ются фундаментальными или собственными функциями данной краевой задачи.

Мы получим, таким образом, ряд частных решений нашей задачи.

Мы проделаем это на простых примерах, взяв p и q постоянными, и получим при этом в качестве решений простые, хорошо известные функции. В самом общем случае при заданных p и q, зависящих от x, мы не умеем интегрировать уравнение (20): нет таких обычных „легких" функций, которые бы ему удовлетворяли.

Далее возникает вторая фундаментальная задача — приспособить решение к заданным начальным условиям. Она сводится к очень конкретной и определенной математической операции — к разложению данной функции, удовлетворяющей определенным условиям, в ряд по собственным (фундаментальным) функциям данной задачи. Это — одна из наиболее изящных задач математической физики.

ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(*13/XII 1931 г.*)

Уравнение, сходное с уравнением Шрёдингера. Периодические краевые условия. Собcтвенные числа оператора. Основные свойства собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля. Вопрос о разложимости функции в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. Вопрос сходимости.

В прошлый раз мы говорили о том, как можно подойти к решению нашей фундаментальной задачи, включающей в себя дифференциальное уравнение, краевые и начальные условия:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right] = q(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = -\alpha y(0, t); \tag{2}$$

$$\frac{\partial y(l, t)}{\partial x} = -\beta y(l, t); \tag{3}$$

$$y(x, 0) = f(x); \tag{4}$$

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = F(x). \tag{5}$$

При этом мы не рассматриваем трения, выделения теплоты. Кроме того, мы исследуем собственные колебания, т. е. предполагаем, что нет внешних сил (мы видели, что введение внешних сил сводится к добавлению члена вида $f(x, t)$ в левой части дифференциального уравнения).

Рассматриваемая задача интересна и потому, что близка к тем, которые приходится решать в волновой механике.

Возьмем такую модель: струна прикреплена к упругой мембране, не имеющей массы (рис. 153). На струну действует тогда

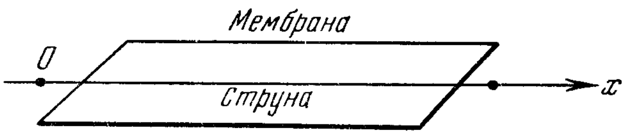

Рис. 153.

сила, пропорциональная ее отклонению y, т. е. квазиупругая сила. Уравнение колебаний струны будет

$$-\sigma(x)\,y+\frac{\partial}{\partial x}\left(p\,\frac{\partial y}{\partial x}\right)=q\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{6}$$

где $\sigma(x)$ — коэффициент упругости мембраны.

Уравнение Шрёдингера примыкает к уравнению (6) теснее, чем к уравнению (1). Мы не будем рассматривать уравнения типа (6), так как не стоит утяжелять наши рассуждения, но большинство наших выводов будет применимо и к уравнениям вида (6).

Пусть мы имеем не совсем прямолинейный стержень. Если кривизна мала, т. е. $d/R \ll 1$, где d — толщина стержня, R — радиус кривизны, и если x — расстояние по оси стержня, то наши рассуждения остаются в силе, уравнение будет таким же, как и для прямолинейного стержня.

Предположим теперь, что стержень сомкнулся в кольцо (рис. 154). Электрический аналог этого случая — лехеровы провода, образующие два параллельных кольца, одно над другим (провода замкнуты). Каковы в этом случае краевые условия?

Здесь $x=0$ и $x=l$ — это одна и та же точка. Естественно поэтому требовать, чтобы y и $\partial y/\partial x$ были одинаковы для $x=0$ и для $x=l$. Таким образом, в этом случае мы имеем существенно иные краевые условия, выражающие требование периодичности y и $\partial y/\partial x$ по x с периодом l:

$$y(0, t) = y(l, t); \tag{7}$$

$$\frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial y(l, t)}{\partial x}. \tag{8}$$

Теорему об однозначности решения можно и в этом случае доказать точно так же, как для прежних граничных условий (2) и (3). Но характер движения при условиях (7) и (8) существенно другой.

Вернемся к уравнению (1). В прошлый раз мы писали:

$$y(x, t) = \varphi(x)\psi(t). \tag{9}$$

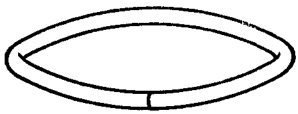

Рис. 154.

При этом переменные разделяются, и мы получаем два уравнения в полных производных. Метод разделения переменных — один из самых мощных способов решения уравнений в частных производных.

