систем, обладающих малой неоднородностью. Мы не рассматривали также систем двух и трех измерений (колебания мембран и объемных тел различной формы), вынужденных колебаний распределенных систем и решений некоторых специальных задач, приводящих к специальным функциям. Наконец, мы не исследовали бегущих волн, т. е. вопросов распространения колебаний.

Остающееся у нас время я хотел бы посвятить вопросу о применении интегральных уравнений к колебаниям распределенных систем.

ОДИННАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(3/III 1932 г.)

Роль интегральных уравнений для физики. Функция Грина для струны или стержня; ее зависимость от граничных условий. Функция Грина в теории потенциала. Свойство симметрии функции Грина. Интегральное уравнение для динамической задачи о колебаниях струны или стержня. Симметризация ядра уравнения.

К вопросу о стоячих волнах возможен подход, отличный от того, которым мы пользовались. Этот подход не является обязательным, но имеет существенное значение. Речь идет о новой математической трактовке уже рассмотренных нами физических проблем.

Искомая функция, описывающая колебания распределенной системы, удовлетворяет не только некоторому дифференциальному уравнению, но и некоторому *интегральному* уравнению. Интегральные уравнения не имеют большого значения в качестве вычислительного аппарата. Их сила не в вычислительной стороне, а в физической.

В настоящее время нельзя серьезно заниматься колебаниями без знания интегральных уравнений. Литература по колебаниям пропитана интегральными уравнениями. В классической книге Куранта и Гильберта[1] половина вопросов рассматривается методом интегральных уравнений. Это — несколько формальная оценка их значения; можно привести и более существенные доводы.

---

[1] [Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики. М.—Л., 1951.]

Значение интегральных уравнений заключается в следующем. Дифференциальное уравнение пишется, скажем, для струны или стержня *вообще*, а не для данного индивидуального случая. Для того чтобы охарактеризовать данную систему, нужно, кроме дифференциального уравнения, задать еще краевые условия. Между тем интегральное уравнение содержит в себе описание всего объекта. Интегральные уравнения для различных условий закрепления различны.

Далее, если взять, например, поперечные колебания стержня, то для них дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

Оно существенно отличается от дифференциального уравнения продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Возьмем двухмерные задачи. В случае мембраны получается дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, в случае пластинки — четвертого порядка. Но интегральные уравнения продольных и поперечных колебаний стержня принадлежат к одному типу. К одному типу принадлежат также интегральные уравнения мембраны и пластинки. Интегральные уравнения гораздо лучше отражают единство колебательных систем.

Есть такие физические задачи, которые прямо приводят к интегральному уравнению[1].

В наших колебательных задачах дело обстоит так. Известно из физики, что функция $y(x, t)$, которую мы хотим определить, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial y}{\partial x}\right) = q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

и определенным краевым условиям. Можно показать математически, что функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению и краевым условиям, удовлетворяет определенному интегральному уравнению. Но есть и другой путь. Забудем о дифференциальных уравнениях. Можно так построить физическую задачу, что она непосредственно приводит к интегральному уравнению.

---

[1] [См. том I, стр. 229 и след.]

Дифференциальные уравнения — один из видов функциональных уравнений; они определяют функцию, если даны определенные дифференциальные соотношения. Интегральные уравнения — другой вид функциональных уравнений. Они определяют функцию, если дано интегральное соотношение, например, вида

$$y(x)=\int_a^b K(x,\ \xi)\,g(\xi)\,d\xi. \tag{1}$$

Здесь интеграл есть функция от x. Функции $K(x,\ \xi)$ и $y(x)$ даны, требуется найти функцию $g(\xi)$. Существует ряд физических задач, приводящих к соотношениям такого вида.

Заранее далеко не ясно, что уравнение типа (1) имеет решение, т. е. что существует удовлетворяющая ему функция $g(\xi)$. Поэтому одна из важнейших задач теории интегральных уравнений — выяснение того, существует ли решение.

Уравнение вида (1) называется интегральным уравнением с постоянными пределами. Часто мы приходим к другому типу интегрального уравнения:

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,\ \xi)\,y(\xi)\,d\xi+f(x). \tag{2}$$

Здесь, в отличие от (1), искомая функция входит не только под знаком интеграла. Уравнение вида (2) называется интегральным уравнением второго рода или уравнением Фредгольма. Если

$$f(x)=0,$$

то мы получаем однородное интегральное уравнение второго рода. Функция $K(x,\ \xi)$ называется ядром интегрального уравнения.

Учение об интегральных уравнениях составляет обширную математическую дисциплину. Мы не будем стремиться к полноте и строгости. Постараемся прежде всего показать, как физические вопросы связываются с интегральными уравнениями. Я хочу при этом сразу дать представление и о собственных и о вынужденных колебаниях.

