Умножив обе части однородного уравнения (17) на $\sqrt{q(x)}$, получаем уравнение

$$\psi(x)=\int_0^l V(x, \xi)\sqrt{q(x)q(\xi)}\,\psi(\xi)\,d\xi,$$

или, обозначив

$$K(x, \xi)=V(x, \xi)\sqrt{q(x)q(\xi)},$$

уравнение

$$\psi(x)=\int_0^l K(x, \xi)\,\psi(\xi)\,d\xi,$$

т. е. интегральное уравнение с симметричным ядром.

То, что можно симметризировать ядро с помощью множителя $\sqrt{q(x)}$, не случайно. Это связано с тем обстоятельством, что умножение на $\sqrt{q(x)}$ приводит от собственных функций φ_i, φ_k, удовлетворяющих условию

$$\int_0^l q(x)\,\varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx=0,$$

к ортогональным функциям ψ_i, ψ_k, для которых

$$\int_0^l \psi_i(x)\,\psi_k(x)\,dx=0.$$

ДВЕНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(9/III 1932 г.)

Невозможность построить функцию Грина в случае стержня со свободными концами. Предельный переход от задачи о колебаниях дискретной цепочки к интегральному уравнению колебаний стержня. Эквивалентность интегрального уравнения и дифференциальной схемы задачи Штурма — Лиувилля. Пример физической задачи другого типа, приводящей к интегральному уравнению: задача об идеальном оптическом изображении.

Если задана внешняя сила

$$g(x, t)=g(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t \tag{1}$$

(λ здесь дано) и смещение стержня

$$y(x, t)=\varphi(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t, \tag{2}$$

то, как мы видели, для $\varphi(x)$ получается интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^l V(x, \xi)\, q(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi+f(x), \tag{3}$$

где

$$f(x)=\int_0^l V(x, \xi)\, g(\xi)\, d\xi \tag{4}$$

— заданная функция x. Если нет внешней силы, интегральное уравнение принимает вид

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^l V(x, \xi)\, q(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Здесь λ должно быть определено из самого интегрального уравнения.

$V(x, \xi)$ — функция Грина нашей задачи. Функция $V(x, \xi)\, q(\xi)$ называется ядром интегрального уравнения. На основании физического смысла функции Грина ее часто называют функцией влияния.

Мы нашли $V(x, \xi)$ для двух частных случаев: для стержня с закрепленными концами и стержня с одним закрепленным концом. Если оба конца свободны, то функцию Грина построить нельзя. Это очень типичное и интересное обстоятельство. Постараемся его связать с уже известными нам свойствами.

Если стержень свободен, производная $\frac{\partial y}{\partial x}$ равна нулю на обоих концах. Кроме того, при равновесии $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ равно нулю всюду, кроме точки приложения силы. Таким образом, y должно быть постоянно на протяжении всего стержня, и нельзя удовлетворить условию скачка производной в точке приложения силы. Подчеркнем, что несуществование функции Грина связано не с дифференциальным уравнением, а с граничными условиями.

В случае свободных концов одно из собственных значений есть нуль. Уравнение

$$\varphi''+\lambda q\varphi=0$$

превращается при $\lambda=0$ в уравнение

$$\varphi''=0$$

с непрерывным решением

$$\varphi = \text{const}.$$

Если существует непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению и граничным условиям, то не существует удовлетворяющей ему разрывной функции. Наоборот, если не существует непрерывной функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению и граничным условиям, то существует разрывная.

Существование или несуществование функции Грина имеет ясный физический смысл. Если стержень свободен на обоих концах, то при действии на него силы не существует состояния равновесия. Физически этот случай является исключительным: стержень может не только колебаться, но и двигаться равномерно.

Однако для случая свободных концов можно построить функцию Грина в обобщенном смысле. Для этого, кроме единичной сосредоточенной силы, нужно приложить к стержню еще компенсирующую ее распределенную силу.

