Но возможны два случая.

1. Значение N зависит от x. Может случиться, что по мере подхода к определенному значению x число N неограниченно растет.

2. Значение N может быть выбрано независимо от x. Во втором случае говорят, что ряд сходится равномерно.

Ряд (21) сходится для всех x, но сходится неравномерно.

В интересующем нас вопросе имеется следующая основная теорема (мы не будем ее доказывать): если $f(x)$ непрерывна, а $f'(x)$ и $f''(x)$ кусочно-непрерывны (т. е. имеются конечные куски, где эти производные непрерывны, и число таких кусков конечно), и если $f(x)$ удовлетворяет граничным условиям некоторой задачи Штурма — Лиувилля, то $f(x)$ может быть разложена в *равномерно сходящийся ряд* по собственным функциям этой задачи Штурма — Лиувилля. Эта теорема указывает достаточные условия разложимости. Более широких условий физика и не требует.

Если бы для того, чтобы представить с хорошим приближением данную функцию, нужно было принимать во внимание очень высокие члены разложения, то наши результаты не имели бы большого физического интереса, так как на основании молекулярных соображений мы знаем, что число отдельных колебаний конечно. К счастью, это не так.

Мы займемся далее конкретизацией высказанных в этой лекции результатов на определенных физических задачах, а затем вернемся к общим вопросам.

ШЕСТАЯ ЛЕКЦИЯ

(*19/XII 1931 г.*)

Задача об однородном стержне с закрепленными концами. Частоты и формы колебаний. Свойства, типичные и нетипичные для общего случая задачи Штурма—Лиувилля. Случай свободных концов. Случай, когда один конец свободен, а другой — закреплен. Случай электрической линии, нагруженной конденсатором. Случай электрической линии, нагруженной катушкой самоиндукции.

Вернемся к задаче Штурма—Лиувилля, сформулированной в прошлой лекции. Возьмем самый простой, всем известный пример. Этот пример практически чрезвычайно важен. Кроме того, в нем многие черты характерны для самой общей проблемы Штурма—Лиувилля.

Пусть $p(x)$ и $q(x)$ постоянны. Обозначим

$$\frac{p}{q}=a^2$$

и будем искать частные решения вида

$$y=\varphi(x)\psi(t). \tag{1}$$

Для $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ получаем уравнения:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{\lambda^2}{a^2}\varphi=0; \tag{2}$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}+\lambda^2\psi=0. \tag{3}$$

Мы покажем, что собственные значения λ положительны. Тогда можно обозначить

$$\lambda=\omega^2,$$

где ω — действительная величина (частота), и из (3)

$$\psi=A\cos\omega t+B\sin\omega t. \tag{4}$$

Вся задача будет решена, если мы найдем ω.

Нам нужно найти не просто решение уравнения (2), а решение, удовлетворяющее краевым условиям. Возьмем для простоты краевые условия

$$\varphi(0)=0,\ \varphi(l)=0. \tag{5}$$

Заметим, что волновое уравнение

$$a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

получающееся при $p(x)=\text{const}$ и $q(x)=\text{const}$, симметрично относительно x и t (в общем случае уравнение для y несимметрично относительно x и t). Однако вся задача в целом и здесь *несимметрична* относительно x и t: по x мы имеем краевые условия, а по t — начальные условия.

Можно ли разумно поставить задачу так, чтобы по t были заданы краевые условия, а y и $\frac{\partial y}{\partial x}$ были для $x=0$ заданными функциями от t? Я не знаю интересных случаев, где задача ставилась бы таким образом. Если речь идет об отыскании решений, периодических по времени, то и здесь по отношению к x мы не интересуемся тем, что происходит при $x<0$ и $x>l$.

Для случая постоянных p и q краевая задача решается очень легко. Мы сразу получаем из уравнения (2):

$$\varphi = C_1 \cos\frac{\omega x}{a} + C_2 \sin\frac{\omega x}{a}, \tag{6}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Нам нужно, чтобы (6) удовлетворяло условиям (5). Пусть $x=0$. Тогда из (6) получаем $\varphi(0)=C_1$, и, следовательно, в силу (5)

$$C_1 = 0. \tag{7}$$

Пусть $x=l$. Принимая во внимание (7), получаем из (5) и (6):

$$\sin\frac{\omega l}{a} = 0,$$

откуда

$$\frac{\omega l}{a} = s\pi \qquad (s=1, 2, 3, \ldots). \tag{8}$$

Здесь как раз заключен решающий момент. *Возможно* удовлетворить нашим граничным условиям, но не при всяких ω, т. е. не при всяких λ, а только при каких-то определенных.

