ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(19/III 1932 г.)

Краткое резюме содержания предыдущей лекции. Вопрос об апроксимации функции конечным числом членов ряда. Полнота системы собственных функций. Вопрос об условиях разложимости и быстроте сходимости ряда. Распределение амплитуд гармоник в зависимости от начальных условий. Пример струны, возбуждаемой щипком и ударом. Электрический аналог возбуждения ударом. Влияние ширины интервала возбуждения при ударе.

В прошлых лекциях мы рассмотрели вопрос о собственных колебаниях. Перед нами возник вопрос о том, как приспособить решение к начальным условиям. Дело сводится к тому, чтобы разложить заданную функцию, удовлетворяющую краевым условиям, в ряд по собственным функциям. Доказательство разложимости можно провести с помощью интегральных уравнений, пользуясь тем, что собственные функции удовлетворяют интегральному уравнению.

Мы показали, что можно разложить в ряд по фундаментальным функциям всякую функцию, „достижимую с помощью ядра". Какие физические указания дает это решение?

Мы доказали, что если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(\xi)}{\lambda_i} \tag{1}$$

сходится равномерно, то он представляет собой ядро интегрального уравнения $K(x, \xi)$:

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(\xi)}{\lambda_i}.$$

Часто непосредственно видно, что ряд (1) сходится.

Если функция $f(x)$ достижима с помощью ядра, т. е.

$$f(x) = \int_0^l K(x, \xi)\,h(\xi)\,d\xi, \tag{2}$$

то

$$f(x) = \sum_i c_i \psi_i(x), \tag{3}$$

причем

$$c_i = \frac{1}{\lambda_i} \int_0^l h(\xi)\,\psi_i(\xi)\,d\xi. \tag{4}$$

Подчеркнем лишний раз, что не всякая функция может быть представлена в виде (3), а только достижимая с помощью ядра.

Представляет ли интерес то, что мы доказали? Это зависит от того, насколько обширен класс функций, достижимых с помощью ядра, а это в свою очередь зависит от вида ядра. Если $K(x, \xi)$ — ядро штурм-лиувиллевского типа, то всякая непрерывная функция с непрерывной первой производной и кусочно-непрерывной второй производной, удовлетворяющая, кроме того, краевым условиям данной задачи Штурма—Лиувилля, может быть разложена в ряд по собственным функциям ядра.

Формула (4) несколько неудобна тем, что выражает коэффициенты c_i через функцию $h(\xi)$. Приведем эту формулу к другому, более удобному виду. Умножим (2) на $\psi_i(x)$ и проинтегрируем:

$$\int_0^l f(x)\psi_i(x)\,dx = \int_0^l\int_0^l K(x, \xi)\psi_i(x)h(\xi)\,dx\,d\xi.$$

Но

$$\int_0^l K(x, \xi)\psi_i(x)\,dx = \frac{\psi_i(\xi)}{\lambda_i}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^l f(x)\psi_i(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_i}\int_0^l \psi_i(\xi)h(\xi)\,d\xi,$$

т. е.

$$c_i = \int_0^l f(x)\psi_i(x)\,dx. \qquad (5)$$

Теперь коэффициенты разложения выражены непосредственно через функцию $f(x)$. Они вычисляются так же, как коэффициенты обычного ряда Фурье, и их принято и в этом более общем случае называть коэффициентами Фурье нашей функции.

Напомним, что функции $\psi_i(x)$ отличны от функций $\varphi_i(x)$, непосредственно описывающих форму колебания. Между φ_i и ψ_i имеет место соотношение

$$\psi_i(x) = \sqrt{q(x)}\,\varphi_i(x). \qquad (6)$$

Общее решение нашей задачи имеет вид

$$y(x, t)=\sum_i \varphi_i(x)(A_i \cos\sqrt{\lambda_i}t + B_i \sin\sqrt{\lambda_i}t), \tag{7}$$

причем начальные условия даются соотношениями:

$$y(x, 0)=\sum_i A_i\varphi_i(x)=f(x); \tag{8}$$

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t}=\sum_i B_i\sqrt{\lambda_i}\varphi_i(x)=F(x). \tag{9}$$

