Можно показать, что в случае закрепленных концов ($\varphi=0$ на концах) или свободных концов ($\varphi'=0$ на концах) функции φ'_i и φ'_k тоже ортогональны [по отношению к $p(x)$] и потенциальные энергии двух колебаний независимы. Но в случае общих краевых условий это не так, вместо условия ортогональности (10) получается:

$$\int_0^l p\,\varphi'_i\varphi'_k\,dx+\left[\frac{p}{\alpha}\varphi'_i\varphi'_k\right]_0+\left[\frac{p}{\beta}\varphi'_i\varphi'_k\right]_l=0. \tag{11}$$

Смысл этого соотношения заключается в том, что потенциальные энергии i-того и k-того колебаний складываются также и здесь, но с учетом потенциальной энергии пружин на концах. Простой ортогональности (10) здесь быть не может, потому что не вся потенциальная энергия (в отличие от кинетической) находится в самом стержне. Уравнение (11) определяет некоторое обобщенное понятие ортогональности. Иногда ее называют „нагруженной ортогональностью".

Выражение типа (11) можно рассматривать как интеграл в некотором обобщенном смысле — интеграл Стильтьеса.

ДЕВЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(19/I 1932 г.)

Уравнение для отыскания собственных значений. Случай, когда нет собственных значений. Случай, когда любое число является собственным значением. Вычисление решений дифференциального уравнения в виде ряда по степеням параметра. Теорема о существовании бесчисленного множества собственных значений задачи Штурма—Лиувилля (начало).

Мы вывели в прошлый раз ряд основных свойств собственных значений задачи Штурма—Лиувилля, но нам еще остается доказать само существование собственных значений, а также то, что они образуют бесконечное множество, не имеющее точек сгущения в конечной области. Исследование этих вопросов — дело трудное, так как мы не можем получить, вообще говоря, в замкнутой форме выражения для собственных функций и собственных значений.

Возникает еще другой вопрос: как практически вычислять собственные значения и собственные функции? Существует *систематический* способ, который при достаточном терпении приводит к желаемому результату. Существуют также простые или плохо обоснованные способы, специфичные для разных частных случаев.

Предположим, что собственные значения существуют и посмотрим, как можно их вычислить. Наша задача записывается так:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right)+\lambda\bar{q}\varphi=0, \tag{1}$$

$$(\bar{\alpha}_1\varphi-\bar{\alpha}_2\varphi')_0=0, \tag{2}$$

$$(\bar{\beta}_1\varphi+\bar{\beta}_2\varphi')_l=0, \tag{3}$$

причем

$$\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2>0,\ \overline{\beta_1\beta_2}>0. \tag{4}$$

Мы можем несколько упростить уравнение (1), введя вместо x новую переменную:

$$\xi=\int_0^x\frac{dx}{p(x)}.$$

Такое преобразование всегда возможно, так как

$$p(x)>0.$$

Имеем:

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi}{d\xi}\cdot\frac{1}{p},$$

и, следовательно, уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}+\lambda q(\xi)\varphi=0,$$

где

$$q(\xi)=p(x)\bar{q}(x).$$

Таким образом, наша задача записывается теперь так (вместо ξ мы снова пишем x):

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\lambda q(x)\varphi=0, \tag{5}$$

$$(\alpha_1\varphi-\alpha_2\varphi')_0=0, \tag{6}$$

$$(\beta_1\varphi+\beta_2\varphi')_l=0, \tag{7}$$

где

$$\alpha_2 = \frac{\overline{\alpha_2}}{p_0}, \quad \beta_2 = \frac{\overline{\beta_2}}{p_l}. \tag{8}$$

Следует помнить, что здесь l имеет другой смысл, чем в (3). Мы обозначили через l значение ξ, соответствующее прежнему $x = l$. Итак, мы можем рассматривать вместо (1) уравнение, в котором $p(x) = 1$.

В обычной классической задаче о решении дифференциального уравнения задаются φ и φ' для *одной* точки. В интересующей нас задаче заданы два условия для φ и φ' в *двух* точках. Но мы будем опираться при решении исследуемой задачи на то, что известно относительно классической задачи.

