можно ввести определенное понятие скорости. Фронт, начало импульса, распространяется с вполне определенной скоростью, правда зависящей от x. Скорость фронта есть

$$v=\sqrt{\frac{p(x)}{q(x)}}. \tag{16}$$

Это следует из одной теоремы о свойствах характеристик уравнений в частных производных второго порядка. В случае однородной системы формула (16) переходит в уже известную нам формулу для скорости распространения волн.

Пусть имеет место небольшое нарушение однородности: коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ медленно меняются с x. Тогда должно существовать какое-то приближенное понятие скорости распространения импульса. В противном случае теория однородных систем не могла бы применяться на опыте.

ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(13/I 1932 г.)

Положительность собственных значений задачи Штурма — Лиувилля. Каждому собственному значению соответствует одна собственная функция. Экстремальное свойство основного собственного значения. Его применение для приближенной оценки основной частоты. Свойства ортогональности собственных функций и их физический смысл.

Мы займемся теперь неоднородными распределенными системами. Мы увидим, что *качественные* характеристики неоднородных и однородных систем очень похожи. Для того, чтобы овладеть неоднородными системами, надо иметь возможность вычислять собственные числа и собственные функции. Прежде всего мы постараемся вывести некоторые общие положения.

Посредством подстановки

$$y=\varphi(x)\,\psi(t)$$

мы свели решение основной задачи к решению уравнений

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}+\lambda\psi=0$$

и

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right)+\lambda q\varphi=0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$(\varphi'-\alpha\varphi)_0=0, \quad (\varphi'+\beta\varphi)l=0, \tag{2}$$

где α и β — положительные числа.

В некоторых случаях приходится делить граничные условия на α или β и переходить к пределу $\alpha=\infty$ или $\beta=\infty$. Поэтому граничные условия часто пишут в более общем виде:

$$(\alpha_1\varphi'-\alpha_2\varphi)_0=0,$$

$$(\beta_1\varphi'+\beta_2\varphi)_l=0.$$

Вместо того, чтобы переходить к пределу $\alpha=\infty$ или $\beta=\infty$, можно положить $\alpha_1=0$ или $\beta_1=0$.

Все соотношения, с которыми мы здесь имеем дело, имеют определенный физический смысл, и мы будем стараться в наших дальнейших рассуждениях сразу выяснить физическую значимость каждой ступени математического рассуждения.

Потенциальная энергия стержня равна

$$\int_0^l \frac{p}{2}y'^2dx.$$

Здесь $y'=\frac{\partial y}{\partial x}$ — растяжение, деформация; p — модуль упругости. Упругая потенциальная энергия пропорциональна квадрату деформации.

Пусть мы знаем, что $\lambda>0$. Тогда

$$\psi=\cos(\omega t+\varepsilon),$$

где $\omega=\sqrt{\lambda}$, и подинтегральная функция имеет вид

$$\frac{p}{2}y'^2=\frac{p}{2}\varphi'^2\cos^2(\omega t+\varepsilon).$$

Так как среднее по времени от $\cos^2(\omega t+\varepsilon)$ равно $^1/_2$, то средняя по времени потенциальная энергия в данном элементе длины равна

$$\frac{p}{4}\varphi'^2dx.$$

Аналогично его средняя по времени кинетическая энергия равна

$$\frac{\lambda q}{4}\varphi^2 dx.$$

Интегралы от этих выражений дадут средние по времени потенциальную и кинетическую энергии для всего стержня.

Если α отлично от нуля, то это значит следующее: стержень прикреплен к пружине или провод кончается на конденсаторе (рис. 149) и граничное напряжение стержня уравновешивается упругой силой пружины.

Средняя по времени потенциальная энергия пружины, если пружина находится на конце $x=0$, равна

$$\left(\frac{p}{4}\varphi\varphi'\right)_0,$$

а если пружина находится на конце $x=l$, то она равна

$$-\left(\frac{p}{4}\varphi\varphi'\right)_l.$$

В самом деле, $p\varphi'\cos(\omega t+\varepsilon)$ есть сила, а $\varphi\cos(\omega t+\varepsilon)$ — смещение. В силу граничных условий написанные выше выражения могут быть представлены в виде

$$\frac{1}{4}(\alpha p\varphi^2)_0 \text{ и } \frac{1}{4}(\beta p\varphi^2)_l.$$

Схема (1) и (2) разрешима не при всяком λ. Предположим, что некоторые λ, удовлетворяющие схеме (1) и (2), отрицательны. Тогда были бы возможны несинусоидальные движения. Мы докажем, однако, что если существуют собственные значения, то они все положительны. Доказательство довольно простое.