Умножив (8) на $\sqrt{q(x)}$, получаем:

$$\sum_i A_i\psi_i(x)=\sqrt{q(x)}\,f(x),$$

откуда

$$A_i=\int_0^l \sqrt{q(x)}\,f(x)\,\psi_i(x)\,dx.$$

Подставляя сюда (6), получаем:

$$A_i=\int_0^l q(x)\,f(x)\,\varphi_i(x)\,dx,$$

т. е. коэффициенты разложения $f(x)$ по функциям φ_i совпадают с коэффициентами разложения функции $\sqrt{q(x)}\,f(x)$ по функциям ψ_i.

Я хотел бы упомянуть еще о другом подходе к задаче. Практически всегда приходится ограничиваться конечным числом членов ряда (7). Возникает вопрос: можно ли и с какой степенью точности апроксимировать функцию $f(x)$ *конечным* числом членов ряда, т. е. суммой

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i(x). \tag{10}$$

Нужно определить, что мы будем понимать под хорошей апроксимацией.

Для нас важна не апроксимация при каких-нибудь отдельных значениях x, а апроксимация *в среднем* на всем интервале. Поэтому мы будем считать апроксимацию тем лучшей, чем меньше средняя квадратичная ошибка:

$$J=\frac{1}{l}\int_0^l\left[f(x)-\sum_i c_i\psi_i(x)\right]^2 dx. \tag{11}$$

Пусть, например, $n=3$. Тогда задача о наилучшей апроксимации — это задача об отыскании минимума функции (11) от трех неизвестных: c_1, c_2 и c_3.

Оказывается — и это является замечательным фактом, что при любом n для того, чтобы J было минимальным, нужно подобрать c_i так, чтобы они совпадали с коэффициентами разложения в бесконечном ряде (8). Это свойство связано с ортогональностью функций ψ_i.

Если окажется, что при некотором $n=n_1$ апроксимация, достигаемая таким выбором c_i, недостаточна, то мы присоединим еще несколько членов. При этом коэффициенты первых членов не придется вычислять заново. Вообще говоря, при апроксимации функции рядом дело обстоит не так: при добавлении дальнейших членов приходится изменять коэффициенты первых членов разложения.

Вследствие ортогональности собственных функций формула (11) приводится к виду

$$J=\frac{1}{l}\left(\int_0^l f^2(x)\,dx-\sum_{i=1}^n c_i^2\right),$$

откуда сразу видно, что чем больше взято членов суммы (10), тем лучше приближение.

Из того, что мы доказали, непосредственно следует, что при $n\to\infty$ ошибка (11) стремится к нулю.

Если ряд

$$\sum_i c_i\psi_i$$

сходится равномерно, то в пределе

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2=\int_0^l f^2(x)\,dx,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} J=0.$$

Если имеет место это последнее условие, то говорят, что функции ψ_i, с помощью которых составляются коэффициенты разложения, образуют *полную* систему функций. Полнота системы собственных функций задачи Штурма—Лиувилля и других краевых задач, встречающихся, например, в волновой механике, является исключительно важным свойством.

Без доказательства сходимости билинейной формы (1) наши утверждения остаются необоснованными. Это доказательство сходимости громоздко, и я не буду его приводить. Существует теорема Мерцера о том, что в случае ядра, все собственные числа которого положительны (а в случае задачи Штурма—Лиувилля дело обстоит именно так), билинейная форма (1) всегда сходится.

Условием разложимости $f(x)$ в ряд по собственным функциям являлась непрерывность первой производной $f(x)$, но от этого требования можно освободиться.

Пусть дана некоторая непрерывная функция с разрывной производной. Пусть скачок производной равен a. Функция $K(x, \xi)$ также имеет скачок производной; он равен единице. Образуем разность

$$f(x)-aK(x, \xi).$$

Эта функция имеет непрерывную производную и, следовательно, может быть разложена в ряд. Но сама $K(x, \xi)$ также может быть разложена в ряд. Следовательно, и $f(x)$ может быть разложена в ряд. Мы расширили, таким образом, область функций, разложимых в ряд по собственным функциям.