Мы пришли к трансцендентному уравнению для ω, имеющему бесконечное множество действительных и положительных корней. Каждому значению характеристического числа λ (или ω) соответствует *одна* (с точностью до постоянного множителя) функция $\varphi(x)$, т. е. одна вполне определенная *форма* колебания. Все эти свойства типичны. При краевых условиях рассматриваемого типа они имеют место не только при постоянных p и q (при периодических краевых условиях дело обстоит иначе).

Решениями являются гармонические колебания (4), частоты которых образуют согласно (8) бесконечную дискретную последовательность. Она не имеет сгущения в конечной области, а растет в бесконечность. И эти свойства тоже типичны для задачи Штурма—Лиувилля. Но не типично то, что частоты (8) образуют *гармонический* ряд, т. е. относятся между собой, как целые числа. Обертоны *неоднородной* системы *не* относятся друг к другу, как целые числа.

Перейдем к форме колебаний. При $s=1$ в интервале $(0, l)$ укладывается полволны (рис. 156):

$$\Lambda_1 = 2l;$$

при $s=2$ — целая волна, при $s=3$ — полторы волны и т. д. Вообще

$$\Lambda_s=\frac{2l}{s}.$$

То, что пространственная форма колебания синусоидальна, — это *не* типично. Но типично для всех задач Штурма—Лиувилля то, что при переходе от s к $s+1$ число нулей функции $\varphi(x)$ внутри интервала $(0, l)$ возрастает на единицу. При s-ом колебании в интервале $(0, l)$ функция $\varphi(x)$ имеет в одних случаях s нулевых точек, в других случаях $s-1$ (например, в только что рассмотренном).

Антенна, колеблющаяся на каком-нибудь обертоне, разбивается на ряд участков, колеблющихся в противоположных фазах. Если

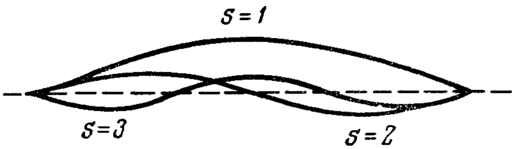

Рис. 156.

антенна колеблется в основном тоне, она дает максимум излучения в одних направлениях; если она колеблется в другом тоне, то она дает максимум излучения в других направлениях.

Можно сказать, что все точки колеблются в одной и той же фазе, но амплитуды соседних участков имеют противоположные знаки. Это свойство также типично.

Нулевые точки называются узлами, точки максимума амплитуды — пучностями. Точки, являющиеся узлами для одной функции, могут быть пучностями для другой (что иногда вызывает недоразумения). В самом деле, можно интересоваться разными вещами, например:

1) Насколько частицы отклоняются. Функция $\varphi(x)$ как раз и описывает отклонения частиц.

2) Какова в различных местах деформация $\frac{\partial y}{\partial x}$, т. е. насколько различные точки удалились друг от друга. Если $\frac{\partial y}{\partial x}=0$, то соседние точки одинаково удалены от положения равновесия; если $\frac{\partial y}{\partial x}<0$, то имеет место сжатие, если $\frac{\partial y}{\partial x}>0$ — растяжение.

Узлам смещения y соответствуют в случае (6) пучности сжатия и механического напряжения, и наоборот. То, что узлы смещения и деформации не совпадают, и то, что пучности смещения совпадают с узлами деформации,— типично для общей проблемы, но то, что пучности деформации совпадают с узлами смещения,— не типично.

В стержне узлы смещения являются для материала самыми опасными (в смысле напряжения) местами.

В электрическом однородном случае, там, где ток имеет узел, напряжение, имеется пучность, и наоборот.

Итак, говорить просто об узлах или пучностях нельзя, каждый раз нужно указывать, какая величина имеется в виду.

Рис. 157.

В случае однородного стержня с закрепленными концами разложение начального смещения по собственным функциям имеет вид

$$f(x) = \sum_s A_s \sin \frac{s\pi x}{l}. \tag{9}$$

Это — обычный ряд Фурье по синусам. Постановка задачи здесь несколько другая, чем при разложении в ряд Фурье периодической функции.