Уравнение (5) линейно. Если φ_1 — решение уравнения (5), то $C\varphi_1$, где C — постоянная, тоже решение.

Известно, что уравнение (5) имеет фундаментальную систему решений φ_1 и φ_2, такую, что *любое* решение, вся совокупность решений, может быть представлена в виде

$$\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2, \tag{9}$$

где C_1 и C_2 — постоянные.

Если заданы φ и φ' для $x = 0$, то, подобрав соответственно C_1 и C_2, всегда можно найти решение (9), удовлетворяющее этим условиям.

Возьмем для простоты в качестве φ_1 решение, удовлетворяющее при $x = 0$ условиям

$$\varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_1'(0) = 0, \tag{10}$$

а в качестве φ_2 — решение, удовлетворяющее условиям

$$\varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = 1. \tag{11}$$

Такие решения существуют в силу основной теоремы теории дифференциальных уравнений. Выясним, образуют ли эти решения фундаментальную систему. Вспомним, что необходимое и достаточное условие того, что φ_1 и φ_2 образуют фундаментальную систему, таково:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для нашего уравнения (5) очень легко доказать теорему, утверждающую, что если детерминант $W(x)$ отличен от нуля для какого-то *одного* значения x, то он отличен от нуля для *всех* значений x. Но в нашем случае

$$W(0)=\begin{vmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) \end{vmatrix}=1.$$

Следовательно, для любого x

$$W(x)\neq 0$$

и решения φ_1 и φ_2 образуют фундаментальную систему.

Решим теперь основной вопрос: существует ли решение, удовлетворяющее граничным условиям (6) и (7). Запишем их сокращенно в таком виде:

$$l_1(\varphi)=0; \tag{12}$$

$$l_2(\varphi)=0. \tag{13}$$

Операторы l_1 и l_2 линейны:

$$l_{1,2}(\varphi_1+\varphi_2)=l_{1,2}(\varphi_1)+l_{1,2}(\varphi_2);$$

$$l_{1,2}(C\varphi)=Cl_{1,2}(\varphi).$$

Если краевая задача (5) — (7) имеет решение, то оно содержится в (9), так как в этом семействе функций содержатся *все* решения уравнения (5). Таким образом, вопрос сводится к тому, можно ли подобрать C_1 и C_2 так, чтобы удовлетворить условиям (6) и (7).

Укажем явно, что наши решения φ_1 и φ_2 зависят от параметра λ, т. е. будем писать их в виде

$$\varphi_1=\varphi_1(x,\lambda), \quad \varphi_2=\varphi_2(x,\lambda).$$

Потребуем, чтобы решение (9) удовлетворяло граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned} C_1 l_1(\varphi_1)+C_2 l_1(\varphi_2)=0, \\ C_1 l_2(\varphi_1)+C_2 l_2(\varphi_2)=0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Эти уравнения линейны и однородны по отношению к C_1 и C_2. Они всегда имеют тривиальное решение:

$$C_1=C_2=0,$$

но оно нас не интересует. Нам нужно, чтобы по крайней мере одна из констант C_1 и C_2 не равнялась нулю. Уравнения (14) имеют нетривиальное решение только тогда, когда

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1[\varphi_1(\lambda)] & l_1[\varphi_2(\lambda)] \\ l_2[\varphi_1(\lambda)] & l_2[\varphi_2(\lambda)] \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Левая часть есть некоторая трансцендентная функция от λ. Нетривиальные решения для C_1 и C_2 могут быть только при таких λ, которые удовлетворяют трансцендентному уравнению (15). Таким образом, сразу видно, что краевая задача имеет решение не при всяком λ.

Итак, мы получили трансцендентное уравнение для определения интересующих нас чисел λ. Нам нужно уметь его решать, хотя бы приближенным способом.