Можно доказать, что ограничение, выражаемое требованием непрерывности самой функции, также не нужно. Всякая кусочно-гладкая функция, квадрат первой производной которой интегрируем $\left(\int\limits_0^l [f'(x)]^2\,dx \text{ конечен}\right)$, может быть разложена в ряд по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля. В местах разрыва ряд дает среднее арифметическое, что хорошо известно на примере ряда Фурье.

Когда мы вычисляем ряд, мы практически должны ограничиваться несколькими членами. Поэтому часто сходимость ряда не представляет интереса.

Пусть для простоты $q(x)=1$. Тогда

$$y(x, t)=\sum_i c_i\varphi_i(x)\cos\sqrt{\lambda_i}t,$$

c_i характеризует амплитуду i-го колебания. Нам часто вовсе не интересно, как выглядит функция $y(x, t)$ — форма струны или распределение напряжения в антенне в тот или иной определенный момент времени, а важно знать, насколько сильно выражена та или иная гармоника. Такая постановка вопроса возникает тогда, когда колебание $y(x, t)$ действует на резонатор. Здесь важно знать, как представлено колебание данной частоты во всем агрегате нормальных колебаний. В таких случаях быстрота сходимости несущественна, а важно знать величины c_i.

Итак, мы ставим следующий вопрос. Мы возбуждаем каким-то способом струну или антенну. Каково при этом распределение амплитуд различных тонов? Рассмотрим два случая.

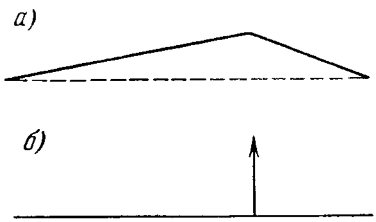

Рис. 182.

Первый случай — щипковое возбуждение. Мы „щиплем" струну в определенной точке, отводя ее, как показано на рис. 182, *а*, а затем опускаем.

Второй случай — ударное возбуждение. Струна не имеет начального отклонения, $f(x)=0$, но в некоторых местах имеет начальную скорость (рис. 182, *б*).

В первом случае начальная скорость по предположению равна всюду нулю и, следовательно, все B_i в (7) равны нулю. При $t=0$ имеем:

$$f(x)=\sum_i A_i\varphi_i(x).$$

Найти коэффициенты A_i в этом разложении не трудно: ведь мы получили задачу о разложении функции Грина в ряд по собственным функциям.

Как изменяется картина при изменении точки оттягивания струны ξ? При $t=0$ y есть функция от x при заданном ξ:

$$y(x, \xi)=K(x, \xi)=\sum_i \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i}.$$

В рассматриваемом случае нормированные собственные функции таковы:

$$\varphi_i(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{i\pi x}{l}. \qquad (12)$$

Кроме того, как мы знаем, здесь

$$\sqrt{\lambda_i} = \frac{i\pi a}{l}.$$

Следовательно, можно записать решение в виде

$$y(x, \xi, t) = \frac{2l}{\pi^2 a^2} \sum_i \frac{\sin\frac{i\pi x}{l} \sin\frac{i\pi x}{l}}{i^2} \cos\sqrt{\lambda_i}\, t. \tag{13}$$

Множители $\sin(i\pi x/l)$ дают распределение каждого колебания. Зависимость степени его возбуждения от ξ определяется множителем $\sin(i\pi\xi/l)$.

Удобнее всего сравнивать максимумы амплитуд отдельных колебаний. Максимальная амплитуда i-го колебания есть

$$M_i = \frac{2l}{i^2\pi^2 a^2}.$$

Здесь сразу видно, что разложение по собственным функциям сходится — в знаменателе стоит i^2. Таким образом, ряд (13) имеет мажоранту

$$\frac{2l}{\pi^2 a^2} \sum_i \frac{1}{i^2},$$

а ряд

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots,$$

как известно, очень хорошо сходится (таким образом, здесь все ясно и без теоремы Мерцера). Физически это означает, что с увеличением номера обертона его амплитуда сильно падает.

