Подставляя (19) в (18), получаем:

$$z(x)=\lambda\int_a^b K(x,\ \xi)\,z(\xi)\,d\xi. \tag{20}$$

Неискажаемые структуры должны удовлетворять интегральному уравнению (20), ядро которого задано свойствами оптической системы.

Ядро уравнения (20) симметрично, но оно совсем другого типа, чем в задаче Штурма—Лиувилля. Оно не имеет разрыва производной.

Существует ли структура, удовлетворяющая уравнению (20)? К сожалению, ответ неутешителен. Интегральное уравнение (20) имеет решения, но эти решения — бесконечные синусоиды. Только такие распределения изображаются точно. Таким образом, решение существует, но физически оно мало интересно.

Но можно поставить вопрос иначе: насколько можно приблизиться к точному изображению? Оказывается, можно указать такие структуры, которые мало искажаются. Можно высказать на этот счет ряд общих теорем.

Таким образом, области дифференциальных и интегральных уравнений далеко не перекрываются. Интегральные уравнения представляют интерес и независимо от дифференциальных уравнений.

ТРИНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(13/III 1932 г.)

Дополнительные замечания по теории интегральных уравнений. Вопрос о возможности разложения произвольной функции, удовлетворяющей краевым условиям, по собственным функциям краевой задачи.

Мы видели, что функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению и граничным условиям задачи Штурма—Лиувилля, удовлетворяет также определенному интегральному уравнению. Это верно также, если положить $\lambda=0$; мы имеем в этом случае статическую задачу, решением которой является функция

$$\varphi(x)=\int_0^l V(x,\ \xi)\,g(\xi)\,d\xi.$$

Более общий класс интегральных уравнений получится, если не ограничивать функцию $V(x, \xi)$ тем условием, что она есть функция Грина некоторой задачи.

Мы займемся однородным интегральным уравнением, т. е. положим:

$$g(\xi) = 0,$$

и приведем ядро к симметричному виду, вводя функцию

$$\psi(x) = \sqrt{q(x)}\,\varphi(x).$$

Новое симметричное ядро мы обозначим через $K(x, \xi)$, т. е.

$$K(x, \xi) = V(x, \xi)\sqrt{q(x)\,q(\xi)}.$$

Новое уравнение запишется так:

$$\psi(x) = \lambda\int\limits_0^l K(x, \xi)\,\psi(\xi)\,d\xi. \tag{1}$$

Мы знаем, что если ядро построено указанным способом из функции Грина, то интегральное уравнение обладает бесконечным множеством собственных значений и собственных функций. Существует теорема, которую мы примем без доказательства: всякое интегральное уравнение с *симметричным* ядром обладает по крайней мере одним собственным значением и соответствующей собственной функцией. В случае несимметричного ядра может оказаться, что интегральное уравнение не имеет ни одного решения.

Рассмотрим пример Ковалевского. Пусть ядро симметрично и имеет вид

$$K(x, \xi) = \sin\pi x \sin\pi\xi.$$

Пусть, кроме того, $l = 1$. Тогда уравнение будет

$$\psi(x) = \lambda\int\limits_0^1 \sin\pi x \sin\pi\xi\,\psi(\xi)\,d\xi.$$

Такое ядро, которое можно представить как произведение вида

$$f_1(x) f_2(\xi)$$

называется *вырожденным*. В нашем примере ядро вырождено и

$$\psi(x) = \lambda \sin \pi x \int_0^1 \psi(\xi) \sin \pi\xi d\xi = c\lambda \sin \pi x,$$

где c — постоянная.

Подставляя это выражение для ψ в интегральное уравнение, находим:

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^1 \sin^2 \pi\xi d\xi = \frac{1}{2},$$

откуда следует, что $\lambda = 2$.

Возьмем теперь несимметричное ядро

$$K(x, \xi) = \sin \pi x \cos \pi\xi.$$

Повторяя прежнее вычисление, находим:

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^1 \sin \pi\xi \cos \pi\xi d\xi = 0.$$

Таким образом, уравнение не имеет собственного значения и единственное решение — тривиальное:

$$\psi = 0.$$

Пусть в рассматриваемой задаче имеется не меньше двух собственных значений. Тогда

$$\psi_m(x) = \lambda_m \int_0^l K(x, \xi)\, \psi_m(\xi)\, d\xi, \tag{2}$$

$$\psi_n(x) = \lambda_n \int_0^l K(x, \xi) \psi_n(\xi) d\xi, \tag{3}$$

причем $\lambda_m \neq \lambda_n$. Покажем, что если ядро симметрично, то функции