Уравнения в полных производных, получающиеся после разделения переменных, таковы:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\lambda\psi; \tag{10}$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi}{dx}\right] = -\lambda q(x)\varphi \tag{11}$$

(λ — постоянная, положительная или отрицательная — это пока безразлично), причем

$$\frac{d\varphi(0)}{dx} = \alpha\varphi(0), \qquad \frac{d\varphi(l)}{dx} = -\beta\varphi(l). \tag{12}$$

Если проделать то же самое для более общего случая (6), то получится вместо (11) уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi}{dx}\right] - \sigma(x)\varphi = -\lambda q(x)\varphi. \tag{13}$$

Уравнение (10) сразу решается. В нем λ должно быть таким, чтобы система (11), (12) удовлетворялась. Те значения параметра λ, для которых система (11), (12) имеет решение, отличное от нуля, называются характеристическими числами (или собственными значениями). Для них существенно то дополнительное условие, что

$$\alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0,$$

$$p(x) > 0, \quad q(x) > 0,$$

а в случае уравнения (13) еще и $\sigma \geqslant 0$.

Уравнения (11) с краевыми условиями (12) составляют проблему Штурма — Лиувилля. Аналогичная проблема имеет место и в теории теплопроводности, где особенно важны случаи $\sigma \neq 0$. Наши интересы в основном относятся к случаю $\sigma = 0$. Поскольку речь идет о частных решениях, можно не говорить о начальных условиях.

Дифференциальное уравнение для φ можно записать иначе. Выражение, стоящее в левой части, получается в результате того, что мы производим над функцией φ некоторую линейную операцию. Мы можем написать его в виде $L(\varphi)$, где L — некоторый оператор:

$$L(\varphi) = -\lambda q\varphi.$$

Можно далее отнести $q(x)$ в левую часть. Тогда уравнение (11) напишется так:

$$L(\varphi) = -\lambda\varphi,$$

причем оператор L — *линейный*, т. е.

$$L(\varphi_1 + \varphi_2) = L(\varphi_1) + L(\varphi_2).$$

Задача о нахождении чисел λ часто формулируется так: нужно найти *собственные значения оператора* L. Все задачи волновой механики сводятся к определению собственных чисел и собственных функций тех или иных линейных операторов.

Система линейных алгебраических уравнений также может быть записана с помощью оператора. Пусть y — совокупность n чисел, A — оператор (ему соответствует некоторая матрица). Тогда

$$Ay = -\lambda y$$

есть задача о решении системы линейных уравнений с параметром λ. Такова задача о нахождении собственных частот дискретной системы.

Операторная интерпретация задач о собственных значениях получила в настоящее время чрезвычайно широкое распространение. Возникла новая отрасль математики — операторное исчисление.

Оно дает общие методы нахождения собственных значений и собственных функций. Мы рассматриваем очень частный случай такой задачи.

Продолжим наше исследование. Каков характер движения во времени?

Если $\lambda < 0$, то решения уравнения (10) будут вида $e^{\pm\sqrt{|\lambda|}\,t}$; если же $\lambda > 0$, то решения этих уравнений будут содержать косинус и синус. Таким образом, вопрос о том, каков *знак* характеристического числа задачи Штурма — Лиувилля, имеет существенное значение. Оказывается, что эти характеристические числа всегда положительны, за исключением одного случая, когда одно из них равно нулю. В этом состоит *первая* основная теорема о собственных числах задачи Штурма — Лиувилля. Мы сегодня не будем ее доказывать.

Отбросим пока случай, когда имеется характеристическое число $\lambda = 0$, и примем, что все $\lambda > 0$. Уравнение (10) имеет для данного частного значения λ общее решение:

$$\psi = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$

причем

$$\omega^2 = \lambda.$$

Соответствующее движение будет

$$y = \varphi(x)(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

Каждому значению λ отвечает частное решение такого вида — гармоническое колебание, частота которого равна квадратному корню из взятого характеристического значения рассматриваемой проблемы Штурма—Лиувилля; соответствующее ему $\varphi(x)$ дает *форму* колебания, т. е. распределение амплитуды по x. Все возможные решения соответствуют гармоническим колебаниям с определенным периодом и определенной формой.

В системе из дискретных масс было возможно некоторое конечное число N гармонических колебаний с соответствующими амплитудами, меняющимися от точки к точке[1]. Здесь, как утверждает вторая теорема о собственных значениях задачи Штурма — Лиувилля, имеется *бесконечное множество* характеристических чисел: наша система способна колебаться с *бесконечным* набором возможных частот (существенное отличие от дискретной системы),

[1] [См. 30-ю лекцию части I.]