От места, где мы щиплем струну, очень сильно зависит, насколько возбужден тот или иной обертон. Если

$$\frac{i\pi\xi}{l} = \frac{\pi}{2},$$

то при данной величине начального отклонения i-ое колебание возбуждается наиболее сильно. Данный обертон сильнее всего возбуждается тогда, когда мы щиплем струну в точке, где он имеет пучность. Если

$$\frac{i\pi\xi}{l} = n\pi,$$

где n — целое число (возбуждение в узле данного обертона), то

$$\sin\frac{i\pi\xi}{l}=0$$

и i-ый обертон не возбуждается. Например, амплитуда второго обертона равна нулю, если $\xi=l/2$.

Отсутствуют все те обертоны, которые имеют узлы в точках, где мы щиплем струну. Не безразлично, в каком месте инструмента мы щиплем струну. Выбором этого места можно регулировать тембр.

В рассматриваемом случае каждый тон звучит в такой фазе, что ряд (13) содержит только косинусы.

Перейдем ко второму случаю. Здесь все $A_i=0$ и

$$F(x)=\frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=\sum_i B_i\sqrt{\lambda_i}\varphi_i(x). \tag{14}$$

Предположим, что мы ударили струну в одной точке, так что функция $F(x)$ равна нулю во всем интервале, кроме точки ξ. Для того, чтобы действие было конечным, $F(x)$ должна быть в этой точке бесконечно большой, так чтобы интеграл

$$\int_0^l F(x)\,dx$$

был конечным. Определенная таким образом $F(x)$ не является функцией в собственном смысле[1].

Дирак ввел „несобственную" функцию $\delta(x-\xi)$, которая по определению равна нулю при $x\neq\xi$, причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)\,dx=1.$$

С δ-функцией в сущности нельзя оперировать, как с функцией в собственном смысле. Но в последнее время употребление δ-функции было оправдано математически. Теорию струны, возбуждаемой ударом в одной точке, можно построить с помощью δ-функции. Но мы подойдем к задаче по-другому.

[1] [Задать функцию $y=F(x)$, значит задать значение y для каждого x; ср. 3-ю лекцию части I.]

Будем считать, что удар действует не в одной точке, а на конечном, но маленьком участке. Тогда оказывается, что не важна „ширина“ возвышения (рис. 183), а важен лишь интеграл

$$P = \int_0^l F(x)\,dx, \tag{15}$$

он „задает тон“. Действительно, если $F(x)$ отлична от нуля только в очень малом интервале, то $\sin(i\pi x/l)$ имеет на этом интервале почти постоянное значение. Поэтому для достаточно малых i (достаточно низких тонов) мы получаем:

$$C_i = B_i\sqrt{\lambda_i} = \int_0^l F(x)\,\varphi_i(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l F(x)\sin\frac{i\pi x}{l}\,dx \simeq$$

$$\simeq \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{i\pi\xi}{l}\int_0^l F(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\,P\sin\frac{i\pi\xi}{l},$$

откуда, воспользовавшись выражением для λ_i, находим:

$$B_i = \frac{\sqrt{2l}}{i\pi a}\sin\frac{i\pi\xi}{l}.$$

Это верно, правда, только для не очень больших i.

Для максимальной амплитуды в случае ударного возбуждения мы получаем в результате:

$$M_i = \frac{2P}{i\pi a}\sin\frac{i\pi\xi}{l}. \tag{16}$$

Каждое из колебаний возбуждается сильнее всего, если мы ударяем струну в его пучности, и не возбуждается вовсе, если мы ее ударяем в его узле. Мы видим, насколько важно *место* удара.

Необходимо заметить следующее: амплитуды обертонов здесь спадают, как $1/i$, т. е. медленнее, чем в случае возбуждения щипком. Однако такой закон спадания имеет место только для амплитуд обертонов с не очень большим i. Для обертонов, длина волны которых сравнима с шириной интервала возбуждения, это уже неверно. В противном случае мы имели бы ряд, который мог бы не сходиться.