Результирующая сила, действующая на элемент dx стержня со стороны частей, расположенных слева и справа, равна

$$-p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x+p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx}.$$

В случае равновесия

$$-p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x + p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} + g(x)\,dx = 0,$$

где $g(x)\,dx$ — внешняя сила, действующая на элемент dx. Для перехода к динамическим процессам можно воспользоваться принципом Даламбера.

В случае дискретной системы этот принцип говорит следующее. Пусть на i-тую точку действует результирующая сила X_i. При равновесии

$$X_i = 0.$$

Можно перейти к динамическому случаю, прибавив к X_i „силу инерции“ (название это — весьма неудачное) $-m\ddot{x}_i$ и рассуждая так же, как если бы система находилась в равновесии.

Мы можем аналогичным образом перейти от случая равновесия к случаю движения стержня, прибавив к объемной силе $g(x)\,dx$ „силу инерции“ $-q\,dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Мы получаем тогда уравнение

$$-q(x)\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x + p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} + g(x,\ t)\,dx = 0. \tag{3}$$

В отсутствие внешней переменной силы оно совпадает с полученным ранее[1].

Пойдем дальше. Пусть внешняя сила — гармоническая:

$$g(x,\ t) = g(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t.$$

Тогда можно удовлетворить уравнению (3) функцией y вида

$$y = \varphi(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t.$$

При этом функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$g(x) + \frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right) + \lambda q\varphi = 0.$$

Нужно найти решение этого уравнения при заданных λ и $g(x)$. Если $g(x)=0$, мы возвращаемся к задаче о собственных колебаниях.

Подчеркнем, что упругая сила определяется поведением системы в данной точке. Если дана деформация в данной точке, то этим определена и сила в этой точке, независимо от того, что происходит в других частях системы.

---

[1] [См. 1-ю лекцию части II.]

Будем теперь решать такую статическую задачу: задано распределение сил, требуется узнать отклонение различных точек. Отклонение в данной точке зависит от того, что происходит в других точках, т. е. перемещение данной точки зависит от *всех* сил, действующих на стержень; оно не является дифференциальным свойством.

Напишем уравнение равновесия

$$p\frac{d^2y}{dx^2}=-g(x), \tag{4}$$

где $g(x)$ — заданная функция. Оно еще не определяет, чему равно y в любой точке. Так, например, если концы свободны, то равновесия нет вовсе. Для того, чтобы y было определено, нужно задать граничные условия.

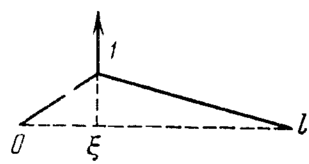

Рис. 176.

Прежде чем решать задачу о равновесии под действием силы $g(x)$, рассмотрим сначала другую, вспомогательную задачу.

Пусть сила действует на струну в одной точке $x=\xi$. Тогда при равновесии струна будет иметь форму, показанную на рис. 176. Величину силы положим равной единице. Теперь, когда сила сосредоточена в одной точке, имеется разрыв производной $\partial y/\partial x$. Слева действует, вследствие натяжения струны, сила

$$-p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=\xi-0},$$

справа — сила

$$p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=\xi+0}.$$

При равновесии сумма трех сил равна нулю:

$$-p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=\xi-0}+p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=\xi+0}+1=0,$$

или

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\xi+0}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\xi-0}=-\frac{1}{p}. \tag{5}$$

Обозначим через $V(x, \xi)$ функцию $y(x)$ для рассматриваемого частного случая. Ее вид зависит от того, где приложена сила. Для $x\leqslant\xi$ имеем:

$$V(x, \xi)=a_1x, \tag{6}$$

для $x \geqslant \xi$

$$V(x, \xi) = a_2 (l - x). \tag{7}$$

Нужно удовлетворить двум условиям: условию непрерывности V в точке $x = \xi$:

$$a_1 \xi = a_2 (l - \xi),$$

и условию (5), которое после подстановки (6) и (7) принимает вид

$$a_2 + a_1 = \frac{1}{p}.$$

Получаются два очень простых уравнения для определения a_1 и a_2. Найдем из них a_1 и a_2 и подставим в (6) и (7). Это дает:

$$V(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x(l-\xi)}{pl} & \text{для } x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\xi(l-x)}{pl} & \text{для } x \geqslant \xi. \end{cases}$$

Наша математическая задача такова: найти непрерывную функцию $y(x)$, такую, что

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

во всех точках, кроме $x = \xi$, а производная $\frac{dy}{dx}$ непрерывна всюду, кроме точки $x = \xi$, где происходит скачок.

Функция удовлетворяет 1) граничным условиям, 2) дифференциальному уравнению и 3) в точке $x = \xi$ остается непрерывной, но ее производная терпит скачок заданной величины.