Известно, что всякую периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье. Здесь же речь идет о разложении функции в интервале от $x=0$ до $x=l$. Если x будет расти за пределами интервала $(0, l)$, то функция, представляемая рядом Фурье (9), будет повторяться периодически (рис. 157), но здесь это для нас не интересно.

Несколько слов относительно случая открытых концов. Форма колебаний (для y) в этом случае показана на рис. 158. Здесь число узловых точек для обертона данного номера на единицу больше, чем в случае закрепленных концов.

Между обоими случаями имеется и математически и физически довольно существенная разница. Для закрепленных концов $\lambda=0$ не является собственным значением. При $\lambda=0$ уравнение (2) имеет общее решение

$$\varphi(x) = C_1 x + C_2, \tag{10}$$

в котором нельзя подобрать C_1 и C_2 так, чтобы удовлетворить граничным условиям (5). Подставляя (10) в граничные условия для открытых концов:

$$\varphi'(0)=0,\ \varphi'(l)=0, \tag{11}$$

получаем:

$$C_1=0,\ \varphi=C_2,$$

т. е. граничным условиям удовлетворяет постоянная величина. Таким образом, в случае специальных краевых условий (11) $\lambda=0$

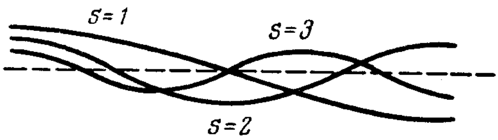

Рис. 158.

является собственным значением. Физически это совершенно очевидно: существует решение, при котором стержень движется как целое. Оно соответствует случаю, когда все точки стержня имеют одинаковую начальную скорость. Начальными условиями можно „подавить" это решение, сделать так, чтобы оно выпало. Для этого нужно, чтобы стержень как целое не имел начальной скорости.

Рис. 159.

Граничные условия (11) имеют место также в задаче о колебаниях свободно падающего стержня.

Несколько более интересен тот случай, когда стержень закреплен на одном конце и свободен на другом.

При его рассмотрении мы воспользуемся тем, что дифференциальное уравнение для всех случаев одно и то же. Здесь формы колебаний изображаются кусками синусоид, такими, что на одном конце равно нулю смещение, а на другом — его производная. Возможно, например (рис. 159), колебание в четверть волны, период которого вдвое больше, чем если бы оба конца были закреплены или оба свободны. Частоты колебаний здесь будут относиться, как $1:3:5:7$ и т. д.

Этот случай прямо сводится к тому, когда оба конца закреплены, но стержень имеет удвоенную длину и находится в таком начальном состоянии, что не возбуждаются четные обертоны. Если мы разрежем стержень посередине, то каждая его половина будет продолжать колебаться так же, как и вначале.

Такой способ получать из известной системы новые — довольно красивый и далеко идущий.

Интересен случай кольца, когда граничные условия:

$$\varphi(0)=\varphi(l), \tag{12}$$

$$\varphi'(0)=\varphi'(l) \tag{13}$$

выражают периодичность решения. Из (6) и граничных условий (12) и (13) следует, что

$$\frac{\omega l}{a}=2s\pi.$$

При этом обе функции $\cos\frac{\omega x}{a}$ и $\sin\frac{\omega x}{a}$ в отдельности удовлетворяют граничным условиям, и, следовательно, эти условия удовлетворены при любых C_1 и C_2. Частоты будут вдвое больше (для данного номера обертона), чем тогда, когда стержень разрезан. Каждой частоте соответствует бесконечное множество различных распределений колебаний. Все они изображаются линейными комбинациями (6) линейно независимых функций $\cos\frac{\omega x}{a}$ и $\sin\frac{\omega x}{a}$.

Интерес подобных *вырожденных* случаев был понят только после того, как возникла волновая механика, где они часто встречаются.

Перейдем теперь к технически очень важному вопросу о нагруженной антенне — антенне, на концах которой имеется сосредоточенная емкость или индуктивность („нагрузка"). Рассмотрим случай, когда концы заземлены через конденсаторы. Здесь уравнения прохождения тока через конденсатор приводят для тока к граничному условию

$$\frac{d\varphi(l)}{dx}=-\frac{C}{C_0}\varphi(l), \tag{14}$$

где C — емкость единицы длины провода, C_0 — емкость конденсатора, и к аналогичному условию (с другим знаком) при $x=0$. Эти условия имеют, таким образом, вид:

$$\frac{d\varphi}{dx}=\alpha\varphi \qquad (x=0),$$

$$\frac{d\varphi}{dx}=-\beta\varphi \qquad (x=l),$$

где α и β — постоянные и положительные величины[1]. Получается один из случаев задачи Штурма—Лиувилля.