Возьмем антенну, открытую с обоих концов. Начальным условиям (14) здесь соответствует случай, когда в начальный момент

$I=0$, но имеет место некоторое распределение величины $\partial I/\partial t$, т. е., согласно уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{1}{C}\frac{\partial I}{\partial t},$$

некоторое начальное распределение величины V.

Условию (15) соответствует случай, когда $\partial I/\partial t$ в начальный момент отлична от нуля только в одной точке, причем интеграл

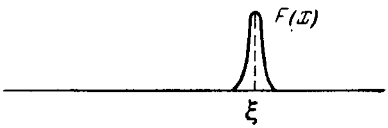

Рис. 183.

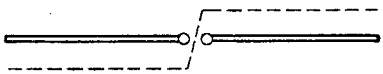

Рис. 184.

остается конечным, т. е. задана разность потенциалов между двумя отрезками антенны. Это можно осуществить с помощью искрового промежутка (рис. 184).

В начальный момент имеем для рассматриваемого электрического случая:

$$\int_0^l \left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)_{t=0} dx=\frac{C(V_1-V_2)}{l}=P.$$

Те обертоны, для которых точка, где расположен искровой промежуток, является узлом, не будут возбуждаться.

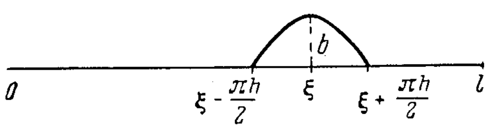

Рис. 185.

Полученные нами результаты нас не вполне удовлетворяют, так как в них не учитывается, как сказывается на распределении обертонов ширина участка, где приложен удар. Между тем этот вопрос возникает, например, в связи с устройством роялей. Здесь весьма существенны вопросы о том, *где* надо ударять и *как* надо ударять. Полезно просчитать в связи с этим задачу с некоторой заданной функцией $F(x)$ до конца.

Я приведу пример Гельмгольца. Он принимает, что функция $F(x)$ имеет вид, показанный на рис. 185:

$$F(x)=\begin{cases} b\cos\dfrac{x-\xi}{h} & \text{при } |x-\xi|\leqslant\dfrac{\pi h}{2}, \\ 0 & \text{при } |x-\xi|>\dfrac{\pi h}{2}. \end{cases}$$

Эту функцию мы можем разложить в ряд по собственным функциям. Для максимальной амплитуды i-го обертона мы получим следующую довольно сложную формулу:

$$M_i=\frac{2}{i\pi a}\sin\frac{i\pi\xi}{l}\cdot\frac{P\cos\dfrac{i\pi h}{2l}}{\left(\dfrac{i\pi h}{l}\right)^2-1}.$$

При малых h и i можно зачеркнуть выражение $\left(\frac{i\pi h}{l}\right)^2$ и считать косинус равным единице, что дает

$$M_i=\frac{2P}{i\pi a}\sin\frac{i\pi\xi}{l},$$

т. е. прежнее выражение (16). Но перейдем к более высоким обертонам (i велико). Там, наоборот, выражение $\left(\frac{i\pi h}{l}\right)^2$ будет велико по сравнению с единицей и обертоны начинают спадать очень быстро, как $1/i^3$. Чем шире промежуток возбуждения h, тем менее выражены высокие обертоны. Практически тоны выше восьмого почти незаметны. Седьмой и восьмой обертоны обычно неприятны для уха, и их желательно погасить. Оказывается, что достаточно расположить точку удара по середине между точками $\xi=l/7$ и $\xi=l/8$, чтобы эти обертоны были практически незаметны.

Тембр рояля зависит не только от ширины, но и от жесткости молоточка, и от того как происходит удар. Этим определяется то, что можно играть на рояли с хорошим и плохим туше.

Заметим в заключение, что мы получили в качестве побочного продукта наших рассуждений математическую теорему о том, что любая функция, непрерывная, имеющая кусочно-непрерывную производную и обращающаяся в нуль на концах интервала, может быть разложена в ряд Фурье по синусам. Эта теорема следует из того, что функции (12) являются собственными функциями однородной струны, закрепленной на концах.