ψ_m и ψ_n ортогональны. Умножая (2) на $\lambda_n\psi_n$, а (3) — на $\lambda_m\psi_m$, вычитая и интегрируя по x от 0 до l, находим:

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l \psi_m(x)\psi_n(x)\,dx =$$

$$= \lambda_m\lambda_n \int_0^l\int_0^l K(x, \xi)\left[\psi_m(\xi)\psi_n(x) - \psi_m(x)\psi_n(\xi)\right]d\xi dx.$$

Меняя в последнем члене x и ξ местами, получим при симметричном ядре:

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l \psi_m(x)\psi_n(x)\,dx = 0,$$

т. е. функции ψ_m и ψ_n ортогональны. Ясно, что это условие ортогональности совпадает с ранее выведенным для функций φ:

$$\int_0^l q(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = 0.$$

В задаче Штурма—Лиувилля каждому собственному значению соответствует одна и только одна собственная функция. В общем случае в интегральном уравнении данному собственному значению могут соответствовать n линейно независимых собственных функций (например, в случае мембран и пластин). Ясно, что наше доказательство ортогональности не годится для функций, соответствующих одному и тому же собственному значению. Вообще говоря, различные собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению, не ортогональны, но так как они линейно независимы, систему этих функций всегда можно ортогонализировать. Легко убедиться в этом на примере функций ψ_1 и ψ_2. Пусть они не ортогональны. Можно всегда выбрать постоянные a и b так, чтобы функции

$$\bar\psi_1 = a_1\psi_1 + b_1\psi_2,$$

$$\bar\psi_2 = a_2\psi_1 + b_2\psi_2$$

были ортогональны и нормированы, т. е. чтобы было

$$\int_0^l \bar\psi_1^2(x)\,dx = 1, \quad \int_0^l \bar\psi_2^2(x)\,dx = 1, \quad \int_0^l \bar\psi_1(x)\bar\psi_2(x)\,dx = 0.$$

Поэтому мы всегда будем считать, что система фундаментальных функций ортогональна и нормирована. В общем случае ограниченного симметричного ядра одному собственному значению может соответствовать больше одной собственной функции, но число их при этом всегда конечное.

Мы знаем, что общее решение в случае струны имеет вид

$$y(x, t) = \sum_i \varphi_i(x)(A_i \cos \sqrt{\lambda_i} t + B_i \sin \sqrt{\lambda_i} t).$$

Оно представляет собою сумму всех возможных колебаний. Если даны начальные распределения смещений и скоростей, то колебание определено условиями:

$$y(x, 0) = \sum_i A_i \varphi_i(x) = f(x),$$

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = \sum_i B_i \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(x) = F(x).$$

Если функции $f(x)$ и $F(x)$ могут быть разложены в ряды по собственным функциям задачи, то коэффициенты разложения дают амплитуды колебаний. Следовательно, вопрос заключается в возможности разложения любой функции в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям задачи. Докажем, что это всегда возможно. Мы будем оперировать с функциями ψ_i, так как разложение можно умножить на $\sqrt{q(x)}$:

$$\sum_i A_i \psi_i(x) = f(x) \sqrt{q(x)}; \tag{4}$$

$$\sum_i B_i \sqrt{\lambda_i} \psi_i(x) = F(x) \sqrt{q(x)}. \tag{5}$$

Пусть ядро симметричное. Мы выберем некоторую специальную функцию и допустим, что ее можно разложить в ряд по собственным функциям. Мы покажем, что в таком случае можно разложить в ряд по собственным функциям также произвольную функцию. В качестве специальной функции мы возьмем ядро интегрального уравнения

$$K(x, \xi) = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x) + \ldots \tag{6}$$

Так как по предположению ряд сходится равномерно, то его можно интегрировать почленно:

$$\int_0^l K(x, \xi)\psi_k(x)\,dx = \int_0^l \psi_k(x)[c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + \ldots].$$

В силу ортогональности собственных функций разного номера и условия нормировки

$$\int_0^l \psi_k^2(x)\,dx = 1,$$

имеем:

$$c_k = \int_0^l K(x, \xi)\psi_k(x)\,dx.$$

Но из интегрального уравнения видно, что интеграл равен

$$\frac{\psi_k(\xi)}{\lambda_k}.$$

Следовательно,

$$c_k = \frac{\psi_k(\xi)}{\lambda_k}$$

и

$$K(x, \xi) = \frac{\psi_1(x)\,\psi_1(\xi)}{\lambda_1} + \frac{\psi_2(x)\,\psi_2(\xi)}{\lambda_2} + \ldots \tag{7}$$

Выражение в правой части называется билинейной формой нашего интегрального уравнения. Докажем, что если она сходится равномерно, то она непременно представляет ядро. (Мы только *предположили*, а не доказали, что ряд (6) сходится равномерно. Вообще, нельзя доказать, что *всякое* ядро может быть разложено таким образом.)