Такую функцию называют *функцией влияния* или *функцией Грина*, который применил подобную функцию для решения задач теории потенциала.

Если мы будем решать аналогичную задачу для стержня, мы получим совершенно то же самое. Но нас интересует другое. Будем рассматривать тот же стержень, но изменим граничные условия. Пусть один конец закреплен, а другой свободен (рис. 177). Теперь функция Грина будет другая. Левее точки приложения силы

$$V(x, \xi) = a_1 \xi \qquad (x \leqslant \xi),$$

правее этой точки она изображается горизонтальной линией (рис. 178)

$$V(x, \xi) = b_1 \qquad (x \geqslant \xi).$$

Остается удовлетворить условию непрерывности $V(x, \xi)$, которое в данном случае имеет вид

$$a_1\xi = b,$$

и условию, определяющему величину разрыва (5) — в данном случае

$$a_1 = \frac{1}{p}.$$

Получается следующая функция Грина:

$$V(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{p} & \text{для } x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\xi}{p} & \text{для } x \geqslant \xi. \end{cases}$$

Таким образом, в функции Грина учтены граничные условия.

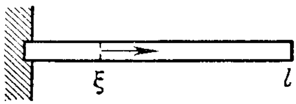

Рис. 177.

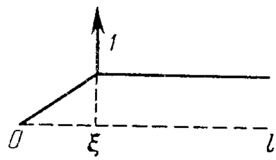

Рис. 178.

Но спрашивается, зачем исходить из фиктивной задачи о равновесии при силе, действующей в одной точке? Ведь нас интересует другая задача.

Дело в том, что мы рассматриваем *линейные* задачи и интересующая нас задача может быть сведена на ту, которую мы только что рассмотрели.

Пусть в точках

$$x = \xi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

действуют силы, равные g_k. Тогда на основании принципа суперпозиции смещение в точке x есть сумма смещений, которые вызывали бы в этой точке силы g_k, взятые в отдельности:

$$y(x) = \sum_k V(x, \xi_k)\, g_k. \tag{8}$$

Переход к непрерывно распределенной силе $g(x)$ (мы не гонимся за математической строгостью) дает:

$$y(x) = \int_0^l V(x, \xi)\, g(\xi)\, d\xi. \tag{9}$$

Таким образом, если удалось найти для рассматриваемой задачи функцию Грина, мы тотчас же можем написать выражение (9) для отклонения, вызываемого произвольно распределенной силой.

Функция Грина непрерывна, но ее первая производная претерпевает скачок. Именно наличие этого скачка дает возможность представить с ее помощью непрерывное решение интересующей нас задачи.

Поясним, как появляется функция Грина в теории потенциала. Задача ставится так. Задано распределение потенциала φ на некоторой замкнутой поверхности (рис. 179) и, кроме того, задано распределение масс (или зарядов) $\rho(x, y, z)$. Потенциал удовлетворяет уравнению

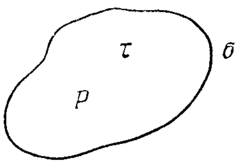

Рис. 179.

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Требуется найти потенциал в любой точке.

Рассмотрим сначала случай, когда заряд сосредоточен в одной точке P. Соответствующий потенциал обозначим через g. Для функции g всюду, кроме точки P, где находится заряд, имеем:

$$\Delta g = 0.$$

Пусть далее на поверхности задано условие

$$g = 0.$$

Наконец, требуется, чтобы в точке P, где находится заряд, g обращалось в бесконечность, как $1/r$ (r — расстояние от точки P). Тогда, как можно показать,

$$\varphi = \int_\tau g\rho\, d\tau - \frac{1}{4\pi}\oint_\sigma \varphi \frac{\partial g}{\partial n}\, d\sigma,$$

где τ — объем внутри замкнутой поверхности σ.

Наше уравнение (4) есть, в сущности, лапласово уравнение в одном измерении. Требование обращения функции Грина в бесконечность типа $1/r$ в трехмерном случае переходит в двухмерном случае в требование обращения в бесконечность вида $\ln r$, а в одномерном случае — в требование скачка производной. Но во всех случаях функция Грина должна иметь особенность.

Функция вида (9) называется по-немецки quellenmässig dargestellte (представленной истокообразно), по-русски — порожденной данным ядром $V(x, \xi)$. Совершенно ясно, что класс функций, порожденных определенным ядром, — это сравнительно узкий класс функций, гораздо более узкий, чем класс функций $g(x)$. Так, например, если $g(x)$ — разрывная функция, то $y(x)$ — непрерывная функция, и производная ее непрерывна. Существует ряд теорем относительно функций, порожденных ядром.

Уже сейчас мы имеем возможность поставить физическую задачу, непосредственно приводящую к интегральному уравнению.

