не стремится к конечному пределу. Первое нужно для того, чтобы доказать существование наименьшего собственного значения, второе — для того, чтобы убедиться в существовании бесконечного числа собственных значений без точек сгущения.

Если эти два утверждения удастся доказать, то теорема будет доказана.

ДЕСЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(23/I 1932 г.)

Окончание доказательства основной теоремы о собственных значениях задачи Штурма—Лиувилля. Число узлов собственных функций. Оценки собственных значений. Изменение собственных значений при изменении параметров. Массы и индуктивности на концах распределенной системы.

Для того, чтобы закончить рассмотрение собственных колебаний распределенных систем, мы должны сегодня завершить доказательство фундаментальной теоремы о счетном множестве собственных значений в задаче Штурма—Лиувилля.

Мы выяснили, что если при заданном целом n можно найти такое λ, при котором уравнение (25) предыдущей лекции имеет решение $\theta(x)$, проходящее через точки $x=0$, $\theta=\gamma_1$ и $x=l$, $\theta=\gamma_2+n\pi$, то это λ есть собственное значение нашей краевой задачи, а $\theta(x)$ — соответствующая собственная функция.

Решения уравнения (25) монотонно возрастают с x. Далее мы получили следующий результат. Если λ_1 и λ_2 — два различных значения λ, причем $\lambda_2>\lambda_1$, так что

$$\sigma_2(x)=\lambda_2 q(x)>\sigma_1(x)=\lambda_1 q(x),$$

и если

$$\theta(0, \lambda_2)=\theta(0, \lambda_1),$$

то для всякого $x>0$

$$\theta(x, \lambda_2)>\theta(x, \lambda_1) \tag{1}$$

и, в частности,

$$\theta(l, \lambda_2)>\theta(l, \lambda_1).$$

Из общей теории дифференциальных уравнений следует, что $\theta(x, \lambda)$ есть непрерывная функция параметра λ. Неравенство (1) означает, что эта функция — монотонно возрастающая.

Теперь мы пойдем дальше. Мы хотим доказать, что

$$\theta(l, 0) \leqslant \gamma_2. \tag{2}$$

Итак, полагаем $\lambda = 0$. Тогда уравнение (25) предыдущей лекции принимает вид

$$\theta' = \cos^2 \theta. \tag{3}$$

Одно частное решение можно указать сразу:

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Это решение (θ — постоянно) соответствует граничным условиям для случая, когда оба конца свободны ($\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$). Отбросим этот специальный случай. Посмотрим, что будет в остальных случаях.

Уравнение (3) не трудно проинтегрировать. Мы получаем общее решение:

$$\operatorname{tg} \theta = x + C.$$

Отсюда следует, что если при $x = 0$ $\theta = \gamma_1 < \frac{\pi}{2}$, то как бы x ни возрастало, θ остается меньше $\frac{\pi}{2}$:

$$\theta(l, 0) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Но $\gamma_2 \geqslant \frac{\pi}{2}$ [см. неравенство (30) предыдущей лекции], и, следовательно, (2) доказано.

Что можно сказать об изменении θ при неограниченном росте λ? Если вместо $q(x)$ мы подставим в уравнение (25)

$$m^2 = q_{\min},$$

то для данного λ, вместо $\lambda q(x)$, будет стоять меньшая функция $\lambda m^2 \leqslant \lambda q(x)$. Обозначим через $\bar{\theta}$ решение нового уравнения:

$$\bar{\theta}' = \cos^2 \bar{\theta} + \lambda m^2 \sin^2 \bar{\theta}. \tag{4}$$

На основании того, что мы раньше доказали, мы знаем, что если $\bar{\theta}(0, \lambda) = \theta(0, \lambda)$, то $\bar{\theta}(x, \lambda) < \theta(x, \lambda)$ при $x > 0$. Следовательно, если мы докажем, что при $\lambda \to \infty$ величина $\bar{\theta}(l, \lambda) \to \infty$, то это будет подавно справедливо для $\theta(l, \lambda)$.

