ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ

(*9/XII 1931 г.*)

Некоторые замечания о неоднородной электрической задаче. Различные краевые условия. Доказательство единственности решения и его связь с законом сохранения энергии. Способ Бернулли: разделение переменных. Постановка краевой задачи. Понятие о собственных значениях и собственных функциях.

Мы рассмотрели физическую сторону вопросов о колебаниях распределенных систем (механических и электрических) и установили, к каким типам уравнений приводят эти вопросы (в однородных задачах). В общем случае дело сводится к уравнениям типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial y}{\partial x}\right)=q\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \qquad (1)$$

Остановимся коротко еще раз на электрической системе. Мы рассмотрели случай параллельных проводов и *для этого случая* оправдали „домашний“, до-максвелловский способ вывода — способ Кирхгофа. Он приводит к уравнениям:

$$\frac{\partial I}{\partial x}=-C\frac{\partial V}{\partial t}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{L}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t}. \qquad (3)$$

При этом L и C (самоиндукция и емкость на единицу длины) были постоянными. Пусть провода непараллельны, но непараллельность очень мала, т. е. на участке, сравнимом с расстоянием между проводами, последнее меняется очень мало (это — вполне определенное высказывание относительно порядка малости; в некоторых других задачах предполагается малость расстояния по отношению к длине волны). В этом случае можно пользоваться той же теорией, но считая, что C и L — функции расстояния между проводами. При этом

$$C=\frac{\varepsilon}{2\ln\frac{r_2}{r_1}}, \qquad L=2\mu\ln\frac{r_2}{r_1},$$

но нужно помнить, что такой подход верен только приближенно. Погрешность здесь можно оценить.

Исключая V, мы получаем для тока уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial I}{\partial x}\right)=\frac{L}{c^2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}.$$

Рассуждения, с помощью которых мы пришли к уравнениям (2) и (3), неприменимы для одного провода.

Нас интересует *конечная* струна, *конечная* лехерова система и т. п. В таких случаях нужно задать условия на концах. Для стержня, закрепленного на концах, эти условия очевидны: концы неподвижны в течение всего времени:

$$y(0,\ t)=0,\quad y(l,\ t)=0. \tag{4}$$

Уравнением (1) и этими двумя условиями движение системы еще не охарактеризовано полностью, хотя сама система характеризуется ими вполне. Заметим для сравнения с дискретными системами: то, что там задается числом уравнений[1], здесь определяется граничными условиями.

Для того, чтобы задача была определена, нужно еще задать *начальные* условия для смещения

$$y(x,\ 0)=f(x)$$

и для скорости

$$\frac{\partial y(x,\ 0)}{\partial t}=F(x).$$

Требуется решить задачу о том, как ведет себя заданная система (определенная уравнением в частных производных и граничными условиями) при заданных начальных условиях, т. е. найти $y(x,\ t)$. Прежде чем заняться решением этой задачи, рассмотрим еще некоторые другие типы возможных граничных условий.

В электрической задаче стержню с закрепленными концами соответствует лехерова система, разомкнутая на концах. На разомкнутом конце ток I должен равняться нулю, так как в противном случае на конце происходило бы накопление заряда и неограниченное нарастание напряжения.

Каковы граничные условия в случае стержня, закрепленного на одном конце и свободного на другом (рис. 147)?

Сила, возникающая вследствие деформации, есть

$$F=-E\frac{\partial y}{\partial x}.$$

На свободном конце эта сила равна нулю. В самом деле, в противном случае на бесконечно малый концевой элемент стержня действовала бы конечная сила и возникали бы бесконечные уско-

[1] [См. 30-ю лекцию части I, уравнения (1).]

рения. Следовательно, если мы не допускаем возможности бесконечных ускорений, здесь должно быть

$$y(0, t)=0, \quad \frac{\partial y(l, t)}{\partial x}=0.$$

Если оба конца свободны, то

$$\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial y(l,t)}{\partial x}=0. \tag{5}$$

Таким образом, в зависимости от задачи получаются разнообразные граничные условия.

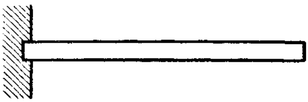

Рис. 147.

Рис. 148.

Обратимся снова к электрическим системам.

Пусть провод заземлен (рис. 148). Легко видеть, такое требование должно выполняться на заземленном конце. На нем напряжение равно нулю, т. е. $V=0$, откуда $\frac{\partial V}{\partial t}=0$. Следовательно, на основании (2) на заземленном конце (при $x=0$) имеем:

$$\frac{\partial I}{\partial x}=0.$$

Если заземлены оба конца, то это требование должно выполняться как при $x=0$, так и при $x=l$.