Вернемся к уже рассмотренному случаю однородного стержня и посмотрим, что там дает изложенный способ. Возьмем простейшие краевые условия

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(l) = 0$$

и положим для простоты:

$$q(x) = 1. \tag{16}$$

Пойдем только что указанным „лобовым", систематическим путем. Для случая (16) мы можем написать в явном виде фундаментальную систему φ_1 и φ_2:

$$\varphi_1 = \cos\sqrt{\lambda}x, \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Уравнения (14) здесь таковы:

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0,$$

$$C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Условие (15) имеет, следовательно, вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\sqrt{\lambda}l & \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Это уже известное нам трансцендентное уравнение для собственных значений однородного стержня.

Вся трудность общей задачи (о неоднородном стержне) — в решении трансцендентного уравнения (15). В большинстве случаев оно находится графически, но мы займемся принципиальной стороной вопроса. Мы докажем, что уравнение (15) всегда имеет бесчисленное множество решений, образующих дискретную совокупность. Это утверждение связано с определенным типом краевых условий. Аналогично обстоит дело и в случае периодических краевых условий

$$\varphi(0)=\varphi(l), \quad \varphi'(0)=\varphi'(l)$$

или похожих условий

$$\varphi(0)=\varphi(l), \qquad \varphi'(0)=-\varphi'(l). \tag{17}$$

Но если, например, мы ставим условия

$$\varphi(0)=0, \ \varphi'(0)=0,$$

то детерминант $\Delta=1$ и нельзя подобрать λ, удовлетворяющее уравнению (15).

В случае краевых условий (17) имеем $\Delta=0$, и, следовательно, краевым условиям можно удовлетворить при любом λ. В этом легко убедиться путем элементарного рассуждения. Перенесем начало координат в середину стержня. Тогда условия (17) примут вид

$$\varphi\left(-\frac{l}{2}\right)=\varphi\left(\frac{l}{2}\right), \quad \varphi'\left(-\frac{l}{2}\right)=-\varphi'\left(\frac{l}{2}\right).$$

Им удовлетворяет любая функция вида $\cos\sqrt{\lambda}\,x$, так как косинус — четная функция, а его производная — нечетная.

Этот аппарат очень красив на бумаге, но его трудно применить практически, так как трудно найти фундаментальную систему уравнения (5) при q, зависящем от x. В первый момент может даже показаться, что этот способ практически ничего не дает.

Надо указать путь для вычисления с достаточным приближением φ_1 и φ_2 как функций λ. Общая теория говорит, что φ является непрерывной функцией от λ, а кроме того (для всякого заданного x) она является *целой* функцией от λ. (Целая функция означает — не обращающаяся в конечной области в бесконечность; $\cos\lambda$, e^{λ} —

целые функции λ). Итак, φ — целая трансцендентная функция λ, и, следовательно, ее можно искать в виде ряда по степеням λ:

$$\varphi(x, \lambda) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \ldots \tag{18}$$

Представив решение в таком виде, можно обрезать ряд на каком-нибудь члене и подставить полученное таким путем приближенное выражение в трансцендентное уравнение (15). Можно указать рецепт нахождения ряда (18) и доказать, что ряд сходится для всех конечных значений λ. То и другое легко сделать.

Продифференцируем дважды ряд (18):

$$\varphi'' = u_0'' + \lambda u_1'' + \lambda^2 u_2'' + \ldots \tag{19}$$

Подставим (18) и (19) в уравнение (5) и приравняем нулю коэффициенты при всех степенях λ. Мы получим:

$$u_0'' = 0, \ u_1'' + q u_0 = 0, \ldots \ u_n'' + q u_{n-1} = 0.$$

Такова последовательность уравнений, которым удовлетворяют функции u_n.

Условия (10), которым должно удовлетворять одно из фундаментальных решений, будут выполнены, если потребовать

$$u_0(0) = 0, \ u_0'(0) = 1,$$

а для всех $n > 0$

$$u_n(0) = 0, \ u_n'(0) = 0.$$

Мы получаем в результате:

$$u_0 = x.$$

Каждая функция u_n определяется из предыдущей u_{n-1} простой квадратурой:

$$u_n = -\int_0^x d\xi \int_0^\xi q(\eta)\, u_{n-1}(\eta)\, d\eta.$$

Итак, нахождение $\varphi_1(x)$ [и аналогично $\varphi_2(x)$] сведено к последовательному ряду квадратур. Мы оперировали с рядом формально, но можно показать, что ряд (18) сходится.