Пусть левый конец заземлен накоротко (рис. 160). Тогда $\alpha=0$. Поступая совершенно так же, как для стержня, мы видим, что

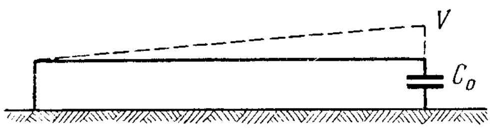

Рис. 160.

на основании граничных условий при $x=0$ нужно отбросить частное решение уравнения вида $\sin\frac{\omega x}{a}$. Таким образом, здесь

$$\varphi(x)=\cos\frac{\omega x}{a}. \tag{15}$$

Теперь нужно определить такие ω, при которых (15) удовлетворяют второму граничному условию. Подставляя (15) в граничное условие (14), получаем:

$$-\frac{\omega}{a}\sin\frac{\omega l}{a}=-\frac{C}{C_0}\cos\frac{\omega l}{a},$$

т. е. более сложное уравнение для ω, чем прежде. Займемся его исследованием.

Умножив обе части на l, мы получим трансцендентное уравнение

$$\frac{\omega l}{a}\sin\frac{\omega l}{a}=\frac{C'}{C_0}\cos\frac{\omega l}{a}, \tag{16}$$

где $C'=Cl$ — емкость всего провода, или иначе

$$\xi\operatorname{tg}\xi=b, \tag{17}$$

---

[1] [См. 4-ю лекцию части II.]

где

$$\xi = \frac{\omega l}{a}, \qquad b = \frac{C'}{C_0}.$$

Предположим сначала, что емкость конденсатора очень велика по сравнению с емкостью всего провода. Взяв достаточно малое значение b, можно в первом приближении заменить $\operatorname{tg}\xi$ через ξ, что приводит к уравнению

$$\frac{\omega^2 l^2}{a^2} = \frac{C'}{C_0}.$$

Вспомним, что

$$a^2 = \frac{c^2}{CL},$$

где c — скорость распространения в вакууме. Следовательно,

$$\omega^2 = \frac{c^2 C'}{CLC_0 l^2},$$

или

$$\omega^2 = \frac{c^2}{L'C_0},$$

где $L' = Ll$ — самоиндукция всего провода. Это не что иное, как формула Томсона.

Уравнение (16) для частоты имеет бесконечно много корней. Мы показали, что частоту основного колебания при достаточно малом значении отношения C'/C_0 можно вычислить по формуле Томсона. Мы пришли к обоснованию этой формулы для случая, когда емкость проводов мала по сравнению с емкостью конденсатора.

Очень часто отношение C'/C_0 мало, но желательно учесть его в первом порядке, т. е. провести вычисление со следующей степенью точности. Взяв *два* члена разложения $\operatorname{tg}\xi$ в ряд по степеням ξ, получаем:

$$\frac{\omega l}{a}\left(\frac{\omega l}{a} + \frac{\omega^3 l^3}{3a^3}\right) = \frac{C'}{C_0}.$$

Первый член в скобке — малая величина, второй — еще меньшая. Не обосновывая этот прием, подставим во второй член то значение ω, которое мы нашли из нулевого приближения. Мы получим тогда:

$$\frac{\omega^2 l^2}{a^2}\left(1 + \frac{C'}{3C_0}\right) = \frac{C'}{C_0},$$

откуда

$$\frac{\omega^2 l^2}{a^2}=\frac{C'}{C_0+\frac{C'}{3}}. \tag{18}$$

Таким образом, в следующем приближении емкость проводов учитывается тем, что к емкости конденсатора прибавляется одна треть общей емкости проводов. Эту поправку часто приходится принимать во внимание на практике.

Почему в (18) входит не вся емкость проводов, а лишь некоторая ее часть? Напряжение распределено по проводам неравномерно (рис. 160), емкость провода „работает“ не полностью и напряжение на проводе меньше, чем на конденсаторе. В выражение потенциальной энергии через напряжение на конденсаторе войдет поэтому только часть емкости провода:

$$U=(C_0+\alpha C')\frac{V^2}{2}, \qquad \alpha<1.$$

Рассмотрим теперь общую картину. Напишем:

$$\eta=\frac{C_0}{C'}\xi, \qquad \zeta=\operatorname{ctg}\xi.$$

Тогда трансцендентное уравнение (17) принимает вид

$$\eta=\xi.$$

Начертим графики функций η и ζ и рассмотрим их точки пересечения (рис. 161). Их абсциссы дадут искомые значения ξ. Если мы рассматриваем задачу при различных емкостях C_0, то луч, изображающий функцию $\eta(\xi)$, поворачивается. Все ветви кривой $\zeta(\xi)$ пересекаются лучом. Отсюда видно, что существует бесконечное множество собственных значений.

