Случаи, когда на одном конце включена индуктивность, а на другом — емкость (рис. 164), несколько более сложны; под краевые условия задачи Штурма—Лиувилля они не подходят.

Для нагруженной системы частоты собственных колебаний не относятся друг к другу как целые числа. Общее решение есть сумма таких колебаний, т. е. сумма синусоидальных колебаний, периоды которых находятся в несоизмеримом соотношении. Таким образом, решение *не* есть

Рис. 162.

Рис. 163.

Рис. 164.

периодическая функция. Это функция почти-периодическая[1]. Из того, что нагруженная антенна имеет, вообще говоря, почти-периодические собственные колебания и что так же обстоит дело в общем случае неоднородной распределенной системы, видно, насколько велико значение почти-периодических функций.

СЕДЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(9/I 1932 г.)

Дополнительные замечания о граничных условиях. Однопроводная электрическая система. Понятие о решении Абрагама. Метод Даламбера. Начальные и граничные условия. Скорость фронта волны в неоднородной системе.

Вернемся к уравнению

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{1}$$

и разберем вопрос, который поставил А. А. Андронов.

Пусть при $x=0$ и при $x=l$ концы свободны:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

[1] [См. 5-ю лекцию части I.]

Тогда существует решение

$$y = \text{const}. \tag{3}$$

Оно означает, что весь стержень смещен на постоянную величину. Этому решению соответствует собственное значение $\lambda = 0$. Функция

$$y = at + b \tag{4}$$

(a и b — постоянные) также удовлетворяет дифференциальному уравнению и граничным условиям. Правда, мы не вправе рассматривать с помощью уравнения (1) большие отклонения, но формально (4) есть решение, и мы должны выяснить, что оно физически означает. Очевидно, в механическом случае оно означает, что свободный стержень движется с постоянной скоростью.

Перейдем к электрическому случаю. Напишем волновое уравнение для напряжения:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \tag{5}$$

Если концы разомкнуты, то на обоих концах ток $I = 0$, откуда следует, что и

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0. \tag{6}$$

Тогда существует решение

$$V = \text{const},$$

которое означает, что разность потенциалов между проводами постоянна (провода заряжены). Но уравнение (5) при граничных условиях (6) имеет также решение

$$V = at + b, \tag{7}$$

между тем такое нарастание потенциала при разомкнутых концах невозможно. Таким образом, это решение не имеет физического смысла. В чем здесь дело?

Уравнение для y в механическом случае получается непосредственно как уравнение движения. Уравнение для V в электрическом случае мы получаем путем исключения I из уравнений:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{L}{c^2} \frac{\partial I}{\partial t}, \tag{8}$$

вытекающих из уравнений Максвелла. Для исключения I мы должны были продифференцировать уравнения (8). Сами уравнения (8) не допускают решения (7) для разомкнутых концов ($I=0$ на концах), т. е. не все решения уравнения (5) удовлетворяют уравнениям (8). Исключение I ввело новое решение, так как $\frac{\partial V}{\partial x}=0$ еще не означает, что $I=0$.

Вот аналогичный пример. Имеется уравнение $\frac{dx}{dt}=0$. Дифференцируя его, получаем уравнение $\frac{d^2x}{dt^2}=0$. Не всякое решение второго уравнения является решением первого.

Рассмотрим еще один вопрос, связанный с граничными условиями.

Производная $\partial y/\partial t$ характеризует изменение во времени величины y. Можно следить либо за данной материальной точкой, либо за данной точкой пространства. При этом $\partial y/\partial t$ будет иметь разный смысл, так как через данную точку пространства проходят различные материальные точки. Если движется стержень, плотность ρ которого в различных местах различна, то величина $\partial\rho/\partial t$ в данной материальной точке равна нулю, а в данной точке пространства отлична от нуля.

В законы Ньютона входят производные по времени для данной материальной точки. При малых колебаниях разности между ними и производными в данной точке пространства — второго порядка малости, и мы их отбрасываем.