Оборвав ряд (18) на некотором члене, мы заменим трансцендентное уравнение (15) алгебраическим уравнением той или иной степени. При достаточно большом числе членов его корни будут как угодно близки к корням трансцендентного уравнения. Практически для основного колебания часто достаточно взять 3—4 члена разложения. Для обертонов приходится брать больше членов и вычисление становится хлопотливым.

Техника выработала хорошие способы приближенного вычисления, но пока еще мало оправданные.

Перейдем к доказательству того, что существует бесчисленное множество собственных значений. Доказательства этой теоремы были даны уже давно. При этом доказательства проводились для некоторых частных граничных условий, а затем к ним сводили остальные граничные условия. Недавно появилась работа Прюфера (она изложена в третьем издании книги Бибербаха[1]), в которой доказательство проводится сразу для самого общего случая задачи Штурма—Лиувилля. Изложим это доказательство.

Введем новую переменную

$$\chi = \frac{d\varphi}{dx}$$

и напишем вместо уравнения (5) два уравнения:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \chi, \qquad \frac{d\varphi}{dx} + \lambda q \varphi = 0. \tag{20}$$

Положим:

$$\varphi = \rho \sin\theta, \quad \chi = \rho\cos\theta. \tag{21}$$

Мы вводим, таким образом, две новые функции: ρ и θ. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \rho' \sin\theta + \rho\theta'\cos\theta; \\ \frac{d\chi}{dx} &= \rho'\cos\theta - \rho\theta'\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Подставляя (22) в (20), получаем уравнения:

$$\rho'\sin\theta + \rho\theta'\cos\theta - \rho\cos\theta = 0; \tag{23}$$

$$\rho'\cos\theta - \rho\theta'\sin\theta + \lambda q\rho\sin\theta = 0. \tag{24}$$

Мы можем их преобразовать так, чтобы получилось одно уравнение для θ' и другое для ρ'. Умножим (23) на $\cos\theta$, а (24) — на $\sin\theta$, и вычтем. Это дает по сокращении на ρ (мы далее увидим, что ρ нигде не обращается в нуль):

$$\theta' = \cos^2\theta + \lambda\, p \sin^2\theta. \tag{25}$$

[1] [L. Bieberbach. Theorie der Differentialgleichungen. 3-е переработ. издание, Берлин, 1930.]

Далее умножим (23) на $\sin\theta$, а (24) — на $\cos\theta$, и сложим. Мы получим:

$$\rho' = \rho(1 - \lambda p)\sin\theta\cos\theta. \tag{26}$$

Для θ получилось уравнение (25), не содержащее ρ. Уравнение (26) решается посредством квадратуры

$$\ln|\rho| = \int_0^x (1 - \lambda p)\sin\theta\cos\theta dx + c. \tag{27}$$

Чтобы ее вычислить, нужно сначала решить уравнение для θ, а потом подставить решение в (26). При этом получатся две постоянные интегрирования.

Первый же шаг продвинул нас довольно значительно вперед: мы получили для θ *одно* уравнение. Но это куплено той ценой, что уравнение нелинейное. Можно легко модифицировать подход так, чтобы было удобно находить решение количественно для случая медленно или мало меняющихся $q(x)$. Но нас интересует сейчас другое — доказательство существования неограниченной последовательности собственных значений. Сейчас мы увидим, в чем заключается сила излагаемого метода.

Перепишем граничные условия (6) и (7) в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}(\alpha_1\varphi - \alpha_2\chi)_0 &= 0,\\ (\beta_1\varphi + \beta_2\chi)_l &= 0\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

и подставим в них, вместо φ и χ, функции ρ и θ:

$$(\alpha_1\sin\theta - \alpha_2\cos\theta)_0 = 0, \quad (\beta_1\sin\theta + \beta_2\cos\theta)_l = 0.$$

Мы видим, что в граничные условия вошла только θ. Нужно удовлетворить граничным условиям, куда входит только θ, тогда будут удовлетворены и исходные граничные условия (28).