В некоторых учебниках в случае условий типа (4) говорят о граничных задачах первого рода, а в случае условий типа (5) — о граничных задачах второго рода. Но, как мы видели, возможны и смешанные задачи.

Есть еще один тип граничных условий, который для нас очень важен.

Пусть провод заземлен на одном конце через конденсатор (рис. 149, *а*). Этому соответствует стержень, закрепленный через пружину (рис. 149, *б*). Стержень с сосредоточенной массой на конце (рис. 150, *б*) соответствует проводу, заземленному через индуктивность (рис. 150, *а*). Такие задачи не менее важны для нас, чем „классические“ задачи первого и второго рода.

Остановимся на случае провода, заземленного через емкость. Напишем для правого конца уравнение

$$-\frac{\partial I}{\partial x}=C\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{6}$$

Здесь I — ток на конце провода; V — напряжение между точками провода A, B. Напряжение на конденсаторе есть

$$V=\frac{Q}{C_0}, \tag{7}$$

где Q — заряд конденсатора. В конденсаторе течет ток

$$I=\frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{8}$$

Ток, определяемый этим соотношением, — тот же ток, что течет через конец провода. Напряжение, определяемое соотношением

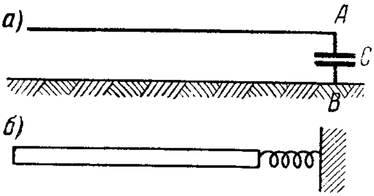

Рис. 149.

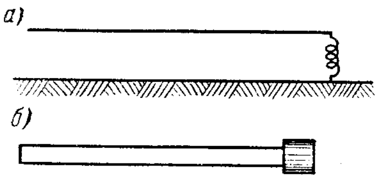

Рис. 150.

(7), совпадает с напряжением между точками A и B. Следовательно, мы можем подставить (7) и (8) в (6), что дает:

$$-\frac{\partial I}{\partial x}=\frac{C}{C_0}I. \tag{9}$$

Таково условие на конце, заземленном через конденсатор. Аналогичное условие мы получим, если стержень закреплен через пружину.

Возможны также граничные условия более сложные, чем (9), но пока что мы не будем их рассматривать. Заметим только, что в случае индуктивности (массы) на конце, граничное условие имеет вид, отличный от (9).

Если конденсатор включен на конце $x=0$, мы получим, рассуждая так же, как для конца $x=l$;

$$\frac{\partial I}{\partial x}=\frac{C}{C_0}I \tag{10}$$

(знак здесь другой).

Граничные условия (9) и (10) являются более общими, чем (4) или (5). В частности, они в себя включают случаи, рассмотренные ранее. Действительно, пусть на конце $x=0$ $C_0=0$. Чтобы $\partial I/\partial x$ оставалось конечным, необходимо $I(0,t)=0$. Это — случай разомкнутого конца. Пусть $C_0=\infty$. Здесь должно быть $\partial I(0,t)/\partial x=0$. Это — случай заземленного конца.

Таким образом, мы охватим все указанные случаи, если составим окончательно такую схему:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right]=q(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \qquad (11а)$$

$$\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}=\alpha y(0,t), \quad -\frac{\partial y(l,t)}{\partial x}=\beta y(l,t) \quad (\text{при } t\geqslant 0); \qquad (11б)$$

$$y(x,0)=f(x), \quad \frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=F(x). \qquad (11в)$$

Наша задача — математическая обработка этой системы уравнений. В нее входят параметры $p(x)$, $q(x)$, α, β. По своему физическому смыслу параметры p и q во всем интервале значений x не равны нулю и положительны. Этому соответствует в дискретном случае положительная дефинитность квадратичных форм T и U.

Постоянные α и β равны в электрическом случае:

$$\alpha=C/C_0, \quad \beta=C/C_1.$$

По своему физическому смыслу они также существенно положительны.

Условия положительности величин p, q, α и β — не мелочь. Это предположение, необходимое для вывода ряда фундаментальных теорем, которые мы далее докажем. В частности, мы предполагаем, что p и q нигде не равны нулю. В случае, если это условие не выполнено, возникает *другая* задача, математические рассуждения будут другие.

Итак, будем исследовать математически нашу схему (11).

Пусть мы нашли какое-нибудь решение $y(x,t)$, удовлетворяющее этой схеме. Можем ли мы утверждать, что наша физическая проблема решена?