Образуем разность

$$g(x, \xi) = K(x, \xi) - \sum_i \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(\xi)}{\lambda_i}.$$

Ясно, что $g(x, \xi)$ есть непрерывная и симметричная функция x и ξ. Следовательно, если мы образуем однородное интегральное уравнение с ядром $g(x, \xi)$, то это уравнение обладает по крайней мере одним собственным значением и одним нетривиальным решением:

$$\chi(x) = \mu \int_0^l g(x, \xi)\,\chi(\xi)\,d\xi. \tag{8}$$

Покажем, что решение этого уравнения $\chi(x)$ ортогонально ко всем функциям $\psi_k(x)$.

Умножая уравнение (8) на $\psi_k(x)$ и интегрируя, получаем:

$$\int_0^l \psi_k(x)\chi(x)\,dx=\mu\int_0^l \chi(\xi)\left[\int_0^l K(x,\ \xi)\psi_k(x)\,dx-\right.$$
$$\left.-\int_0^l \sum_i \frac{\psi_i(x)\psi_i(\xi)}{\lambda_i}\psi_k(x)\,dx\right]d\xi.$$

Изменив порядок суммирования и интегрирования в последнем члене (это можно сделать, так как ряд сходится равномерно), мы получаем в силу ортогональности ψ_i и ψ_k $(i\neq k)$, что он равен

$$\frac{\psi_k(\xi)}{\lambda_k}.$$

Но первый член в силу исходного интегрального уравнения тоже равен

$$\frac{\psi_k(\xi)}{\lambda_k}.$$

Значит,

$$\int_0^l \psi_k(x)\chi(x)\,dx=0,$$

т. е. функция $\chi(x)$ ортогональна ко всем функциям $\psi_i(x)$.

Покажем теперь, что функция $\chi(x)$ является собственной функцией исходного интегрального уравнения, образованного с помощью ядра $K(x,\ \xi)$.

Действительно,

$$\chi(x)=\mu\int_0^l g(x,\ \xi)\chi(\xi)\,d\xi=$$
$$=\mu\int_0^l K(x,\ \xi)\chi(\xi)\,d\xi-\mu\int_0^l \sum_i \frac{\psi_i(x)\psi_i(\xi)}{\lambda_i}\chi(\xi)\,d\xi.$$

Но в силу ортогональности $\chi(x)$ ко всем $\psi_i(x)$, последний интеграл есть нуль. Следовательно, $\chi(x)$ действительно есть собственная функция ядра $K(x,\ \xi)$.

Но тогда $\chi(x)$ есть одна из функций $\psi_i(x)$. Так как она ортогональна ко всем $\psi_i(x)$, то она ортогональна к самой себе, и мы пришли к противоречию. Следовательно, уравнение (8) не имеет собственной функции, а это возможно только, если

$$g(x, \xi) = 0,$$

т. е.

$$K(x, \xi) = \sum_i \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(\xi)}{\lambda_i}. \tag{9}$$

Докажем теперь, что если ядро может быть представлено билинейной формой в согласии с уравнением (9), то всякая функция, порождаемая ядром, т. е. всякая функция $f(x)$, которая может быть представлена в виде

$$f(x) = \int_0^l K(x, \xi)\, h(\xi)\, d\xi,$$

может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям ядра.

Действительно, умножая (9) на $h(\xi)$ и интегрируя, получаем

$$f(x) = \int_0^l K(x, \xi)\, h(\xi)\, d\xi = \int_0^l \sum_i \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(\xi)}{\lambda_i}\, h(\xi)\, d\xi.$$

Если функция $h(\xi)$ — ограниченная, то ряд, стоящий справа, равномерно сходится, и, следовательно,

$$f(x) = \sum_i \psi_i(x) \int_0^l \frac{\psi_i(\xi)\, h(\xi)}{\lambda_i}\, d\xi,$$

или

$$f(x) = \sum_i c_i \psi_i(x),$$

где

$$c_i = \int_0^l \frac{\psi_i(\xi)\, h(\xi)}{\lambda_i}\, d\xi.$$

Таким образом, функция $f(x)$ действительно может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по функциям $\psi_i(x)$.