют токи. Дифференцируя уравнения (12) и (13) и исключая e_1, получаем:

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 I}{\partial x^2},$$

или

$$a^2\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \tag{14}$$

где

$$a=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{15}$$

Для рассмотренного случая мы совершенно строго получили волновое уравнение. Скорость распространения равна a. Она не зависит от расстояния между проводниками; чтобы знать скорость распространения волн, не нужно знать в отдельности L и C. Но если нужно знать энергию, то необходимо ввести емкость и индуктивность на единицу длины.

На основании (11) можно переписать уравнения (12) и (13) в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial I}{\partial x}&=\frac{\partial e_1}{\partial t},\\ -\frac{1}{C}\frac{\partial e_1}{\partial x}&=\frac{L}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t}.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Введем посредством соотношения

$$e_1=CV$$

величину V. Тогда уравнения (16) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial I}{\partial x} &= C\frac{\partial V}{\partial t}, \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{L}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Мы пришли к тем же уравнениям, что и в прошлый раз, но тогда способ их получения был явно неправильный. Мы видим теперь, что понятие разности потенциалов в некотором отношении сохраняет здесь свой смысл.

Как уже говорилось, понятие разности потенциалов, вообще говоря, неприменимо к переменным полям, потому что в таких полях интеграл $\int\limits_1^2 E_s ds$, взятый по различным путям между одними и теми же точками проводов, различен. Но в данном случае можно выделить *класс* путей такой, что $\int\limits_1^2 E_s ds$, взятый по любому из них между двумя любыми точками проводников, имеет одинаковое значение. Это — *пути, лежащие в плоскостях, перпендикулярных направлению проводов.*

В рассмотренном нами случае можно говорить о емкости и индуктивности на единицу длины, рассматривая энергию отдельных слоев, перпендикулярных направлению проводов. Это имеет смысл лишь потому, что **E** и **H** лежат в плоскостях, перпендикулярных проводам, и в этих плоскостях поля квазистатические. Мы выяснили в итоге, с какими условиями связана возможность простого, до-максвелловского рассмотрения.

Если взять лехерову систему очень больших размеров, то мы имеем право пользоваться в качестве приближения теорией, относящейся к бесконечно длинной системе. Но как быть в случае простой антенны? Изложенная теория почти справедлива для многих практически важных случаев, например для горизонтальной антенны, находящейся на расстоянии от земли, малом по сравнению с ее длиной. Остается вопрос, как обстоит дело в случае антенны в виде так называемого открытого проводника (вибратора)? Этот вопрос требует особого рассмотрения.

Мы убедились, что ряд важнейших физических проблем приводит к одномерному волновому уравнению. Нам нужно теперь заняться исследованием колебаний одномерных распределенных систем. Нам нужно вычитать из этих уравнений ответы на ряд физических вопросов.

Начнем с рассмотрения несколько более сложного уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Eq\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\rho q\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

или, считая, что q — константа, и обозначая $E=p(x)$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right]=\rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{18}$$

Теория краевых задач и теория интегральных уравнений развивались на этом сравнительно простом примере.

Если p и ρ — постоянны, то, обозначив

$$a^2=\frac{p}{\rho}, \tag{19}$$

имеем:

$$a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{20}$$

Уравнение системы с одной степенью свободы имеет целый *класс* решений, содержащий две произвольные постоянные. Решения уравнений в частных производных образуют еще гораздо более широкий класс. Чтобы сделать задачу определенной, нужно прежде всего задать краевые условия, вовсе не связанные с данным уравнением. Само уравнение лишь в очень малой степени задает вид решения.

Уравнению с постоянными p и ρ, т. е. уравнению (20), удовлетворяет всякая функция вида

$$y=f_1(x-at)+f_2(x+at), \tag{21}$$

где f_1 и f_2 — совершенно произвольные функции. Это — чрезвычайно общее решение. Оно почти ничего не говорит о характере процесса.

Но физика ставит вполне *определенные* задачи, причем здесь возможны гораздо более разнообразные постановки задач, чем в случае сосредоточенных систем, например, такие:

1. Как побежит удар по бесконечному стержню?

2. Стержень ограничен (нужно указать при этом физические условия на концах; они могут быть, например, закреплены). Требуется найти колебание, возникающее при заданных начальных условиях.

Разнообразие физических задач, возникающих в случае распределенных систем, сказывается в следующем.

1. В характере объекта; например, в том, каковы условия на концах стержня; если они закреплены, то

$$y_{x=0}=0, \qquad y_{x=l}=0 \text{ при } t\geqslant 0$$

(l — длина стержня).

2. В начальных условиях; в случае стержня начальные условия состоят в задании распределения отклонения и скорости по всему стержню в начальный момент:

$$y(x, 0)=f(x), \qquad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t}=F(x).$$

Здесь $f(x)$ и $F(x)$ — заданные функции.

В случае стержня, закрепленного на концах, задача ставится так: нужно найти такую функцию $y(x, t)$, которая удовлетворяет:

1) уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right]=\rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \tag{1}$$

2) условиям на концах

$$y_{x=0}=0, \qquad y_{x=l}=0 \qquad (t\geqslant 0); \tag{2}$$

3) начальному условию

$$y(x, 0)=f(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant l); \tag{3}$$

4) начальному условию

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t}=F(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant l). \tag{4}$$

Физическая система определена только тогда, когда, кроме дифференциального уравнения, заданы условия на концах. Кроме того, мы должны рассматривать определенный опыт, — он определяется начальными условиями.

Можно ли найти такую функцию $y(x, t)$, которая удовлетворяет условиям (1)—(4)? Оказывается, что можно и что эта функция — *единственная*. Если мы нашли какое-то решение, то мы нашли то, что нужно. Это очень облегчает дело. Доказательство единственности решения имеет поэтому очень важное значение.