Но в уравнении (4) переменные разделяются и получается хорошо известный интеграл:

$$m\sqrt{\lambda}\,\mathrm{tg}\,\bar{\theta} = \mathrm{tg}\,(m\sqrt{\lambda}\,x + C).$$

При $x = l$ имеем:

$$m\sqrt{\lambda}\,\mathrm{tg}\,\bar{\theta} = \mathrm{tg}\,(m\sqrt{\lambda}\,l + C), \tag{5}$$

откуда мы видим, что при $\lambda \to \infty$ также и $\theta(l, \lambda) \to \infty$. Действительно, при λ таком, что

$$m\sqrt{\lambda}\,l + C = \frac{\pi}{2},$$

правая часть (5) обращается в бесконечность. При этом $m\sqrt{\lambda}\,\mathrm{tg}\,\bar{\theta}$ тоже обращается в бесконечность, т. е.

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{2}.$$

При дальнейшем росте λ правая часть делается отрицательной, причем по смыслу задачи $\bar{\theta}$ при этом растет. Если в правой части, благодаря возрастанию λ, аргумент увеличивается на π, то и в левой части аргумент $\bar{\theta}$ возрастает на π.

Таким образом, наряду с тем, что

$$\theta(l, 0) \leqslant \gamma_2,$$

мы доказали, что при $\lambda \to \infty$

$$\theta(l, \lambda) \to \infty.$$

Еще одно замечание. Число добавляющихся π для $\bar{\theta}$ равно или больше того, сколько раз π прибавляется к аргументу $m\sqrt{\lambda}\,l$. Поэтому θ не может обратиться в ∞ раньше, чем λ обратится в ∞.

Докажем теперь основную теорему.

На оси ординат (рис. 170) отложим отрезок γ_1. Построим для произвольно выбранного λ кривую $\theta(x, \lambda)$. Она отсекает на прямой $x = l$ некоторый отрезок $\theta(l, \lambda)$. Мы доказали, что его длина непрерывно возрастает с ростом λ. При этом кривые поворачиваются и будут при $\lambda = \infty$ пересекать ось $x = l$ в бесконечности. При некотором $\lambda = \lambda_0$ кривая непременно попадет в γ_2, при некотором $\lambda = \lambda_1$ — в $\gamma_2 + \pi$, при некотором $\lambda = \lambda_2$ — в $\gamma_2 + 2\pi$ и т. д.

Каждый раз, как кривая будет попадать в одну из этих точек, будет получаться нужное нам решение, удовлетворяющее краевым условиям (28), которые мы писали в предыдущей лекции. $\theta(l, \lambda)$ — непрерывная функция λ. Непрерывная же функция пробегает *все* значения в интервале между крайними точками. Отсюда мы заключаем, что наверняка существуют такие значения λ_0, $\lambda_1, \ldots$ параметра λ, которые можно расположить в порядке возрастания ($0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$), и такие, что

при $\lambda = \lambda_0$ $\quad \theta(l, \lambda) = \gamma_2$,

при $\lambda = \lambda_1$ $\quad \theta(l, \lambda) = \gamma_2 + \pi$,

при $\lambda = \lambda_2$ $\quad \theta(l, \lambda) = \gamma_2 + 2\pi$,

. . . .

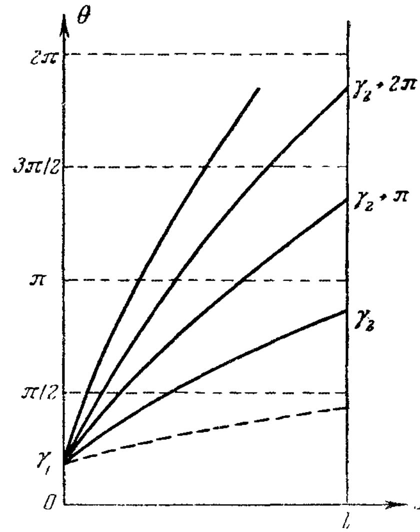

Рис. 170.

Ряд этих значений λ — собственных значений нашей задачи — не может иметь точек сгущения в конечной области. В самом деле, $\theta(l, \lambda)$ — непрерывная функция λ. Если бы были два сколь угодно близкие значения λ, то существовали бы два сколь угодно близкие значения $\theta(l, \lambda)$, а мы знаем, что этого не может быть.

Говоря физически, каждый обертон выше предыдущего и частота колебаний с ростом обертона растет в бесконечность.