Умножим уравнение (1) на φ; это дает:

$$\varphi\frac{d}{dx}(p\varphi')+\lambda q\varphi^2=0,$$

или

$$\frac{d}{dx}(p\varphi\varphi')-p\varphi'^2+\lambda q\varphi^2=0.$$

Проинтегрируем теперь это уравнение по x от 0 до l:

$$\lambda\int_0^l q\varphi^2 dx=\int_0^l p\varphi'^2 dx-[p\varphi\varphi']_0^l.$$

Учтем далее граничные условия. Это дает:

$$\lambda\int_0^l q\,\varphi^2\,dx=\int_0^l p\,\varphi'^2\,dx+(\alpha\,p\,\varphi^2)_0+(\beta\,p\,\varphi^2)_l. \tag{3}$$

Отсюда сразу видно, что все λ положительны, так как плотность $q(x)$ и коэффициент упругости $p(x)$ положительны. Точнее, λ всегда положительно, за исключением того случая, когда $\alpha=0$, $\beta=0$, $\varphi'=0$. Тогда правая часть равна нулю. Это возможно только, если стержень не закреплен на концах.

Итак, за исключением этого случая, все λ положительны, и процесс состоит из наложения синусообразных колебаний. Это свойство не только однородных систем, а общее свойство систем штурм-лиувиллевского типа.

Если α или β отрицательно, то такого заключения сделать нельзя. В случае пружин α и β положительны. Но если создать условия, при которых α или β отрицательно, то нельзя быть уверенным и в том, что будут колебания синусообразного типа. Это связано с вопросом об устойчивости.

Возможно ли, что одному и тому же λ соответствуют два решения, т. е. что при одной и той же частоте существуют различные формы колебаний? Докажем, что при граничных условиях вида (2) это невозможно.

Линейное однородное уравнение (1) имеет два линейно независимых решения φ_1 и φ_2, и всякое решение имеет вид

$$\varphi=C_1\varphi_1+C_2\varphi_2,$$

где C_1 и C_2 — постоянные.

Предположим, что при данном λ есть *два* независимых решения, удовлетворяющих граничным условиям. Но тогда и их сумма удовлетворяет граничным условиям, так как эти условия линейны и однородны. Таким образом, если существуют два независимых решения, удовлетворяющих граничным условиям, то *всякое* решение им удовлетворяет. Но этого не может быть. Основная теорема гласит (при тех предположениях о регулярности уравнения, которые здесь выполняются), что при как угодно заданных a и b всегда существует такое решение, что

$$\varphi(0)=a,\quad \varphi'(0)=b, \tag{4}$$

т. е. через каждую точку фазовой плоскости $(\varphi,\ \varphi')$ проходит одна (и только одна) интегральная кривая. Граничные условия связывают φ и φ'. Если бы всякое решение удовлетворяло граничным условиям (2), нельзя было бы удовлетворить условиям (4) при любых a и b.

Итак, не может быть двух независимых решений, которые оба удовлетворяли бы граничным условиям. При данном λ (заданной частоте) возможна только *одна* форма колебания.

Мы знаем, что в случае однородного стержня, замкнутого в кольцо (рис. 154), для каждого λ имеется *две* независимые формы колебаний, но это не противоречит только что доказанному утверждению, так как здесь граничные условия совсем другого типа:

$$\varphi(0)=\varphi(l), \qquad \varphi'(0)=\varphi'(l).$$

Каждое из них относится к *двум* значениям x. Этот случай показывает, однако, что не всегда период определяет форму колебания.

Если для данного λ существует единственная собственная функция, то это собственное значение называют простым или однократным. Таким образом, при граничных условиях штурм-лиувиллевского типа все собственные значения однократны.

Что означает физически соотношение (3)? Левая часть его есть средняя по времени кинетическая энергия, правая — средняя по времени потенциальная энергия (второй и третий члены правой части представляют собой среднюю по времени энергию конденсаторов или пружин). При колебаниях такой системы (стержня) в определенном тоне средняя потенциальная энергия равна средней кинетической. Это несправедливо для отдельных элементов стержня: в узлах смещения средняя кинетическая энергия — нуль, средняя потенциальная энергия велика; в узлах деформации потенциальная энергия равна нулю. Но, повторяю, для данного тона средняя кинетическая и средняя потенциальная энергии всей системы в целом равны друг другу.