Можно доказать, что условия (11) достаточны для однозначного определения функции y. Поэтому, если найдено *какое-то* решение системы (11), то найдено *правильное* решение поставленной задачи. Это доказывается с помощью общего приема, и притом довольно легко. Доказательство имеет прямой физический смысл.

Вернемся к уравнениям (2) и (3). Умножая первое на V, второе — на I и складывая, имеем:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(IV)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{CV^2}{2}+\frac{LI^2}{2c^2}\right).$$

Проинтегрируем это равенство по x между какими-нибудь пределами x_1 и x_2:

$$(IV)_1-(IV)_2=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{CV^2}{2}+\frac{LI^2}{2c^2}\right)dx. \tag{12}$$

Интеграл выражает полную электрическую и магнитную энергию всего взятого куска провода $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Таким образом, справа написано приращение за единицу времени полной энергии этого куска. Мы останемся в согласии с законом сохранения энергии, если предположим, что в любой точке IV есть количество энергии, проходящее в единицу времени через соответствующую плоскость $x=\text{const}$. Уравнение (12) получает тогда такое толкование: увеличение энергии куска (x_1, x_2) равно разности вошедшей и вышедшей энергии. Это — частный случай теоремы Пойнтинга: поток энергии выражается здесь произведением тока на напряжение.

Составим для механического случая уравнения, аналогичные смешанным уравнениям для I и V. Напишем:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi, \qquad \frac{\partial y}{\partial t}=\psi. \tag{13}$$

Уравнения (11а) и (13) связывают φ и ψ соотношениями:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}(p\varphi)=q\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Умножив первое уравнение на φ, второе — на $-\psi$ и сложив, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}(p\varphi\psi)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p\varphi^2}{2}+\frac{q\psi^2}{2}\right).$$

Интегрируя это от 0 до l, находим далее:

$$p\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\Big|_0^l=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l\left\{\frac{p}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{q}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right\}dx. \tag{14}$$

Мы вывели эту зависимость независимо от какой-либо физической интерпретации: это — математическое соотношение. Но легко вычитать физический смысл входящих в него выражений. Действительно, справа стоит производная по времени от суммы потенциальной и кинетической энергии стержня. Следовательно,

$$-p\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t} \tag{15}$$

— это количество энергии, проходящей за единицу времени через сечение в положительном направлении x. Можно рассматривать это выражение как поток энергии.

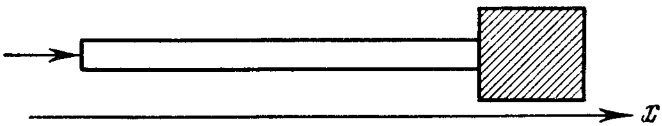

Рис. 151.

Из выражения (15) вытекают интересные следствия.

Пусть мы *толкаем* стержнем груз (рис. 151). Обратим внимание на знаки. Стержень сжимается, причем справа — меньше, чем слева ($\partial y/\partial x < 0$); со временем сжатие нарастает, т. е. скорость $\partial y/\partial t > 0$; значит, поток энергии положителен; он течет слева направо. Пусть теперь мы *тянем* груз с помощью прикрепленного к нему стержня. Тогда $\partial y/\partial x$ меняет знак, но $\partial y/\partial t$ тоже меняет знак. Поток энергии имеет, следовательно, то же направление, что и в первом случае, т. е. энергия течет теперь в направлении, обратном движению стержня. Красивый пример — поток энергии в ременной передаче (рис. 152). Работающая (верхняя) часть ремня движется в одном направлении, а поток энергии по ремню — в обратном направлении.

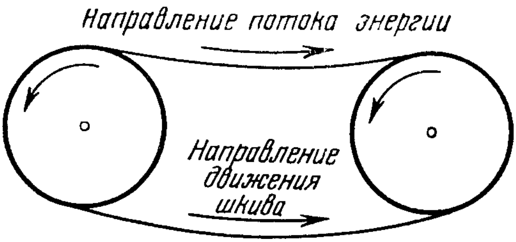

Рис. 152.