В граничных условиях не совсем безразлично, что понимать под $\partial y/\partial x$: производную в данной точке пространства или в данной точке материи.

Возьмем стержень, свободный на концах. Здесь следует считать, что $\partial y/\partial x=0$ в тех точках стержня, которые в покоящемся состоянии находились при $x=0$ и $x=l$. В данном случае это наиболее рациональное толкование граничных условий. Но возьмем трубу с открытыми концами. Речь идет о колебаниях воздуха в этой неподвижной трубе. Здесь граничные условия $\partial y/\partial x=0$ нужно относить к концам неподвижной стенки трубы, к данным точкам *пространства*.

В литературе этот вопрос рассмотрен либо неясно, либо неправильно. Правда, из-за малости колебаний отличие между обеими производными обычно очень мало.

Для струны теория, аналогичная той, которая была изложена для стержня, показывает, что основная частота есть

$$\nu=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \tag{9}$$

где l — длина; ρ — плотность; T — натяжение. На формуле (9) основан один из способов создавать эталоны частоты колебаний, что, вообще говоря, не очень легко. Эталоном может служить монохорд.

Измерив частоту акустических волн в трубе с помощью монохорда, можно определить скорость звука. Однако мы наталкиваемся на целый ряд трудностей.

Прежде всего предположение о том, что все частицы каждого сечения трубы $x=\mathrm{const}$ имеют одну и ту же скорость, не *оправдывается* вследствие трения. Но при широкой трубе, как показал Гельмгольц, соответствующей поправкой можно пренебречь.

Далее возникает вопрос: как осуществить те или иные граничные условия. Твердую стенку очень легко сделать. Но очень нелегко сделать ее неподвижной, такой, чтобы можно было применять граничное условие $y=0$.

Граничное условие $\partial y/\partial x=0$ здесь означает, что давление на конце трубы должно оставаться постоянным. Опыт показывает, что это требование выполнить трудно. Приходится делать ряд поправок. С поправками теория вполне удовлетворительна, но часто можно пользоваться уравнениями и без поправок.

Электрический случай существенно отличен от механического. В механическом случае весь процесс концентрируется в материале стержня, струны и т. д. В электрическом случае в процессе принимает участие окружающая среда, о чем мы уже говорили.

Бесконечные параллельные провода цилиндрического сечения поддаются вполне строгой обработке. Мы знаем, что здесь

$$a^2=\frac{c^2}{\varepsilon\mu};$$

ε и μ характеризуют свойства внешнего пространства.

Если взять два *конечных* провода, расстояние между которыми мало по сравнению с длиной проводов, то теория, развитая для бесконечных проводов, остается приближенно применимой. Но пусть имеется один вертикальный провод (идеальный проводник) над землей (рис. 165). В случае плоской бесконечной проводящей земли эта задача эквивалентна задаче об *одном* проводе удвоенной длины. Такому проводу приписываются некоторые C и L — емкость и индуктивность на единицу длины. Как это оправдать? (В этом вопросе нет никакого педантизма. Я не стараюсь нарочно искать какие-то трудности.)

Возьмем кабель, т. е. два концентрических цилиндра (рис. 166), и будем увеличивать радиус внешнего цилиндра b. При этом C и L будут изменяться, но произведение CL остается постоянным. Если бы провод был бесконечно длинным, то мы получили бы в пределе $L=\infty$, $C=0$. Если провод конечный, то в пределе этого не будет. Обычно считают, что волновое уравнение остается

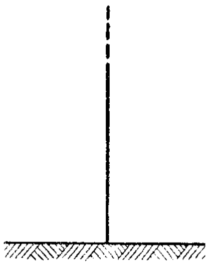

Рис. 165.

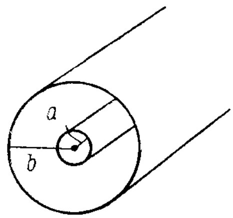

Рис. 166.

правильным и в этом случае. Говорят: есть все основания думать, что это уравнение применимо и для одного провода.

Я бы этого не сказал. Совесть беспроволочника не может на этом успокоиться.