Для определенного λ функция θ однозначно определена. Это значит, что для каждой частоты существует определенная форма колебания. Различных форм для одной частоты быть не может.

Возьмем какое-нибудь λ_n. При этом

$$\theta(l, \lambda_n) = \gamma_2 + n\pi.$$

Функция $\theta(x, \lambda_n)$ — монотонно возрастающая функция, ее производная, вообще говоря, не постоянна (рис. 170). Обращается ли собственная функция $\varphi = \rho \sin\theta$, соответствующая $\lambda = \lambda_n$, в нуль где-нибудь на протяжении длины стержня? И если да, то сколько раз?

Существует значение x, при котором $\theta = \pi$ и $\sin\theta = 0$. Так как θ — монотонная функция x, то она принимает это значение только один раз. Кривая $\theta(x)$ пересекает прямые $\theta=2\pi$, $\theta=3\pi, \ldots$ Имеется n таких прямых. Таким образом, внутри интервала $(0, l)$ собственная функция n раз обращается в нуль. Какую бы систему мы ни взяли, n-ой гармонике всегда соответствует n узлов. Мы уже знаем, что в однородном стержне при $\lambda=\lambda_0$ нет ни одного узла, при $\lambda=\lambda_1$ — один узел и т. д. (см. рис. 156. Теперешняя нумерация обертонов отличается от прежней: $n=s-1$). Число узлов (не на концах) равно номеру обертона. Мы видим теперь,

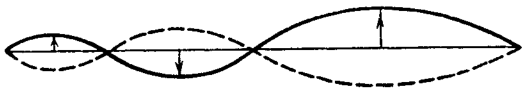

Рис. 171.

что это свойство имеет место и в самом общем случае. Его можно описать и так: система подразделяется на $n+1$ отрезок, причем смежные отрезки колеблются в противоположных фазах (рис. 171). Это обстоятельство очень важно в вопросах излучения.

Есть один случай кажущегося противоречия — случай открытых концов. Мы склонны сказать, что на рис. 172 изображен основной тон. Тут есть один узел. Между тем при основном тоне его не должно быть. Но дело в том, что при обоих свободных концах существует собственное значение $\lambda=0$. Мы должны рассматривать в качестве основного тона движение, соответствующее $\lambda=0$. Но в вопросах колебаний это движение нас не интересует (собственная функция здесь — постоянная). Основной тон открытой на концах антенны соответствует статическому заряду, первый обертон — колебанию в полволны и т. д.

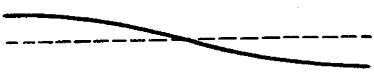

Рис. 172.

Мы доказали основную теорему существования. Рассмотрим теперь некоторые ее физические следствия.

При увеличении λ кривые $\theta(x, \lambda)$ непрерывно поднимаются. Выбрав какую-нибудь точку $\theta(l)$, мы тем самым задаем определенное значение λ. Интервалу значений $\theta(l)$ соответствует определенный интервал значений λ. Граничные условия были такие: $\theta(l)=\gamma_2+n\pi$, причем γ_2 лежит между $\pi/2$ и π. Это объясняется тем, что

$$\operatorname{tg}\gamma_2=-\frac{\beta_2}{\beta_1},$$

где β_1 и β_2 — одного знака. Последнее вытекает из физических соображений; например: β_2/β_1 есть отношение емкости на единицу длины провода к емкости C_0 приключенного к его концу конденсатора.

Будем теперь при одном и том же $q(x)$ задавать различные граничные условия (например, меняя емкость конденсатора.) Этим мы будем задавать различные точки $\theta(l)$. Но как бы мы ни изменяли емкость конденсатора, мы не выйдем для γ_2 за „зарубки“ $\pi/2$ и π. Нельзя посадить конечную точку в интервал между π и $3\pi/2$. Отсюда следует, что нельзя перекрыть всю шкалу частот колебаний, меняя только емкость конденсатора, приключенного на конце.