Сформулируем очень важную теорему, но для частного случая. Пусть концы закреплены. Тогда, согласно (3),

$$\lambda=\frac{\int\limits_0^l p\,\varphi'^2\,dx}{\int\limits_0^l q\,\varphi^2\,dx}. \tag{5}$$

Пусть найдена собственная функция для некоторого λ. Если λ почему-нибудь нам неизвестно, то можно вычислить эту величину по формуле (5). *Это* замечание немногого стоит. Но существует замечательное свойство, чрезвычайно изящная теорема, заключающаяся в следующем. Подставим в (5) какую-нибудь функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую краевым условиям. Пусть мы угадали или разыскали такую функцию $\varphi(x)$, при которой выражение (5) минимально. Тогда оказывается: 1) такая функция является собственной функцией, и 2) соответствующее значение отношения (5) равно наинизшему собственному значению, т. е. квадрату наинизшей собственной частоты (частный случай теорем Куранта).

Эта теорема имеет важные применения. Из нее следует, например, что если в каком угодно месте системы мы увеличиваем массу, то частота основного тона может только уменьшаться. Подобное утверждение вовсе не самоочевидно. Например, если мы увеличиваем массу физического маятника, то его период может при этом увеличиться, но может и уменьшиться.

Докажем сформулированную нами теорему. (Раньше существование собственных функций принималось на веру. Теперь мы знаем, что необходимо отдельно *доказать* существование такой функции. Мы докажем, что если собственная функция существует, то для нее имеет место сформулированная нами теорема.)

Обозначим выражение (5), рассматриваемое как функционал от $\varphi(x)$, буквой I. Пусть $\varphi(x)$ обращает I в минимум. Тогда при подстановке $\varphi(x)$ вариация выражения I обращается в нуль. Варьируя, получаем:

$$\delta I \sim 2\int_0^l p\varphi'\delta\varphi'\,dx\int_0^l q\,\varphi^2\,dx - 2\int_0^l q\,\varphi\delta\varphi\,dx\int_0^l p\varphi'^2\,dx = 0.$$

Разделим это уравнение на $\int_0^l q\,\varphi^2\,dx$. Получаем, принимая во внимание (5):

$$\int_0^l p\,\varphi'\delta\varphi'\,dx - \lambda\int_0^l q\,\varphi\delta\varphi\,dx = 0.$$

Но

$$\delta\varphi' = \delta\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\delta\varphi.$$

Беря первый интеграл по частям, получаем:

$$\Big[p\varphi'\delta\varphi\Big]_0^l - \int_0^l \frac{d}{dx}(p\varphi')\,\delta\varphi\,dx - \lambda\int_0^l q\,\varphi\delta\varphi\,dx = 0.$$

Так как концы закреплены, имеем на концах:

$$\delta\varphi = 0$$

(сравниваются только функции $\varphi(x)$, обращающиеся на концах в нуль). Следовательно.

$$\int_0^l \left[\frac{d}{dx}(p\varphi') + \lambda q \varphi\right] \delta\varphi \, dx = 0. \qquad (6)$$

Так как $\delta\varphi$ — произвольная функция от x, из (6) следует, что

$$\frac{d}{dx}(p\varphi') + \lambda q \varphi = 0.$$

Итак, функция $\varphi(x)$, обращающая λ в минимум, удовлетворяет уравнению (1), что и требовалось доказать. Эту теорему легко распространить на общий случай краевых условий задачи Штурма — Лиувилля.

Мы доказали теорему, относящуюся к наинизшему собственному тону системы. Теорема может быть распространена и на все остальные тоны, но там нужно искать минимум выражения (5) при известных добавочных условиях.

Отыскание всей совокупности собственных частот приводится теоремами Куранта к задачам на максимум и минимум. Из этих теорем можно сделать ряд физически интересных заключений. Теория, о которой здесь идет речь, получила очень большое значение. С ней связан метод оценки собственных частот, берущий свое начало от Релея, идея которого состоит в следующем.