Вернемся к математике, к вопросу об однозначности решений. Пусть y_1 и y_2 — две функции, удовлетворяющие схеме (11). Образуем новую функцию

$$y = y_1 - y_2.$$

Функция y тоже удовлетворяет дифференциальному уравнению (11а), так как оно линейно и однородно. Поскольку граничные условия (11б) тоже линейны и однородны, y удовлетворяет и граничным условиям. Но как обстоит дело с *начальными* условиями?

$$\left.\begin{array}{ll} y_1 = f(x), & \frac{\partial y_1}{\partial t} = F(x), \\ y_2 = f(x), & \frac{\partial y_2}{\partial t} = F(x), \end{array}\right\} \quad (t=0).$$

Отсюда видно, что разность y_1 и y_2 удовлетворяет другим начальным условиям, а именно:

$$y(x,0)=0, \quad \frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=0). \tag{16}$$

Спрашивается, можем ли мы решить уравнение при этих начальных условиях? Оказывается, что им удовлетворяет только решение, тождественно равное нулю:

$$y = y_1 - y_2 \equiv 0.$$

Следовательно, если есть два решения, удовлетворяющие всей схеме (11), то они совпадают, т. е. она имеет только *одно* решение.

Докажем, что решение, удовлетворяющее схеме (11а), (11б) и (16) (с нулевыми начальными условиями), тождественно равно нулю. Проинтегрируем соотношение (14) от 0 до t:

$$\int_0^t \left[p\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right]_0^l dt = \int_0^l \left[\frac{p}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \frac{q}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right]_0^t dx.$$

При $t=0$ имеем $y=0$ для всех значений x, а следовательно, и $\partial y/\partial x=0$. Кроме того, при $t=0$ имеем всегда $\partial y/\partial t=0$. Следовательно, при $t=0$ правая часть равна нулю, и мы имеем:

$$\int_0^t \left[p\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right]_0^l dt = \int_0^l \left[\frac{p}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_t^2 + \frac{q}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_t^2\right] dx.$$

Преобразуем левую часть, пользуясь граничными условиями (11б). Получаем:

$$\left[p\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right]_0 = \alpha\, p_0 y_0 \frac{\partial y_0}{\partial t} = \frac{\alpha p_0}{2}\frac{\partial y_0^2}{\partial t},$$

$$\left[p\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right]_l = -\beta\, p_l y_l \frac{\partial y_l}{\partial t} = -\frac{\beta p_l}{2}\frac{\partial y_l^2}{\partial t},$$

и следовательно,

$$-\alpha p_0 y_0^2 - \beta p_l y_l^2 = \int_0^l \left[\frac{p}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{q}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right] dx, \tag{17}$$

где все величины y_0, y_l, $\partial y/\partial x$, $\partial y/\partial t$ взяты для момента t.

Мы видим теперь, почему существенны знаки величин α, β, p и q. Так как $\alpha > 0$, $\beta > 0$, слева стоит существенно отрицательная величина, справа стоит существенно положительная величина. Равенство (17) возможно, только если

$$y_0 = 0, \quad y_l = 0,$$

и для любого x

$$\frac{\partial y}{\partial x} \equiv 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} \equiv 0.$$

Это — единственная возможность удовлетворить схеме (11а), (11б) и (16). Следовательно, y есть константа, а так как для $t = 0$ она равняется нулю, то она есть нуль для любого t, и, следовательно,

$$y_1 - y_2 = 0;$$

решения y_1 и y_2 совпадают. Способ доказательства единственности, основанный на составлении разности, является очень общим.

Физически ясно, в чем тут дело: y — некоторое движение, при котором в начальный момент в стержне нет энергии; с концов энергия не поступает, а значит, энергии не будет и в последующие моменты времени. Но сейчас необходимости в этом толковании нет: мы доказали единственность решения математически.

Мы переходим ко второй проблеме. Каким способом действительно решают задачу о колебаниях струны, стержня, системы проводов? Есть общий путь, не зависящий от вида функций $p(x)$ и $q(x)$. Сначала мы пойдем этим общим путем, не специализируя вида этих функций, а затем рассмотрим частный случай, когда p и q постоянны. Здесь решение доводится до конца (при не постоянных параметрах решение доводится до конца лишь в отдельных случаях). Далее мы снова вернемся к переменным p и q, после того как на частном случае постоянных p и q выясним ряд фундаментальных свойств, сохраняющихся и для общего случая. Для последнего мы сможем выяснить все основные свойства движения.

Существуют два различных способа нахождения функции, удовлетворяющей волновому дифференциальному уравнению в случае постоянных параметров: способ Даламбера и способ Бернулли. Можно, однако, показать, что они дают одно и то же. Мы воспользуемся способом Бернулли, который больше подходит для задачи о стоячих волнах и, повидимому, в общем случае переменных параметров является единственным.