В случае однородной системы, открытой на одном конце (рис. 149, *a*), при $C_0 = \infty$ имеем:

$$\lambda_0 = \frac{c}{4l}, \tag{6}$$

а при $C_0 = 0$

$$\lambda_0 = \frac{c}{2l}. \tag{7}$$

Вращая конденсатор, мы можем перейти непрерывно от значения (6) к значению (7), но дальше остается разрыв: первый обертон при $C_0 = \infty$ имеет квадрат частоты

$$\lambda_1 = \frac{3c}{4l}.$$

Разрыв между $c/2l$ и $3c/4l$ нельзя перекрыть путем подбора C_0. Есть запретные зоны, в которые нельзя попасть, меняя условия на *одном* конце.

Изменим теперь, попрежнему не меняя саму распределенную систему, граничные условия на *обоих* концах. Собственное значение λ изменится: увеличится или уменьшится. Наклон интегральных кривых станет всюду (т. е. при любых x) либо больше, либо меньше, чем прежде. Будем сравнивать интересующий нас случай со случаем закрепленных концов, когда $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \pi$ (рис. 173). Мы видим, что система дает наивысший тон тогда, когда закреплены оба конца, а наинизший — когда оба конца свободны. При данной распределенной системе самая низкая частота соответствует двум свободным концам.

Вообще говоря, вычислить λ_n совсем нелегко. Но можно указать некоторые пределы, между которыми заключены λ_n. Будем сравнивать *два* случая. Граничные условия в обоих случаях одни и те же, но в одном из них $q=q_1(x)$, а в другом $q=q_2(x)$. Пусть для всех x

$$q_2(x)>q_1(x).$$

Покажем, что

$$\lambda_n^{(2)}\leqslant\lambda_n^{(1)}.$$

Интегральные кривые θ_1 и θ_2, соответствующие обоим $q(x)$, должны проходить через одни и те же концевые точки (рис. 174). Если $\lambda_n^{(2)}>\lambda_n^{(1)}$, то во всем интервале $(0, l)$ имеем:

$$\lambda_n^{(2)}q_2>\lambda_n^{(1)}q_1,$$

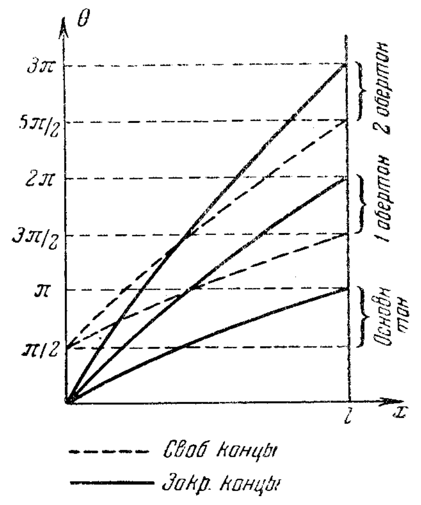

Рис. 173.

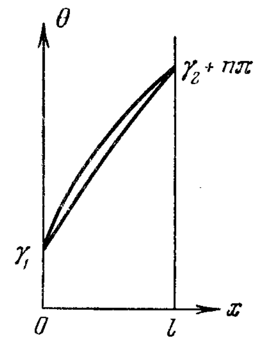

Рис. 174.

и если $\theta_2(0)=\theta_1(0)$, то при $x>0$ всюду $\theta_2'(x)>\theta_1'(x)$. Следовательно, $\theta_2(l)=\theta_1(l)$ невозможно, а значит, $\lambda_n^{(2)}$ равно или меньше $\lambda_n^{(1)}$. Если $\lambda_n^{(2)}<\lambda_n^{(1)}$, то может быть так, что в части интервала $\theta_2'(x)>\theta_1'(x)$, в другой части $\theta_2'(x)<\theta_1'(x)$, и равенство $\theta_2(l)=$ $=\theta_1(l)$ возможно.

Таким образом, с увеличением $q(x)$ частота n-го обертона уменьшается или в крайнем случае остается постоянной.

Вспомним теперь, что

$$q(x)=p(x)\bar{q}(x),$$

причем $\bar{q}(x)$ — плотность, $p(x)$ — коэффициент упругости. Было бы ошибкой сразу же сделать из доказанного выше заключение, что при увеличении $\bar{q}$ частоты уменьшаются; дело в том, что p входит в уравнение, преобразованное от x к ξ, а при этом преобразовании меняется не только дифференциальное уравнение, но и длина интервала $(0, l)$. Но не трудно провести исследование того, как изменяются собственные значения при изменении q. При этом получается следующий результат.