Применяя здесь волновое уравнение, мы найдем формы колебания и т. д., но ведь этого недостаточно. Нужно знать еще, как ведет себя антенна при различных *граничных условиях*. Большое разнообразие задач возникает именно тогда, когда мы включаем в провод катушки, емкости и т. д. При решении таких задач приходится вводить отношение C/C_0 (C_0 — емкость на конце провода). В то время как в само волновое уравнение L и C порознь не входят (а входит только произведение LC, которое не зависит от данной системы), для решения краевых задач нужно знать L и C *в отдельности*.

Для емкости и индуктивности на единицу длины кабеля мы имеем выражения:

$$C=\frac{\varepsilon}{2\ln\frac{b}{a}} \qquad L=2\mu\ln\frac{b}{a}$$

Из произведения LC выражение $\ln\frac{b}{a}$ выпадает. Но если $b\to\infty$, то какие здесь следует брать емкость и индуктивность? У нас пока нет ни малейших указаний на то, как здесь поступить.

Что же здесь делать?

Дается следующий способ: вместо a нужно в первом приближении подставить выражение γl, где l — длина провода, а γ — поправочный коэффициент. Это угадано довольно давно. Постараемся понять, чем здесь руководствовались.

В выражения для емкости и индуктивности входит логарифм. Величина $\ln\frac{b}{\gamma l}$, вследствие нечувствительности логарифма, не ведет к большим недоразумениям даже при $\gamma=1$, хотя формула с $\gamma=1$ и неправильна. Таким образом, можно было подобными грубыми подстановками добиться довольно правильных результатов.

Первый и решительный шаг в направлении строгого решения задачи сделал Абрагам. Он поставил вопрос так: дан вытянутый эллипсоид из идеального проводника; требуется рассмотреть поле на основе уравнений Максвелла. Оказалось, что решение задачи дает в первом приближении те самые колебания, которые находили, принимая приближенно синусоидальные распределения тока. Во втором приближении получается затухание вследствие излучения, которое мы не рассматривали. Таким образом, с помощью решения Абрагама было полностью выяснено, как ведет себя антенна сама по себе. Эта задача решена Абрагамом как самостоятельная задача.

Однако интересующий нас вопрос — оправдание применения уравнений системы параллельных проводов к антенне — Абрагамом не решен. Оправдать это применение, я думаю, можно. Есть целый ряд подходов к вопросу. Если бы, например, я умел рассчитать один достаточно длинный провод, то это дало бы хорошее приближение.

Зоммерфельд вычислил поле такого провода при наличии сопротивления[1]. Если учитывать сопротивление, то можно решить задачу для одного бесконечно длинного провода. Оказывается, что здесь, хотя и с затруднением, но сделать это можно.

---

[1] [Ф. Франк и Р. Мизес. Дифференциальные уравнения математической физики, стр. 925 и след. М.—Л., 1937.]

В случае провода с аксиальной симметрией составляющая магнитного поля **H** по направлению провода равна нулю. В плоскости, перпендикулярной к оси симметрии (оси x),

$$\frac{\partial Ey}{\partial z}-\frac{\partial Ez}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial Hy}{\partial y}+\frac{\partial Hz}{\partial z}=0.$$

Это позволяет ввести нечто вроде потенциала в плоскости, перпендикулярной оси провода. В этой плоскости интеграл от **E** не зависит от пути, что позволяет говорить о некоторой „емкости". Хотя она обладает другими свойствами, чем обычная емкость, мы можем действительно оправдать наши дифференциальные уравнения в применении к одному проводу.

Итак, положение таково.

Обычные представления для одиночного провода неправильны. Понятия индуктивности и емкости на единицу длины здесь не имеют места, но для прямолинейного провода (антенны) можно ввести некоторые условные значения таких параметров и с ними написать обычные уравнения двухпроводной линии. Пока все это сделано „на пальцах", но этим вопросом стоило бы заняться. Его исследование не проведено до сих пор, и я счел нужным сказать об этом несколько слов.