Дано распределение отклонений. Как распределена сила? Эта задача приводит к интегральному уравнению первого рода

$$y(x) = \int_0^l V(x, \xi)\, g(\xi)\, d\xi \tag{10}$$

относительно неизвестной функции $g(\xi)$.

Интеграл, стоящий в правой части (10), является решением уравнения (4), удовлетворяющим краевым условиям задачи. Это легко проверить подстановкой.

Укажем на одно важное свойство функции $V(x, \xi)$. Для наших задач эта функция симметрична:

$$V(x, \xi) = V(\xi, x). \tag{11}$$

Покажем это на примере струны с закрепленными концами.

Пусть сначала

$$\xi = k, \quad x = h,$$

причем $h < k$. Тогда

$$V(h, k) = \frac{(l - k)\, h}{pl}.$$

Пусть теперь

$$\xi = h, \quad x = k$$

(мы поменяли местами точки x и ξ). Тогда

$$V(k, h) = \frac{(l - h)\, k}{pl}.$$

Мы видим, что действительно имеет место симметрия, выражаемая формулой (11). Эта симметрия — очень глубокое свойство. В нем проявляется далеко идущий принцип взаимности, заключающийся в следующем.

Пусть одна и та же сила приложена один раз в точке A, другой раз в точке B. Во втором случае в точке A будет такое же отклонение, которое имеет место в первом случае в точке B. Можно точно указать, для какого класса систем имеет место принцип взаимности.

Перейдем теперь к нашей основной динамической задаче.

Для этого в уравнение (10) подставим вместо $g(\xi)$ по принципу Даламбера

$$g(\xi,\ t) - q(\xi)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{12}$$

Мы будем считать, что внешняя сила — гармоническая:

$$g(\xi,\ t) = g(\xi)\cos\sqrt{\lambda}\,t, \tag{13}$$

и будем искать решение в виде гармонического колебания

$$y = \varphi(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t. \tag{14}$$

Подставляя (12) — (14) в (10), получаем:

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^l V(x,\ \xi)\,q(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^l V(x,\ \xi)\,g(\xi)\,d\xi,$$

где $V(x,\ \xi)$ — функция Грина данной задачи.

Наша функция $\varphi(x)$ удовлетворяет, таким образом, уравнению

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^l V(x,\ \xi)\,q(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi + f(x), \tag{15}$$

где

$$f(x) = \int_0^l V(x,\ \xi)\,g(\xi)\,d\xi. \tag{16}$$

Уравнение (15) является неоднородным интегральным уравнением второго рода.

Если внешняя сила отсутствует, т. е.

$$f(x) = 0,$$

то $\varphi(x)$ удовлетворяет однородному интегральному уравнению второго рода

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^l V(x,\ \xi)\,q(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{17}$$

В этом случае нас интересует, во-первых, спектр — совокупность значений λ, и, во-вторых, собственные функции $\varphi(x)$.

Ядро $V(x,\ \xi)\,q(\xi)$ несимметрично, но его очень легко симметризировать. Введем для этого вместо $\varphi(x)$ функцию

$$\psi(x) = \sqrt{q(x)}\,\varphi(x).$$

Умножив обе части однородного уравнения (17) на $\sqrt{q(x)}$, получаем уравнение

$$\psi(x)=\int_0^l V(x, \xi)\sqrt{q(x)q(\xi)}\,\psi(\xi)\,d\xi,$$

или, обозначив

$$K(x, \xi)=V(x, \xi)\sqrt{q(x)q(\xi)},$$

уравнение

$$\psi(x)=\int_0^l K(x, \xi)\,\psi(\xi)\,d\xi,$$

т. е. интегральное уравнение с симметричным ядром.

То, что можно симметризировать ядро с помощью множителя $\sqrt{q(x)}$, не случайно. Это связано с тем обстоятельством, что умножение на $\sqrt{q(x)}$ приводит от собственных функций φ_i, φ_k, удовлетворяющих условию

$$\int_0^l q(x)\,\varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx=0,$$

к ортогональным функциям ψ_i, ψ_k, для которых

$$\int_0^l \psi_i(x)\,\psi_k(x)\,dx=0.$$

ДВЕНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(9/III 1932 г.)

Невозможность построить функцию Грина в случае стержня со свободными концами. Предельный переход от задачи о колебаниях дискретной цепочки к интегральному уравнению колебаний стержня. Эквивалентность интегрального уравнения и дифференциальной схемы задачи Штурма — Лиувилля. Пример физической задачи другого типа, приводящей к интегральному уравнению: задача об идеальном оптическом изображении.

Если задана внешняя сила

$$g(x, t)=g(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t \tag{1}$$

(λ здесь дано) и смещение стержня

$$y(x, t)=\varphi(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t, \tag{2}$$