Так как α_1 и α_2 — одного знака, можно удовлетворить первому граничному условию, взяв для θ_0 определенное значение γ_1 в первом квадранте:

$$0 < \gamma_1 < \frac{\pi}{2}. \tag{29}$$

Но β_1 и β_2 тоже имеют одинаковые знаки и, следовательно, в первом квадранте заведомо нельзя удовлетворить второму граничному условию. Можно пойти во второй квадрант, там мы найдем то, что нам нужно. Мы удовлетворим второму граничному условию, если возьмем $\theta_l=\gamma_2$, причем

$$\frac{\pi}{2}<\gamma_2<\pi. \tag{30}$$

Теперь вся задача прояснилась. Найдя $\theta(x)$, удовлетворяющее уравнению (25) и равное γ_1 для $x=0$ и γ_2 для $x=l$, мы решим нашу основную задачу.

Если $\theta(x)$ для $x=0$ равно $\gamma_1+\pi$, $\gamma_1+2\pi$, $\gamma_1+3\pi,\ldots$, а для $x=l$ соответственно: $\gamma_2+\pi$, $\gamma_2+2\pi$, $\gamma_2+3\pi,\ldots$, то это дает то же самое, поскольку тангенс периодичен с периодом π и краевые условия удовлетворяются, а $\sin^2$ и $\cos^2$ тоже периодичны с периодом π, и, следовательно, уравнение (25) тоже удовлетворится. Мы получим другое решение для θ, а именно: $\theta_2=\theta_1+\pi$, но это не даст ничего нового по отношению к первому решению.

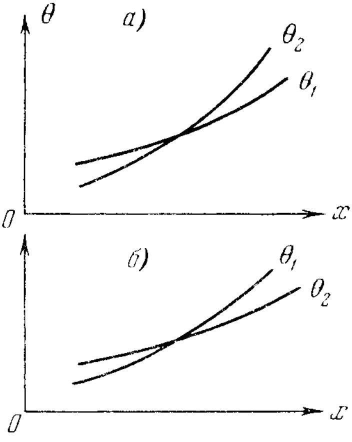

Рис. 169.

Но можно поставить другую задачу: оставить первое граничное условие $\theta(0)=\gamma_1$ и задать новое граничное условие для $x=l$, а именно: $\theta(l)=\gamma_2+n\pi$. Если мы решим *эту* задачу, то для $\theta(x)$ получится другая функция, отличная от $\theta(x)$ при $n=0$.

Если при любом целом n мы сможем найти такое λ, что соответствующее $\theta(x)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\theta(0)=\gamma_1, \quad \theta(l)=\gamma_2+n\pi,$$

то этим будет доказано, что исходное уравнение (20) имеет бесконечное множество собственных значений.

Доказательство проводится вполне строго. Оно становится гораздо нагляднее, если поясняется геометрически.

Нелинейное уравнение (25) мы решить не можем. Но мы можем вывести из него интересующие нас свойства функции $\theta(x)$. Из уравнения (25) видно, что при λ положительном $\theta(x)$ — монотонно возрастающая функция. В самом деле, ее производная всюду положительна (она не может обращаться в нуль, так как $\cos\theta$ и $\sin\theta$ не могут быть равны нулю одновременно).

Рассмотрим уравнение (25) при различных λ. Величину $\lambda q(x)$ обозначим через $\sigma(x)$:

$$\theta' = \cos^2\theta + \sigma(x)\sin^2\theta.$$

Обозначим индексами 1 и 2 две различные функции $\sigma(x)$ и соответствующие им $\theta(x)$:

$$\theta'_1 = \cos^2\theta_1 + \sigma_1(x)\sin^2\theta_1,$$

$$\theta'_2 = \cos^2\theta_2 + \sigma_2(x)\sin^2\theta_2.$$

Пусть всюду

$$\sigma_2(x) > \sigma_1(x).$$

Кривые $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ обе монотонно поднимаются с ростом x. Они могут пересекаться. Если они пересекаются, то только так, что при увеличении x за точку пересечения θ_2 идет выше θ_1 (рис. 169, *а*). Они не могут пересечься так, как на рис. 169, *б* поскольку производная θ'_1 меньше производной θ'_2 (σ_1 меньше, чем σ_2). Значит, в точке пересечения $\theta'_1 < \theta'_2$. Но, может быть, они пересекаются в точке, где $\sin\theta = 0$? Для этого значения x обе производные одинаковы. Тогда кривые касаются. Я утверждаю, однако, что и здесь кривая θ_2 пойдет выше. Действительно, кривые касаются в одной точке (они не могут касаться по целому отрезку). Для соседних интегральных кривых $\sin\theta_2 \neq 0$. Различные интегральные кривые θ_2 пересекаться между собой не могут (особых точек нет). Значит, и в этом случае после пересечения (касания) кривая θ_2 пойдет выше θ_1. В итоге мы заключаем, что если кривые θ_1 и θ_2 один раз пересеклись, то они уже не могут пересечься второй раз.

Будем теперь сравнивать функции $\theta(x)$ для различных λ при одном и том же $q(x)$. Будем рассматривать решение как функцию от λ. Функция $\sigma(x) = \lambda q$ растет при любых x вместе с λ.

Теперь ясно, как мы докажем, что существует бесконечная последовательность собственных значений.

Если θ_1 и θ_2, соответствующие $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ ($\lambda_2 > \lambda_1$), выходят при $x = 0$ из одной точки, то значит, при $x > 0$ всюду $\theta_2 > \theta_1$, так как кривые не могут пересекаться. Чем больше значение λ, тем выше проходит кривая θ и тем выше она пересекает прямую $x = l$. Для того, чтобы доказать то, что нам нужно, необходимо доказать, что при $\lambda = 0$ кривая $\theta(x)$ пересекает прямую $x = l$ ниже точки γ_2, а при $\lambda \to \infty$ точка пересечения с прямой $x = l$

не стремится к конечному пределу. Первое нужно для того, чтобы доказать существование наименьшего собственного значения, второе — для того, чтобы убедиться в существовании бесконечного числа собственных значений без точек сгущения.

Если эти два утверждения удастся доказать, то теорема будет доказана.

ДЕСЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(23/I 1932 г.)

Окончание доказательства основной теоремы о собственных значениях задачи Штурма—Лиувилля. Число узлов собственных функций. Оценки собственных значений. Изменение собственных значений при изменении параметров. Массы и индуктивности на концах распределенной системы.

Для того, чтобы закончить рассмотрение собственных колебаний распределенных систем, мы должны сегодня завершить доказательство фундаментальной теоремы о счетном множестве собственных значений в задаче Штурма—Лиувилля.

Мы выяснили, что если при заданном целом n можно найти такое λ, при котором уравнение (25) предыдущей лекции имеет решение $\theta(x)$, проходящее через точки $x=0$, $\theta=\gamma_1$ и $x=l$, $\theta=\gamma_2+n\pi$, то это λ есть собственное значение нашей краевой задачи, а $\theta(x)$ — соответствующая собственная функция.

Решения уравнения (25) монотонно возрастают с x. Далее мы получили следующий результат. Если λ_1 и λ_2 — два различных значения λ, причем $\lambda_2>\lambda_1$, так что

$$\sigma_2(x)=\lambda_2 q(x)>\sigma_1(x)=\lambda_1 q(x),$$

и если

$$\theta(0, \lambda_2)=\theta(0, \lambda_1),$$

то для всякого $x>0$

$$\theta(x, \lambda_2)>\theta(x, \lambda_1) \qquad (1)$$

и, в частности,

$$\theta(l, \lambda_2)>\theta(l, \lambda_1).$$

Из общей теории дифференциальных уравнений следует, что $\theta(x, \lambda)$ есть непрерывная функция параметра λ. Неравенство (1) означает, что эта функция — монотонно возрастающая.