которые образуют не континуум, а счетное множество. Это множество не имеет точек сгущения в конечном интервале: с ростом номера частота неограниченно растет. Можно задать номер частоты так, что она будет как угодно велика.

Эту вторую теорему мы тоже не будем сегодня доказывать[1]. Заметим пока только следующее. Математическая теория строится так: сначала ставится вопрос о том, существуют ли характеристические числа, и доказывается, что всегда существует хотя бы одно, а затем уже из этого выводится, что их существует бесчисленное множество.

Пусть мы нашли все λ_i и все $\varphi_i(x)$, т. е. нашли $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ Эти решения удовлетворяют дифференциальному уравнению и граничным условиям. Но чтобы решить поставленную задачу, нужно удовлетворить еще начальным условиям (4) и (5). Можем ли мы быть уверены, что всегда удастся припасовать решение так, чтобы при $t=0$ y обращалось в $f(x)$, а $\partial y/\partial t$ в $F(x)$?

В случае дискретных систем вопрос ставится совершенно так же. Мы имели частные решения вида

$$y^{(k)}=a^{(k)}\cos\omega_i t, \qquad y_i^{(k)}=a^{(k)}\sin\omega_i t.$$

Общее решение для k-той координаты было

$$y^{(k}=\sum_i a_i^{(k)}(A_i\cos\omega_i t+B_i\sin\omega_i t) \tag{14}$$

и требовалось, чтобы при $t=0$ $y^{(k)}$ и $\partial y^{(k)}/\partial t$ принимали для каждого k заданные значения. Эти начальные условия давали для A_i и для B_i по N линейных уравнений. Задача припасования ряда (14) к начальным условиям сводилась к решению этих систем линейных уравнений. Детерминант системы отличен от нуля, поэтому такая система допускает одно и только одно решение.

В случае распределенной системы имеются частные решения вида

$$\varphi_i(x)\cos\omega_i t, \qquad \varphi_i(x)\sin\omega_i t.$$

В силу линейности частным решением является также

$$y_i(x,t)=\varphi_i(x)(A_i\cos\omega_i t+B_i\sin\omega_i t),$$

[1] [Доказательства обеих теорем о собственных числах см. в 9-й и в 10-й лекциях части II.]

где A_i и B_i — постоянные. Если мы сложим ряд таких решений, то мы также получим решение. Это очевидно в случае *конечного* числа слагаемых. Предположим (пока что без обоснования), что это верно и для бесконечного числа слагаемых (мы действуем по аналогии). Итак, предположим, что мы имеем решение

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)(A_i\cos\omega_i t+B_i\sin\omega_i t). \tag{15}$$

Если мы сможем подобрать A_i так, что

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\varphi_i(x), \tag{16}$$

то этим мы удовлетворим первому начальному условию, а если мы сможем подобрать B_i так, что

$$F(x)=\sum_{i=1}^{\infty}B_i\omega_i\varphi_i(x), \tag{17}$$

то мы удовлетворим и второму начальному условию.

Таким образом, вопрос о возможности удовлетворить основным уравнениям и начальным условиям сводится к вопросу о том, можно ли представить заданную функцию в виде бесконечного ряда, состоящего из постоянных, умноженных на собственные функции нашей краевой задачи. Может ли любая функция от x быть разложена в ряд по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля?

В дискретных системах аналогичный вопрос был тривиальным, он сводился к решению системы линейных уравнений. Теперь же мы имеем дело не с конечными совокупностями величин, а с функцией. При этом появляются бесконечности двоякого рода: бесконечное число значений x и бесконечное число членов ряда. Поэтому поставленный вопрос является трудным. Мы еще вернемся к нему, а пока заметим, что в частном случае, когда мы можем написать функции $\varphi_i(x)$ *явно*, а именно в частном случае однородного стержня (или однородной струны), закрепленного на концах,

$$\varphi_i(x)=\sin\frac{i\pi x}{l}.$$

Таким образом, вопрос о возможности разложения по собственным функциям сводится здесь к следующему: можно ли разложить произвольную функцию, удовлетворяющую граничным условиям, в ряд Фурье по синусам? Мы видим, что ряд Фурье — очень частный случай ряда по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля. То, что он сыграл такую исключительную роль, связано с физической проблемой однородной струны.