Вернемся к задаче о собственных колебаниях распределенной системы. Здесь имеется далеко идущая аналогия с дискретной системой. Отличие распределенной системы в том, что у нее число собственных колебаний бесконечно велико.

Пусть при $t=0$

$$y=f(x), \quad \frac{\partial y}{\partial x}=F(x). \tag{10}$$

В общем решении для однородной системы

$$y=\sum_s \sin\frac{s\pi x}{l}\left(A_s\cos\omega_s t+B_s\sin\omega_s t\right) \tag{11}$$

можно подобрать A_s и B_s (если принять, что разложение возможно), чтобы удовлетворить начальным условиям (10). Мы доказали теорему о том, что удовлетворяющее начальным условиям решение (11) — единственное.

Заметим, что

$$\frac{l\omega_s}{\pi}=a,$$

где a есть скорость распространения. Но понятия о скорости, как о *таковой*, здесь нет.

Вообще говоря, возбуждаются *все* собственные колебания, но „случайно“ некоторые из них могут отсутствовать. Если требуется, чтобы было только одно собственное колебание (одно ω_s), нужно возбудить систему специальным образом.

В рассматриваемом здесь случае сложение гармонических колебаний дает периодическое колебание.

Существует совсем другой способ решения той же задачи.

При этом способе рассматривают не тот объект, который нам задан, а совсем другой: *неограниченную* струну (или стержень). Исходя из исследования бесконечной струны, тоже можно придти к решению интересующих нас вопросов.

Уравнение (1) справедливо и для неограниченной струны. Самое общее его решение имеет вид

$$y = f_1(x - at) + f_2(x + at),$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ — функции, удовлетворяющие известным условиям непрерывности. Легко показать, что каждая из этих функций удовлетворяет дифференциальному уравнению (1); в самом деле,

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = f_1'', \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = f_1'' \cdot a^2,$$

и аналогично для f_2.

Выясним смысл решения $f_1(x - at)$. В момент $t = 0$ имеем:

$$y = f_1(x).$$

То значение y, которое было в момент $t = 0$ в точке x, будет через время t в новой точке $x + at$. Таким образом, возмущение перемещается без изменения формы; все возмущение, как „жесткое“, распространяется со скоростью a. Такой процесс возможен только в однородной системе (стержне, струне).

Только потому, что возмущение распространяется, *не меняя формы*, можно без дальнейших пояснений говорить о скорости распространения возмущения. Если бы оказалось, что возмущение придет в другое место, имея другую форму, то обычное понятие скорости потеряло бы для него смысл. Для этого случая понятие скорости надо было бы заново определить, так как нельзя идентифицировать точки возмущения разной формы. Разумеется, скорость движения отдельной материальной точки стержня и скорость распространения импульса ничего общего между собой не имеют.

Совершенно таким же образом $f_2(x+at)$ изображает распространение импульса в противоположную сторону. Общее решение волнового уравнения изображает распространение двух импульсов во встречных направлениях. Их наложение дает все возможные движения.

Пусть даны начальные распределения (10) для смещений и скоростей. Уравнению (1) и этим начальным условиям удовлетворяет функция

$$y=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(\xi)\,d\xi. \tag{12}$$

Действительно, интеграл есть разность функции от $x+at$ и той же функции от $x-at$. Следовательно, y есть сумма функции от $x+at$ и функции от $x-at$, а сумма такого вида удовлетворяет волновому уравнению.

Для $t=0$ интеграл равен нулю, и мы имеем:

$$y_{t=0}=f(x).$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{1}{2}[af'(x+at)-af'(x-at)]+\frac{1}{2}[F(x+at)+\frac{1}{2}F(x-at)]$$

при $t=0$ равняется $F(x)$. Следовательно, начальные условия также удовлетворены.

Мы написали для *бесконечной* струны решение (12), удовлетворяющее начальным условиям (10).