Можно рассматривать стержень как совокупность масс, соединенных „пружинами" (довольно трудно ответить на вопрос: что лучше отражает — действительный стержень, сплошная или дискретная модель). Мы уже рассматривали предельный переход от дискретной модели к сплошной и показали, что решение, получаемое для дискретной системы, в пределе переходит в решение некоторого дифференциального уравнения в частных производных[1]. Интересно провести рассуждение так, чтобы от уравнений дискретной системы перейти к интегральному уравнению.

Возьмем „стержень", закрепленный на одном конце и свободный на другом (рис. 180), и поставим сначала статическую задачу (здесь также можно перейти от статической задачи к динамической с помощью принципа Даламбера). Пусть на каждую точку действует некоторая сила. Обозначим через $\overline{g}_k$ силу, действующую на k-ую точку. Нужно определить смещения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ наших n частиц.

Рассмотрим сначала частный случай, когда внешняя сила, равная единице, действует только на k-ую частицу.

---

[1] [См. 32-ю лекцию части I и 1-ю лекцию части II.]

Пусть α — коэффициент упругости каждой пружины. Тогда результирующая упругая сила, действующая на i-ую частицу ($i \neq k$), есть

$$\alpha(y_i - y_{i-1}) - \alpha(y_{i+1} - y_i)$$

(на все частицы, кроме k-ой, другие силы не действуют). При равновесии эта результирующая сила равна нулю, т. е.

$$-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} = 0$$

Напишем уравнение для первой частицы:

$$y_1 - y_2 = 0$$

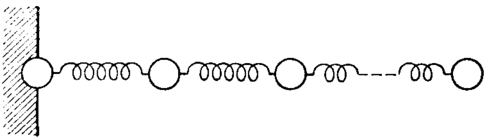

Рис. 180.

и для последней:

$$y_n - y_{n-1} = 0.$$

Нужно еще написать уравнение для k-ой частицы. Здес. результирующая упругая сила уравновешивается внешней силой, равной единице, т. е.

$$-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1} = \frac{1}{\alpha}.$$

Для $i \leqslant k$ смещения y_i образуют арифметическую прогрессию:

$$y_i = ir \qquad (i \leqslant k).$$

Все частицы с $i \geqslant k$ имеют одинаковое смещение. Так как цепочка не имеет разрыва, то

$$y_i = kr \qquad (i \geqslant k).$$

Не трудно определить, что $r = 1/\alpha$. Таким образом, значения y_i ($i = 1, 2, \ldots$) являются функциями номера i и номера k той частицы, к которой приложена сила, а именно:

$$V_{ik} = \begin{cases} \dfrac{i}{\alpha} & (i \leqslant k), \\ \dfrac{k}{\alpha} & (i \geqslant k). \end{cases}$$

Если сила равна не единице, а $\bar{g}$, то y_i просто умножается на $\bar{g}$. Если теперь силы действуют на все точки и $\bar{g}_k$ — сила, приложенная к k-ой точке, то

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} V_{ik}\bar{g}_k.$$

Если

$$\bar{g}_i = g_i \cos\sqrt{\lambda}t,$$

$$y_i = \varphi_i \cos\sqrt{\lambda}t,$$

то, применяя принцип Даламбера, получаем окончательно для динамической задачи:

$$\varphi_i = \lambda \sum_k V_{ik} m_k \varphi_k + \sum_k V_{ik} g_k. \tag{5}$$

Здесь уместно поставить вопрос о том, как поступить, если мы хотим вычислить период колебаний распределенной системы, апроксимируя ее посредством дискретной системы. Подход, основанный на дифференциальных уравнениях, проще. Имея в виду только простоту, можно было бы не переходить к анализу посредством интегральных уравнений.

Для перехода от (5) к интегральному уравнению напишем

$$\alpha = \frac{p}{a},$$

где p — макроскопический модуль упругости, a — длина отдельной „пружины". Тогда

$$V_{ik} = \begin{cases} \dfrac{ai}{\alpha a} & (i \leqslant k), \\ \dfrac{ak}{\alpha a} & (i \geqslant k). \end{cases}$$

Пусть теперь $ia = x$, причем

$$a \to 0, \quad i \to \infty,$$

и, кроме того,

$$\frac{m_k}{a} = q(\xi), \quad a = \Delta\xi.$$

Мы получаем в пределе

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^l V(x, \xi) q(\xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^l V(x, \xi) g(\xi) d\xi.$$

Итак, исходя из дискретной модели и перейдя к пределу (мы не вдаемся в вопрос о законности перехода), мы снова получили интегральное уравнение (3). Интегральное уравнение устанавливается на основании физической картины явления так же хорошо, как и дифференциальное.