Постараемся найти частное решение вида

$$y = \varphi(x)\psi(t). \tag{18}$$

В левой части дифференциального уравнения (11a) дифференцирование производится только по x, в правой части — только по t. Подставляя (18) в (11a), получаем:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi}{dx}\right]\psi(t) = q(x)\varphi(x)\frac{d^2\psi}{dt^2}.$$

Разделим обе части уравнения на $q(x)\varphi(x)\psi(t)$:

$$\frac{1}{q(x)\varphi(x)}\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\right] = \frac{1}{\psi(t)}\frac{d^2\psi(t)}{dt^2}.$$

Теперь заметим следующее: правая часть зависит только от t, левая — только от x. Но левая и правая части должны быть равны между собой при любых x и t. Это возможно, только если правая часть не зависит от t, а левая не зависит от x (если бы при изменении t правая часть менялась, то ввиду того, что левая часть не меняется, равенство правой и левой частей было бы невозможно). Таким образом, левая и правая части равны одной и той же постоянной. Обозначив ее λ, получаем *два* уравнения:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \lambda\psi, \qquad \frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right) = \lambda q\varphi.$$

Чему равна постоянная λ — здесь безразлично: при всяком ее значении получается решение.

Мы сделали громадный шаг вперед: вместо одного уравнения в частных производных мы имеем два: но зато *обыкновенных* дифференциальных уравнения.

Граничные условия не зависят от t. Следовательно, им можно удовлетворить подбором φ (помня о доказанной теореме единственности). Таким образом, решение задачи сводится к следующему:

1. Решить уравнение

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \lambda\psi. \tag{19}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right)=\lambda q\varphi \tag{20}$$

при граничных условиях:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx}&=\alpha\varphi \qquad \text{при } x=0,\\ \frac{d\varphi}{dx}&=-\beta\varphi \qquad \text{при } x=l. \end{aligned} \tag{21}$$

Уравнение (19) решается просто. Для уравнения же (20) и здесь имеет место совершенно новая постановка задачи — классическая краевая задача.

До сих пор нам приходилось находить решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях. Это — задача Коши. Вообще говоря, „приличное“ уравнение имеет для заданных начальных условий одно и только одно решение: можно отыскать такое φ, чтобы при $x=0$ было

$$\varphi=a, \qquad \frac{d\varphi}{dx}=b,$$

где a и b — заданные постоянные. Но теперь постановка задачи для $\varphi(x)$ — совершенно другая. Требования (21) относятся не к одной точке, а к *двум*. Если λ задано и заданы условия вида (21) для двух значений x, то, вообще говоря, *не существует* требуемого решения. Типичная особенность такой задачи как раз и заключается в том, что, вообще говоря, при фиксированном уравнении (20) она *не имеет* решения.

Нам приходит на помощь то обстоятельство, что λ заранее не определено. Оказывается, что при положительных α, β, p и q существуют такие значения λ, при которых задача (20), (21) имеет решение. Вообще говоря, таких значений — бесконечное число, они образуют счетное множество. Задача и заключается в нахождении таких значений λ и в нахождении соответствующих им функций $\varphi(x)$.

Итак нужно:

1) найти указанные значения λ; они называются характеристическими или собственными числами краевой задачи;

2) при каждом таком значении λ решить уравнение (20) с условиями (21), т. е. найти удовлетворяющие им функции; они называ-

ются фундаментальными или собственными функциями данной краевой задачи.

Мы получим, таким образом, ряд частных решений нашей задачи.

Мы проделаем это на простых примерах, взяв p и q постоянными, и получим при этом в качестве решений простые, хорошо известные функции. В самом общем случае при заданных p и q, зависящих от x, мы не умеем интегрировать уравнение (20): нет таких обычных „легких“ функций, которые бы ему удовлетворяли.

Далее возникает вторая фундаментальная задача — приспособить решение к заданным начальным условиям. Она сводится к очень конкретной и определенной математической операции — к разложению данной функции, удовлетворяющей определенным условиям, в ряд по собственным (фундаментальным) функциям данной задачи. Это — одна из наиболее изящных задач математической физики.

ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(*13/XII 1931 г.*)

Уравнение, сходное с уравнением Шрёдингера. Периодические краевые условия. Собственные числа оператора. Основные свойства собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля. Вопрос о разложимости функции в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. Вопрос сходимости.

В прошлый раз мы говорили о том, как можно подойти к решению нашей фундаментальной задачи, включающей в себя дифференциальное уравнение, краевые и начальные условия:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right]=q(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}=-\alpha y(0,t); \tag{2}$$

$$\frac{\partial y(l,t)}{\partial x}=-\beta y(l,t); \tag{3}$$

$$y(x,0)=f(x); \tag{4}$$

$$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=F(x). \tag{5}$$