Вернемся к общему случаю. Возьмем две фундаментальные функции $\varphi_i(x)$ и $\varphi_k(x)$, относящиеся к двум различным характеристическим числам λ_i и λ_k. Оказывается, что для них имеет место замечательное равенство:

$$\int_0^l q(x)\varphi_i(x)\varphi_k(x)\,dx = 0 \quad (i \neq k). \tag{18}$$

Если две функции удовлетворяют такому соотношению, то говорят, что они ортогональны по отношению к функции $q(x)$. В этом случае говорят об ортогональности *с весом*, в отличие от простой ортогональности:

$$\int_0^l \varphi_i(x)\varphi_k(x)\,dx = 0.$$

Для удобства часто вводят новую систему функций:

$$\psi_i(x) = \sqrt{q(x)}\,\varphi_i(x),$$

для которых имеет место простая ортогональность. Интеграл

$$\int_0^l q(x)\varphi_i^2(x)\,dx,$$

имеющий, как мы увидим, вполне определенный физический смысл, заведомо не равен нулю.

Заметим, что если фундаментальную функцию мы умножаем на постоянную, мы снова получаем фундаментальную функцию. Часто уславливаются брать такой множитель, чтобы было

$$\int_0^l q(x)\varphi_i^2(x)\,dx = 1. \tag{19}$$

В этом случае говорят, что функция $\varphi_i(x)$ нормирована.

В результате (18) легко найти коэффициенты разложения функции $f(x)$ по функциям $\varphi_i(x)$ задачи Штурма—Лиувилля. Умножим обе части равенства (16) на $\varphi_i(x)\,q(x)$ и проинтегрируем от 0 до l. Слева получаем:

$$\int_0 q(x)f(x)\varphi_i(x)\,dx.$$

Справа получится сумма, в которой ввиду свойства ортогональности (18) все интегралы равны нулю, за исключением того, который содержит $\varphi_i^2(x)$. Так как функции $\varphi_i(x)$ по предположению нормированы, то мы получаем:

$$A_i = \int_0 q(x) f(x) \varphi_i(x)\,dx. \tag{20}$$

Если известны все фундаментальные функции, то найти коэффициенты разложения не представляет трудностей. Таким образом, все как будто бы обстоит благополучно.

Но то, что мы сделали, абсолютно незаконно.

Справа в (16) стоит бесконечный ряд. Неизвестно, сходится ли он, а если сходится, то представляет ли он функцию $f(x)$. Нельзя легко относиться к таким вещам. Вот пример, на котором это хорошо видно.

Пусть в ряде (16) пропущена одна функция. Ряд остается бесконечным. Но теперь он не может представить любую функцию $f(x)$. В самом деле, пусть $f(x)$ есть как раз забытая функция из числа $\varphi_i(x)$. Тогда заведомо нельзя ее изобразить с помощью оставшегося ряда, так как он ортогонален к пропущенной функции.

В случае системы с конечным числом степеней свободы ясно, что посредством $N-1$ постоянных нельзя удовлетворить N начальным условиям. Теперь у нас бесконечное число постоянных и бесконечное множество начальных значений, и не сразу ясно, можно ли им удовлетворить, выкинув одну постоянную: $\infty - 1 = \infty$. Мы видим, что переход к бесконечному числу постоянных ведет к новым постановкам задачи.

Как возникли эти вопросы?

Первый, кто указал на возможность разложения по собственным функциям, был Бернулли. Он решил проблему струны именно таким способом. Он сказал: „Возможность разложения следует из того, что движение должно удовлетворять начальным условиям". Это было принято в штыки, так как в то время придерживались определения функции, данного Эйлером. Эйлер различал два класса функций:

1. Те, которые изображаются с помощью известных нам аналитических выражений.

2. Те, которые изображаются кривыми, „как-нибудь свободной рукой проведенными" (libera manu ducta).

По Бернулли же выходит, что такая форма струны, как на рис. 155, с одной стороны, может быть изображена с помощью тригонометрических функций (1-й класс функций по Эйлеру), а с другой стороны — это функция 2-го класса. На этом основании считали, что ее нельзя представить в виде *одной* функции 1-го класса (одного аналитического выражения).

Трудность может быть сформулирована так. Значеиие ряда (16) задается дискретным рядом величин (коэффициентов разложения), а нужно с их помощью представить функции $f(x)$ для континуума значений x. Множество коэффициентов счетное, а множество непрерывных функций, так кажется, „гораздо больше".

Теперь известно, в чем дело.

Рис. 155.

Современное определение функции таково: y есть функция от x, если каждому определенному x соответствует определенное y. Если о функции известно только это, то действительно ее нельзя разложить, вообще говоря, в ряд со счетным множеством чисел. Но оказывается, что множество *непрерывных* функций — тоже счетное; оно меньше по своей мощности, чем континуум. Дело в том, что непрерывную функцию достаточно определить в рациональных точках, тем самым она определена во *всех* точках. Рациональные же точки образуют счетное множество. Поэтому и оказывается, что мощность множества непрерывных функций не больше, чем мощность множества коэффициентов нашего ряда.