В технике иногда не так важно точно знать частоту системы, как иметь уверенность в том, что она ниже некоторого опасного (вследствие возможного резонанса) значения. Подставим в выражение (5) некоторую функцию $\varphi(x)$, о которой мы заранее знаем, что она имеет приблизительно такой же характер, как собственная функция системы в частности, не имеет узлов, кроме концов интервала $(0, l)$. При этом получается некоторое значение λ. Мы можем тогда быть уверены, что основная частота лежит ниже квадратного корня из этого значения λ. Правда, это еще не дает нам указаний на то, как избежать резонанса на обертонах.

Если подставить в (5) функцию $\varphi(x)$, не очень сильно отличающуюся от истинной собственной функции, то λ будет очень близко к собственному значению. Выражение (5) мало чувствительно к отклонению функции $\varphi(x)$ от собственной функции, поскольку около минимума λ меняется медленно. Лучше всего показать это на простом примере.

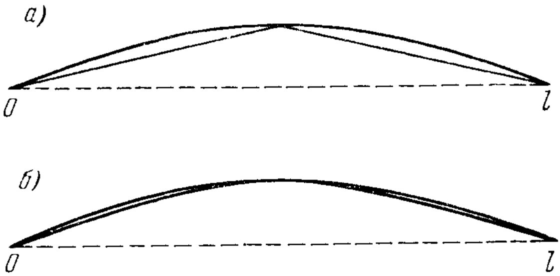

Рис. 168.

В случае однородного стержня ($p = \text{const}$, $q = \text{const}$) первая собственная функция есть

$$\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{l}. \tag{7}$$

При этом

$$\omega = \sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Если взять вместо (7) два отрезка прямых (рис. 168, *а*), то получится:

$$\omega' = \sqrt{\lambda'} = \frac{\sqrt{12}}{l}\sqrt{\frac{p}{q}},$$

т. е. расхождение на 9%. Если взять дугу параболы (рис. 168, *б*), то получится:

$$\omega'' = \sqrt{\lambda''} = \frac{\sqrt{10}}{l}\sqrt{\frac{p}{q}},$$

т. е. $\omega/\omega'' = 0{,}9985$, что является уже прекрасной апроксимацией.

Выведем еще одно важное свойство собственных функций. Собственная функция $\varphi_i(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx}(p\varphi_i') + \lambda_i q \varphi_i = 0. \tag{8}$$

Обозначим:

$$L(\varphi) = \frac{d}{dx}(p\varphi').$$

Имеем тождественно:

$$\varphi_k L(\varphi_i) = \varphi_k \frac{d}{dx}(p\varphi_i') = \frac{d}{dx}(p\varphi_k\varphi_i') - p\varphi_i'\varphi_k',$$

откуда вытекает следующее тождество Лагранжа:

$$\varphi_k L(\varphi_i) - \varphi_i L(\varphi_k) = \frac{d}{dx}(p\varphi_k\varphi_i' - p\varphi_i\varphi_k'). \tag{9}$$

Умножая уравнение (8) на φ_k, а аналогичное уравнение для φ_k и λ_k — на φ_i, получаем:

$$\varphi_k \frac{d}{dx}(p\varphi'_i) + \lambda_i q\varphi_i\varphi_k = 0;$$

$$\varphi_i \frac{d}{dx}(p\varphi'_k) + \lambda_k q\varphi_i\varphi_k = 0.$$

Вычитая, находим:

$$\varphi_k L(\varphi_i) - \varphi_i L(\varphi_k) = (\lambda_k - \lambda_i) q\varphi_i\varphi_k.$$

Применяя тождество Лагранжа (9), находим:

$$\frac{d}{dx}(p\varphi_k\varphi'_i - p\varphi_i\varphi'_k) = (\lambda_k - \lambda_i) q\varphi_i\varphi_k.$$

Интегрируя от 0 до l, получаем:

$$[p(\varphi_k\varphi'_i - \varphi_i\varphi'_k)]_0^l = (\lambda_k - \lambda_i)\int_0^l q\varphi_i\varphi_k\,dx.$$

Левая часть здесь — нуль, так как в силу общих краевых условий имеем при $x=0$ и при $x=l$:

$$\varphi'_i = \alpha\varphi_i, \quad \varphi'_k = \alpha\varphi_k.$$

Следовательно,

$$(\lambda_i - \lambda_k)\int_0^l q\varphi_i\varphi_k\,dx = 0.$$

Это значит, что при $i \neq k$ собственные функции φ_i и φ_k ортогональны по отношению к функции $q(x)$:

$$\int_0^l q(x)\varphi_i(x)\varphi_k(x)dx = 0. \tag{10}$$

Докажем с помощью этого соотношения, что собственные значения не могут быть комплексными.