Если $q(x)$ изменяется так, что новые значения $q(x)$ всюду больше или равны прежним, причем изменение $q(x)$ происходит не в отдельных точках, а на конечных интервалах, то все λ уменьшаются. На основании этой теоремы можно делать хорошие оценки собственных значений.

Заменим в уравнении

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\lambda q(x)\varphi=0 \tag{8}$$

$q(x)$ на

$$m^2=q_{\min}.$$

Получатся новые собственные значения λ'_n, причем

$$\lambda_n\leqslant\lambda'_n.$$

Возьмем теперь вместо $q(x)$

$$M^2=q_{\max}.$$

Опять получатся новые собственные значения λ''_n, причем

$$\lambda_n\geqslant\lambda''_n.$$

Итак,

$$\lambda''_n\leqslant\lambda_n\leqslant\lambda'_n,$$

а величины λ'_n и λ''_n легко вычислить.

Рассмотрим далее такую задачу. Дано дифференциальное уравнение (8), но граничные условия не даны. В каких пределах лежат собственные значения?

Воспользуемся тем, что наибольшая частота получается при закреплении концов. При обоих закрепленных концах мы имели бы в случае, если вместо $q(x)$ плотность была бы равна m^2,

$$\lambda_n=\frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2m^2}.$$

Следовательно, в интересующей нас системе

$$\lambda_n\leqslant\frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2m^2}.$$

Воспользуемся теперь тем, что наименьшие частоты получаются при свободных концах (надо только иметь в виду, что при этом наименьшее λ равно нулю). Для свободных концов мы имели бы в случае, если бы вместо $q(x)$ плотность была равна M^2,

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2 M^2}.$$

Следовательно, для произвольных граничных условий

$$\frac{n^2\pi^2}{l^2 M^2} \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2 m^2}.$$

Эти неравенства дают хорошую оценку и в тех случаях, когда функция $q(x)$ изменяется в небольшом интервале.

Если закрепить систему в середине, она распадается на две независимые половинки. Естественно предположить, что частоты при этом увеличатся. Для постоянной плотности это ясно; но так ли это, если плотность растет с x? Правая система короче исходной, но средняя плотность ее больше. Что побеждает — наперед сказать трудно. Существует теорема, на основании которой сразу можно сказать, что будет повышение частоты[1].

Мы решили очень интересную для физики задачу, записывающуюся в виде схемы:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial y}{\partial x}\right) = q\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \tag{9}$$

$$\left(\alpha_1 y - \alpha_2 \frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 = 0; \tag{10}$$

$$\left(\beta_1 y + \beta_2 \frac{\partial y}{\partial x}\right)_l = 0. \tag{11}$$

Вспомним физический смысл граничных условий (10) и (11). Для стержня они означают, что концы связаны с неподвижными точками через пружины, для электрической системы — что на концах включены емкости. Таким образом, мы охватили случай, когда на концах находятся резервуары потенциальной или электрической энергии.

С точки зрения физики случаями того же класса являются те, когда вместо конденсаторов на концах включены катушки самоиндукции, вместо пружин к концам прикреплены массы, т. е.

---

[1] [Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики, т. I, гл. VI, § 2. М.—Л., 1951.]

случаи, когда на концах имеются резервуары кинетической или магнитной энергии. Между этими случаями и прежними нет существенного физического различия.

Дифференциальное уравнение (9) здесь сохраняется, но граничные условия получаются другого типа.

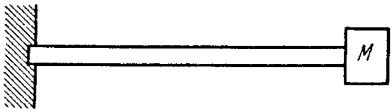

Рис. 175.

Пусть на конце стержня укреплена масса M (рис. 175). Тогда при $x=l$ имеем условие

$$M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-p(l)\frac{\partial y}{\partial x}, \tag{12}$$

отличное от (11): вместо члена с y имеется член с $\partial^2 y/\partial t^2$. Если подставить в граничное условие выражение

$$y=\varphi(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t,$$

то получится:

$$\lambda\varphi(l)-p(l)\varphi'(l)=0.$$

Отличие от (11) в том, что, во-первых, здесь перед $p\varphi'$ стоит знак минус, и, во-вторых, в том, что в граничное условие входит параметр λ. Таким образом, случай массы на конце не охватывается той теорией, которая была изложена. В этом есть известная неудовлетворительность.