Пусть дана краевая задача, которая формулируется на языке дифференциальных уравнений следующим образом:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right)+\lambda q\varphi=-g(x), \tag{6}$$

$$\left(\alpha_1\varphi-\alpha_2\frac{d\varphi}{dx}\right)_0=0, \tag{7}$$

$$\left(\beta_1\varphi+\beta_2\frac{d\varphi}{dx}\right)_l=0 \tag{8}$$

(общие граничные условия Штурма—Лиувилля). Для нее существуют определенные собственные числа и собственные функции. Можно доказать, что все собственные функции и собственные числа краевой задачи удовлетворяют интегральному уравнению для той же задачи, и наоборот. Совокупность собственных чисел и собственных функций в обеих задачах одинакова.

Разумеется, то, что мы из физики получили для обоих случаев обе картины, в значительной степени предрешает этот результат, но мы постараемся его теперь доказать. Мы докажем, что решения интегрального уравнения (3) удовлетворяют дифференциальному уравнению (6) при краевых условиях (7) и (8), и наоборот.

Функция $V(x, \xi)$ непрерывна и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dV}{dx}\right)=0. \tag{9}$$

Ее производная непрерывна всюду, кроме точки $x=\xi$, где она претерпевает скачок

$$V'(x, \xi)_{x=\xi-0}-V'(x, \xi)_{x=\xi+0}=\frac{1}{p}.$$

Уравнение (9) можно проинтегрировать в квадратурах. Мы найдем одно решение для левой части системы ($x<\xi$), другое — для правой ($x>\xi$). Обозначим эти решения соответственно через ρ и σ. Имеем:

$$\frac{d}{dx}(p\rho')=0, \quad \frac{d}{dx}(p\sigma')=0,$$

откуда

$$\frac{d}{dx}[p(\sigma\rho'-\rho\sigma')]=0,$$

или, интегрируя,

$$p(\sigma\rho'-\rho\sigma')=\text{const}.$$

Для случая, когда λ не есть собственное значение, всегда можно построить функцию Грина из следующих соображений: ρ и σ выбраны так, чтобы ρ удовлетворяло краевому условию (7), а σ — краевому условию (8). При этом ρ и σ линейно независимы ($\sigma\rho'-\rho\sigma'\neq 0$) и при подходящей нормировке

$$p(\sigma\rho'-\rho\sigma')=1.$$

Возьмем теперь

$$V(x,\ \xi)=\rho(x)\sigma(\xi) \qquad (0\leqslant x\leqslant\xi), \tag{10}$$

$$V(x,\ \xi)=\rho(\xi)\sigma(x) \qquad (\xi\leqslant x\leqslant l) \tag{11}$$

и проверим, что построенная таким способом функция $V(x,\ \xi)$ удовлетворяет всем поставленным условиям.

Имеем, дифференцируя (10) и (11) по x:

$$V'(x,\ \xi)_{x=\xi-0}=\rho'\sigma,$$

$$V'(x,\ \xi)_{x=\xi+0}=\rho\sigma'$$

и, следовательно,

$$V'(x,\ \xi)_{x=\xi-0}-V'(x,\ \xi)_{x=\xi+0}=\frac{1}{p}. \tag{12}$$

Я утверждаю, что составленное с таким $V(x,\ \xi)$ интегральное уравнение эквивалентно дифференциальной схеме (6) — (8). Можно показать обычным способом, что функция $V(x,\ \xi)$ — единственная функция, удовлетворяющая всем поставленным условиям.

Покажем, что функция φ, удовлетворяющая дифференциальному уравнению и краевым условиям, удовлетворяет и найденному интегральному уравнению.