Если λ_i — комплексно, то, вообще говоря, φ_i тоже комплексно. Если уравнению (8) удовлетворяют комплексные λ_i и φ_i, то ему удовлетворяют также λ_k и φ_k, комплексно сопряженные по отношению к λ_i и φ_i (это следует из того, что p и q действительны). При этом $\varphi_i\varphi_k$ — действительная положительная величина, равная $|\varphi_i|^2$. Условие ортогональности (10) дает:

$$\int_0^l q(x)\,|\varphi_i(x)|^2\,dx = 0,$$

что невозможно, так как $q(x) > 0$. Следовательно, все λ_i действительны и положительны.

Но тогда функции $\varphi_i(x)$ тоже действительны. В самом деле, если собственному значению λ_i соответствует комплексная собственная функция $\varphi_i = \psi_1 + i\psi_2$, то сопряженная функция $\varphi_i^* = \psi_1 - i\psi_2$ — тоже собственная функция; но тогда одному собственному значению соответствуют две собственные функции, что невозможно [1] (это было бы возможно для однородного кольца).

Каков физический смысл ортогональности собственных функций? Пусть система колеблется в двух тонах: i-ом и k-ом. Тогда

$$y = \varphi_i \cos\omega_i t + \varphi_k \cos\omega_k t.$$

Кинетическая энергия на единицу длины есть $\frac{q}{2}\dot{y}^2$. При подстановке y здесь появится удвоенное произведение

$$\omega_i\omega_k\, q\,\varphi_i\varphi_k \sin\omega_i t \sin\omega_k t.$$

Полная кинетическая энергия всего стержня будет

$$T = T_i + T_k + \omega_i\omega_k \sin\omega_i t \sin\omega_k t \int_0^l q\,\varphi_i\varphi_k\,dx,$$

где T_i и T_k зависят соответственно от каждого из колебаний φ_i и φ_k в отдельности. Вследствие свойства ортогональности (10) член взаимодействия пропадает и остается

$$T = T_i + T_k.$$

Таким образом, кинетические энергии двух колебаний независимы.

Для потенциальной энергии двух колебаний член взаимодействия будет

$$\int_0^l p\,\varphi'_i\varphi'_k\,dx.$$

---

[1] [Здесь исключается тривиальный случай, когда $\varphi_i(x)$ содержит *постоянный* комплексный множитель. Если $\varphi_i(x)$ — собственная функция, то $a\varphi_i(x)$, где a — комплексное число, тоже собственная функция.]

Можно показать, что в случае закрепленных концов ($\varphi=0$ на концах) или свободных концов ($\varphi'=0$ на концах) функции φ'_i и φ'_k тоже ортогональны [по отношению к $p(x)$] и потенциальные энергии двух колебаний независимы. Но в случае общих краевых условий это не так, вместо условия ортогональности (10) получается:

$$\int_0^l p\,\varphi'_i\varphi'_k\,dx+\left[\frac{p}{\alpha}\varphi'_i\varphi'_k\right]_0+\left[\frac{p}{\beta}\varphi'_i\varphi'_k\right]_l=0. \qquad (11)$$

Смысл этого соотношения заключается в том, что потенциальные энергии i-того и k-того колебаний складываются также и здесь, но с учетом потенциальной энергии пружин на концах. Простой ортогональности (10) здесь быть не может, потому что не вся потенциальная энергия (в отличие от кинетической) находится в самом стержне. Уравнение (11) определяет некоторое обобщенное понятие ортогональности. Иногда ее называют „нагруженной ортогональностью".

Выражение типа (11) можно рассматривать как интеграл в некотором обобщенном смысле — интеграл Стильтьеса.

ДЕВЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(19/I 1932 г.)

Уравнение для отыскания собственных значений. Случай, когда нет собственных значений. Случай, когда любое число является собственным значением. Вычисление решений дифференциального уравнения в виде ряда по степеням параметра. Теорема о существовании бесчисленного множества собственных значений задачи Штурма—Лиувилля (начало).

Мы вывели в прошлый раз ряд основных свойств собственных значений задачи Штурма—Лиувилля, но нам еще остается доказать само существование собственных значений, а также то, что они образуют бесконечное множество, не имеющее точек сгущения в конечной области. Исследование этих вопросов — дело трудное, так как мы не можем получить, вообще говоря, в замкнутой форме выражения для собственных функций и собственных значений.