Раньше мы решали такую задачу: дана струна и граничные условия, которым надо было удовлетворить. Это достигалось выбором λ. Здесь мы поставили обратную задачу: найти решение, удовлетворяющее начальным условиям на всей струне. Можно ли припасовать это решение к граничным условиям? Оказывается, что можно. Это делается следующим образом.

Фактически начальные условия заданы только для интервала

$$0\leqslant x\leqslant l.$$

Но ничто нам не мешает *выдумать* начальные условия для всех остальных значений x.

Будем понимать под $f(x)$ и $F(x)$ функции, заданные в интервале $(0, l)$, но продолженные справа и слева так, что

$$f(-x)=-f(x), \qquad f(x+2l)=f(x), \tag{13}$$

$$F(-x)=-F(x), \qquad F(x+2l)=F(x). \tag{14}$$

Легко показать, что решение, удовлетворяющее искусственным начальным условиям (13) и (14), удовлетворяет также граничным условиям

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0.$$

Мы знаем, что существует единственное решение, удовлетворяющее граничным и начальным условиям. И действительно, можно показать, что решения, полученные обоими способами, тождественны.

Решение (12) толкуется очень просто. Возьмем наиболее простой случай, когда начальные скорости равны нулю. Тогда

$$y = \frac{1}{2}\left[f(x + at) + f(x - at)\right].$$

Это — движение двух волн, форма которых воспроизводит первоначальную конфигурацию (рис. 167). Сумма этих бегущих волн представляет собой стоячую волну. Точки 0 и l при этом остаются в покое. Таким образом, при этом способе рассмотрения мы получаем сразу форму струны и величина a приобретает здесь физический смысл скорости. Раньше она была названа скоростью чисто формально; здесь же это действительно скорость распространения импульса.

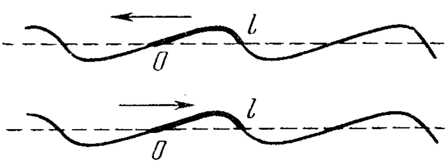

Рис. 167.

Обычно нас интересует, каковы частоты и амплитуды отдельных тонов. Для того, чтобы получить ответ на эти вопросы, необходимо вернуться к ряду Фурье — к первому способу рассмотрения задачи.

Мы оставим в стороне очень интересную задачу об отражении от закрепленного и от свободного конца. Вернемся к более общей задаче о неоднородной системе:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right] = q(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{15}$$

Ее разбор мы довели до задачи Штурма — Лиувилля. Можно ли здесь применить способ бегущих волн? Повидимому, нельзя, и метод разделения переменных — единственный.

В случае (15) форма импульса меняется при распространении, и поэтому нельзя говорить о его скорости. Но все же и здесь можно ввести определенное понятие скорости. Фронт, начало импульса, распространяется с вполне определенной скоростью, правда зависящей от x. Скорость фронта есть

$$v=\sqrt{\frac{p(x)}{q(x)}}. \tag{16}$$

Это следует из одной теоремы о свойствах характеристик уравнений в частных производных второго порядка. В случае однородной системы формула (16) переходит в уже известную нам формулу для скорости распространения волн.

Пусть имеет место небольшое нарушение однородности: коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ медленно меняются с x. Тогда должно существовать какое-то приближенное понятие скорости распространения импульса. В противном случае теория однородных систем не могла бы применяться на опыте.

ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(13/I 1932 г.)

Положительность собственных значений задачи Штурма — Лиувилля. Каждому собственному значению соответствует одна собственная функция. Экстремальное свойство основного собственного значения. Его применение для приближенной оценки основной частоты. Свойства ортогональности собственных функций и их физический смысл.

Мы займемся теперь неоднородными распределенными системами. Мы увидим, что *качественные* характеристики неоднородных и однородных систем очень похожи. Для того, чтобы овладеть неоднородными системами, надо иметь возможность вычислять собственные числа и собственные функции. Прежде всего мы постараемся вывести некоторые общие положения.

Посредством подстановки

$$y=\varphi(x)\,\psi(t)$$

мы свели решение основной задачи к решению уравнений

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}+\lambda\psi=0$$