Первое строгое обоснование разложения в ряд Фурье было дано Дирихле. Даже теперь неизвестны необходимые условия разложения в ряд Фурье. Но известны достаточные условия, и нас, физиков, они удовлетворяют.

Перейдем к другому вопросу.

Что значит: ряд (16) сходится? Это значит, что функцию $f(x)$ можно точно представить рядом. С одной стороны, это для нас слишком много, с другой — это нам ничего не дает. Пусть известно, что ряд сходится. Отсюда еще нельзя ничего заключить о том, что дает конечное число членов. Физику вопрос о сходимости не интересует. Ее интересует другой вопрос: можно ли быть уверенным, что с помощью *конечного* числа членов удастся с достаточной точностью представить заданную функцию?

Доказательства, обосновывающие оба утверждения, тесно сплетаются, но принципиально — это разные утверждения. Нужно ясно их разграничивать. Если ряд сходится, то этого еще недостаточно, чтобы обосновать те действия, посредством которых мы получаем формулу (20). Не всякий сходящийся ряд можно интегрировать почленно. Ряд

$$\left(x - xe^{-x^2}\right) + \left(xe^{-x^2} - 2xe^{-2x^2}\right) + \ldots \tag{21}$$

сходится для каждого x. Сумму S_n первых n его членов можно представить в виде

$$S_n = x - nxe^{-nx^2}.$$

При $n \to \infty$ второй член стремится к нулю и сумма стремится к x.

Проинтегрируем ряд в интервале от 0 до 1. Взяв сначала сумму, а потом проинтегрировав, мы получим:

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}. \tag{22}$$

Будем теперь интегрировать почленно, а затем суммировать. Мы получим, просуммировав, интегралы от n первых членов:

$$\int_0^1 \left(x - nxe^{-nx^2}\right) dx = \frac{e^{-n}}{2}.$$

При $n \to \infty$ это выражение стремится к нулю, т. е. к пределу, отличному от (22). Этот пример показывает, что речь идет не о пустых придирках.

Для того, чтобы сходящийся ряд можно было интегрировать почленно, достаточно, чтобы ряд сходился *равномерно*. Это означает следующее.

Рассмотрим ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

Пусть

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

Если ряд сходится, то при фиксированных x для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что $|R_n| < \varepsilon$ при $n > N$.

Но возможны два случая.

1. Значение N зависит от x. Может случиться, что по мере подхода к определенному значению x число N неограниченно растет.

2. Значение N может быть выбрано независимо от x. Во втором случае говорят, что ряд сходится равномерно.

Ряд (21) сходится для всех x, но сходится неравномерно. В интересующем нас вопросе имеется следующая основная теорема (мы не будем ее доказывать): если $f(x)$ непрерывна, а $f'(x)$ и $f''(x)$ кусочно-непрерывны (т. е. имеются конечные куски, где эти производные непрерывны, и число таких кусков конечно), и если $f(x)$ удовлетворяет граничным условиям некоторой задачи Штурма — Лиувилля, то $f(x)$ может быть разложена в *равномерно сходящийся ряд* по собственным функциям этой задачи Штурма — Лиувилля. Эта теорема указывает достаточные условия разложимости. Более широких условий физика и не требует.

Если бы для того, чтобы представить с хорошим приближением данную функцию, нужно было принимать во внимание очень высокие члены разложения, то наши результаты не имели бы большого физического интереса, так как на основании молекулярных соображений мы знаем, что число отдельных колебаний конечно. К счастью, это не так.

Мы займемся далее конкретизацией высказанных в этой лекции результатов на определенных физических задачах, а затем вернемся к общим вопросам.

ШЕСТАЯ ЛЕКЦИЯ

(19/XII 1931 г.)

Задача об однородном стержне с закрепленными концами. Частоты и формы колебаний. Свойства, типичные и нетипичные для общего случая задачи Штурма—Лиувилля. Случай свободных концов. Случай, когда один конец свободен, а другой — закреплен. Случай электрической линии, нагруженной конденсатором. Случай электрической линии, нагруженной катушкой самоиндукции.

Вернемся к задаче Штурма—Лиувилля, сформулированной в прошлой лекции. Возьмем самый простой, всем известный пример. Этот пример практически чрезвычайно важен. Кроме того, в нем многие черты характерны для самой общей проблемы Штурма—Лиувилля.