Рассмотрение новой задачи дает для собственных значений результаты, совпадающие с полученными прежде. Но для собственных функций получается отличие; здесь собственные функции разного номера не ортогональны между собой.

Однако это отличие исчезает при другом выборе переменной. Если вместо задачи для заряда (или тока) и смещения рассматривать задачу для электрического или механического напряжения (или деформации), то мы получим при граничных условиях нового типа прежнюю задачу — задачу Штурма—Лиувилля.

Введем в уравнение (9) переменную

$$z=p\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{13}$$

Мы получим при этом:

$$\frac{1}{q}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{14}$$

Продифференцируем это уравнение по x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{p}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(p\frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{1}{p}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Мы получили для z уравнение того же типа, что для y, но с другими входящими в него заданными функциями. Однако если p и q положительные функции, то $1/p$ и $1/q$ тоже положительны.

Как ведут себя при преобразовании к z граничные условия? Подставляя в (12) соотношения (13) и (14), получаем:

$$\left(\frac{M}{q}\frac{\partial z}{\partial x}+z\right)_l=0. \tag{15}$$

По отношению к z тип граничных условий — тот же самый, что был раньше по отношению к y: в (15) не входит вторая производная по t, подстановка $\varphi(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t$ не приведет к появлению в граничных условиях параметра λ. Здесь получатся ортогональные собственные функции и будут иметь место все свойства, полученные раньше для y. Таким образом, имеется некоторого рода дуальность между задачей о величине y при граничных условиях типа (11) и задачей о величине z при граничных условиях типа (15).

Если на концах имеются и емкости и индуктивности (и пружины, и массы), задача не может быть сведена к уже рассмотренным, хотя перейти к этому случаю принципиально несложно. Часть доказанных нами теорем здесь неприменима. Здесь уже ни при каком выборе переменной собственные функции не будут ортогональны в обычном смысле, а будет иметь место только нагруженная ортогональность[1].

На этом мы закончим изложение основных отделов курса, хотя мы рассмотрели далеко не все вопросы, важные для физики и для техники. Перечислим некоторые из них. Мы не касались поведения распределенных систем с учетом затухания (при малом затухании частóты и формы колебаний изменяются мало) и применения теории возмущений к количественному расчету неоднородных

[1] [См. 8-ю лекцию части II.]

систем, обладающих малой неоднородностью. Мы не рассматривали также систем двух и трех измерений (колебания мембран и объемных тел различной формы), вынужденных колебаний распределенных систем и решений некоторых специальных задач, приводящих к специальным функциям. Наконец, мы не исследовали бегущих волн, т. е. вопросов распространения колебаний.

Остающееся у нас время я хотел бы посвятить вопросу о применении интегральных уравнений к колебаниям распределенных систем.

ОДИННАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(3/III 1932 г.)

Роль интегральных уравнений для физики. Функция Грина для струны или стержня; ее зависимость от граничных условий. Функция Грина в теории потенциала. Свойство симметрии функции Грина. Интегральное уравнение для динамической задачи о колебаниях струны или стержня. Симметризация ядра уравнения.

К вопросу о стоячих волнах возможен подход, отличный от того, которым мы пользовались. Этот подход не является обязательным, но имеет существенное значение. Речь идет о новой математической трактовке уже рассмотренных нами физических проблем.

Искомая функция, описывающая колебания распределенной системы, удовлетворяет не только некоторому дифференциальному уравнению, но и некоторому *интегральному* уравнению. Интегральные уравнения не имеют большого значения в качестве вычислительного аппарата. Их сила не в вычислительной стороне, а в физической.

В настоящее время нельзя серьезно заниматься колебаниями без знания интегральных уравнений. Литература по колебаниям пропитана интегральными уравнениями. В классической книге Куранта и Гильберта[1] половина вопросов рассматривается методом интегральных уравнений. Это — несколько формальная оценка их значения; можно привести и более существенные доводы.

[1] [Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики. М.—Л., 1951.]