Имеем:

$$\frac{d}{dx}(p\varphi')=-\lambda q\varphi-g(x); \tag{13}$$

$$\frac{d}{dx}(pV')=0. \tag{14}$$

Умножив (13) на V, (14) — на φ и вычитая, мы получаем:

$$\frac{d}{dx}[p(\varphi' V - V'\varphi)] = -\lambda V q\varphi - Vg.$$

Будем теперь интегрировать по x в интервале $(0, l)$. Так как при этом нужно учитывать разрывность V', мы разделим интервал $(0, l)$ на интервалы $(0, \xi)$ и (ξ, l) и будем интегрировать отдельно по каждому интервалу:

$$p(\varphi' V - V'\varphi)\Big|_0^{\xi-0} = -\lambda\int_0^{-0} Vq\varphi dx - \int_0^{\xi-0} Vgdx; \tag{15}$$

$$p(\varphi' V - V'\varphi)\Big|_{\xi+0}^{l} = -\lambda\int_{\xi+0}^{l} Vq\varphi dx - \int_{\xi+0}^{l} Vgdx. \tag{16}$$

Левые части обращаются в нуль соответственно при $x=0$, $x=l$, так что после сложения (15) и (16) остается:

$$-p\varphi(\xi)[V'_{\xi-0} - V'_{\xi+0}] = -\lambda\int_0^l V(x, \xi), q(x)\varphi(x)dx - \int_0^l V(x, \xi)\, g(x)\, dx.$$

Учитывая (12), получаем далее:

$$\varphi(\xi) = \lambda\int_0^l V(x, \xi)\, q(x)\,\varphi(x)\, dx + \int_0^l V(x, \xi)\, g(x)\, dx,$$

откуда, после замены x на ξ и ξ на x, следует уравнение

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^l V(\xi, x)\, q(\xi)\,\varphi(\xi)\, d\xi + \int_0^l V(\xi, x)\, g(\xi)\, d\xi. \tag{17}$$

Это уравнение отличается от (3) лишь тем, что вместо $V(x, \xi)$ стоит $V(\xi, x)$, но так как функция Грина симметрична:

$$V(x, \xi) = V(\xi, x)$$

(и это здесь существенно), уравнение (17) совпадает с (3).

Итак, мы убедились, что всякая функция, удовлетворяющая схеме (6) — (8), одновременно удовлетворяет и интегральному уравнению (3). Можно также путем простого дифференцирования показать и обратное.

Дифференциальная схема нашей задачи эквивалентна интегральному уравнению с функцией Грина, определенной выше. В этой эквивалентности заключается, с одной стороны, интерес, который представляют интегральные уравнения, с другой стороны, — их слабость, если бы дело этим ограничивалось.

Из того, что было сказано, следует, что интегральное уравнение (3) имеет бесконечное множество собственных значений и каждому собственному значению соответствует одна собственная функция.

Мы вывели интегральное уравнение, соответствующее определенному узкому классу дифференциальных уравнений. Вид ядра связан определенным образом с задачей Штурма—Лиувилля. Для специального типа интегральных уравнений, ядра которых соответствуют дифференциальной схеме (6) — (8), мы доказали некоторые свойства собственных чисел и собственных функций. Однако необходима более общая теория, пригодная при любом ядре. Такая теория существует. Теория интегральных уравнений гораздо шире, чем проблема Штурма—Лиувилля. Ряд вопросов (например, вопрос о разложимости функций по собственным функциям) легче, проще и изящнее решается с помощью интегральных уравнений. Даже ради одного этого стоит их изучить.

Мне хочется изложить задачу, где ссылка на дифференциальные уравнения не поможет. Мы получим в ней интегральное уравнение другого типа, чем (3). Эта задача относится к теории оптического изображения[1].

Пусть имеется система линз, дающая изображение (рис. 181). Каждой точке объекта соответствует определенная точка изображения. Предположим, что система не дает увеличения (или уменьшения). Согласно геометрической оптике яркость в точке M определяет освещенность в точке M'. Но в действительности геометрическая оптика несправедлива. Вследствие дифракции каждой точке предмета соответствует в плоскости изображения некоторое распределение интенсивности. Максимум находится в точке, где было бы изображение согласно геометрической оптике, но с удалением от этой точки интенсивность спадает постепенно.