Пусть $C_0=0$. Тогда точки пересечения лежат на оси абсцисс, и в них

$$\frac{\omega l}{a}=\frac{\pi}{2},\quad \frac{3\pi}{2},\quad \frac{5\pi}{2},\ldots$$

Это как раз те значения ω, которые соответствуют, как мы уже знаем, одному заземленному и одному открытому концу.

По мере увеличения C_0 точки пересечения передвигаются влево. При C_0 очень большом мы получаем один корень вблизи $\xi=0$. Это и есть тот корень, который мы нашли в первом приближении.

При $C_0 \to \infty$ наименьшая частота стремится к нулю, остальные частоты тоже уменьшаются, но стремятся к конечным пределам, определяемым из равенств

$$\frac{\omega l}{a} = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, \ldots,$$

т. е. к частотам антенны, заземленной на обоих концах.

Итак, при увеличении емкости все „тоны“ понижаются. Основной тон становится как угодно низким. Однако обертоны остаются

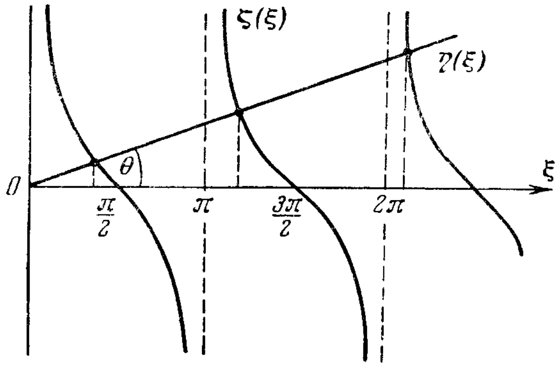

Рис. 161.

высокими. Этим объясняется, почему при больших C_0 можно пользоваться формулой Томсона: обертоны лежат очень далеко от основного тона; они быстро затухают и часто могут нас не интересовать.

Другой важный случай — провод с индуктивностью на конце (рис. 162). Если писать уравнение не для тока, как это делалось до сих пор, а для *напряжения*, то краевые условия здесь будут иметь вид:

$$\varphi(0) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi(l)}{\partial x} = -\frac{L}{L_0}\varphi(l).$$

Получаются такие же граничные условия, как в задаче о *токе* в том случае, когда левый конец разомкнут, а правый замкнут на емкость.

Если левый конец разомкнут, а правый попрежнему замкнут на индуктивность (рис. 163), то задача о напряжении совпадает с задачей о токе в том случае, когда левый конец замкнут накоротко, а правый замкнут на емкость (рис. 160). Здесь, если L_0 очень велика, мы также получим приближенно для наинизшей частоты формулу Томсона.

Случаи, когда на одном конце включена индуктивность, а на другом — емкость (рис. 164), несколько более сложны; под краевые условия задачи Штурма—Лиувилля они не подходят.

Для нагруженной системы частоты собственных колебаний не относятся друг к другу как целые числа. Общее решение есть сумма таких колебаний, т. е. сумма синусоидальных колебаний, периоды которых находятся в несоизмеримом соотношении. Таким образом, решение *не* есть

Рис. 162.

Рис. 163.

Рис. 164.

периодическая функция. Это функция почти-периодическая[1]. Из того, что нагруженная антенна имеет, вообще говоря, почти-периодические собственные колебания и что так же обстоит дело в общем случае неоднородной распределенной системы, видно, насколько велико значение почти-периодических функций.

СЕДЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(9/I 1932 г.)

Дополнительные замечания о граничных условиях. Однопроводная электрическая система. Понятие о решении Абрагама. Метод Даламбера. Начальные и граничные условия. Скорость фронта волны в неоднородной системе.

Вернемся к уравнению

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{1}$$

и разберем вопрос, который поставил А. А. Андронов.

Пусть при $x=0$ и при $x=l$ концы свободны:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

[1] [См. 5-ю лекцию части I.]