Пусть одна точка предмета дает в плоскости изображения распределение амплитуды

$$K(x, \xi)$$

[1] [Ср. том I, стр. 229.]

(амплитуда есть функция координаты точки объекта ξ и координаты точки изображения x). Если диафрагма имеет вид щели, то

$$K(x,\ \xi)=\frac{\sin c\,(x-\xi)}{x-\xi},$$

где

$$c=\frac{2\pi d}{Lf}$$

(d — половина ширины щели; L — длина волны; f — фокусное расстояние). Если точка объекта перемещается, то перемещается вся картина; поэтому $K(x,\ \xi)$ есть функция от $x-\xi$.

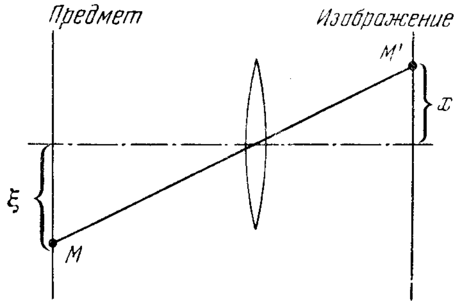

Рис. 181.

Амплитуда в точке x от элемента предмета длины $d\xi$ есть

$$z(\xi)\,K(x,\ \xi)\,d\xi,$$

где $z(\xi)$ характеризует распределение амплитуды по предмету. Картины от отдельных элементов предмета накладываются, и результирующая амплитуда в плоскости наблюдения имеет распределение

$$A(x)=\int_a^b K(x,\ \xi)\,z(\xi)\,d\xi \tag{18}$$

(здесь предполагается, что предмет освещен так, что отдельные его элементы посылают когерентные колебания).

Конечно, распределение $A(x)$, вообще говоря, не подобно распределению $z(\xi)$. Они только связаны между собой соотношением (18). Вообще говоря, при изображении предмет искажается, распределение света в изображении иное, чем в предмете. Возникают вопросы: как нужно строить оптический прибор для того, чтобы искажение было возможно меньше? Существуют ли такие предметы, которые не искажаются заданной оптической системой?

Если бы оказалось, что существуют такие функции $z(x)$, для которых

$$A(x)=\frac{1}{\lambda}\,z(x), \tag{19}$$

где λ — постоянная, то это означало бы, что распределения вида $z(x)$ не искажаются.

Подставляя (19) в (18), получаем:

$$z(x)=\lambda\int_a^b K(x,\ \xi)\,z(\xi)\,d\xi. \tag{20}$$

Неискажаемые структуры должны удовлетворять интегральному уравнению (20), ядро которого задано свойствами оптической системы.

Ядро уравнения (20) симметрично, но оно совсем другого типа, чем в задаче Штурма—Лиувилля. Оно не имеет разрыва производной.

Существует ли структура, удовлетворяющая уравнению (20)? К сожалению, ответ неутешителен. Интегральное уравнение (20) имеет решения, но эти решения — бесконечные синусоиды. Только такие распределения изображаются точно. Таким образом, решение существует, но физически оно мало интересно.

Но можно поставить вопрос иначе: насколько можно приблизиться к точному изображению? Оказывается, можно указать такие структуры, которые мало искажаются. Можно высказать на этот счет ряд общих теорем.

Таким образом, области дифференциальных и интегральных уравнений далеко не перекрываются. Интегральные уравнения представляют интерес и независимо от дифференциальных уравнений.

ТРИНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(13/III 1932 г.)

Дополнительные замечания по теории интегральных уравнений. Вопрос о возможности разложения произвольной функции, удовлетворяющей краевым условиям, по собственным функциям краевой задачи.

Мы видели, что функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению и граничным условиям задачи Штурма—Лиувилля, удовлетворяет также определенному интегральному уравнению. Это верно также, если положить $\lambda=0$; мы имеем в этом случае статическую задачу, решением которой является функция

$$\varphi(x)=\int_0^l V(x,\ \xi)\,g(\xi)\,d\xi.$$