ПЯТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(23/III 1932 г.)

Замечания о собственных колебаниях. Вынужденные колебания. Однородное и неоднородное интегральное уравнение, альтернатива. Случай, когда внешняя сила ортогональна к собственному колебанию. Альтернатива в случае дискретной системы. Нарастающие решения при резонансе. Форма колебаний при очень малой частоте внешней силы. Форма колебаний вблизи резонанса. Зависимость амплитуды вынужденного колебания от формы внешней силы.

Введя функцию Грина, мы составили интегральное уравнение, которому удовлетворяют колебания линейной распределенной системы.

Мы приняли, что внешняя сила является гармонической (всякую другую интересующую нас силу можно представить как суперпозицию гармонических сил). Тогда уравнение для функции $\varphi(x)$, описывающей форму колебания, таково:

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^l V(x,\xi)\,q(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi+\int_0^l V(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi,$$

где λ — квадрат частоты внешней силы.

Если внешней силы нет, то $g(\xi)=0$ (задача о *собственных* колебаниях) и

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^l V(x,\xi)\,q(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

(однородное уравнение). Это уравнение имеет решение только при определенных значениях λ — собственных значениях задачи, определяющих квадраты собственных частот. Каждому собственному значению соответствует одно решение — нормальное колебание. Общее движение есть сумма нормальных колебаний; оно определено однозначно, если заданы расположение и скорости всех точек при $t=0$; но при этом возникает вопрос о разложимости произвольной функции в ряд по собственным функциям задачи.

Мы привели ядро к симметричному виду; всякое интегральное уравнение с симметричным ядром имеет хотя бы одно собственное значение и соответственно хотя бы одно решение. Мы показали, что всякая функция, достижимая с помощью ядра, может быть разложена в ряд по собственным функциям. При специальном виде ядра, соответствующем нашей колебательной задаче, мы доказали, что число собственных функций бесконечно и что всякая непрерывная функция с кусочно-непрерывной первой производной и даже всякая кусочно-непрерывная функция могут быть разложены в ряд по собственным функциям.

Пусть функция $f(x)$ разлагается в ряд по собственным функциям с коэффициентами c_i. Система функций — *полная*, если

$$\int_0^l f^2(x)\,dx = \sum_i c_i^2.$$

Собственные функции задачи Штурма—Лиувилля всегда образуют полную систему, но, вообще говоря, для произвольной системы ортогональных функций

$$\int_0^l f^2(x)\,dx \geqslant \sum_i c_i^2,$$

причем знак равенства имеет место только в случае полной системы.

Можно показать, что полная система всегда замкнута, т. е. нет функции, ортогональной ко всем функциям системы и не принадлежащей к этой системе. Обратно: всякая замкнутая система функций является полной.

Переходим к задаче о *вынужденных колебаниях*.

Для простоты отождествим функции φ и ψ, приняв $q(x)=1$, т. е. взяв однородную по плотности струну. Имеем неоднородное уравнение вида

$$z(x)=f(x)+\lambda\int_0^l K(x, \xi)\,z(\xi)\,d\xi,$$

где

$$f(x)=\int_0^l K(x, \xi)\,g(\xi)\,d\xi,$$

причем $f(x)$ — известная функция, так как ядро $K(x, \xi)$ и сила, действующая на струну, $g(\xi)$ известны. Требуется найти распределение амплитуд $z(x)$.

Перепишем интегральное уравнение в таком виде:

$$z(x)-f(x)=\lambda\int_0^l K(x, \xi)\,z(\xi)\,d\xi. \tag{1}$$

Таким образом, функция $z(x)-f(x)$ достижима с помощью ядра $K(x, \xi)$. Следовательно, ее можно разложить в ряд по собственным функциям однородного уравнения:

$$z(x)-f(x)=\sum_i c_i\psi_i(x).$$

Будем считать, что задача о собственных колебаниях решена, и, значит, функции $\psi_i(x)$ известны. Тогда c_i могут быть вычислены по формуле

$$c_i=\int_0^l [z(\xi)-f(\xi)]\,\psi_i(\xi)\,d\xi. \tag{2}$$

Но функция $z(x)$ неизвестна. С другой стороны, коэффициент Фурье c_i можно выразить через $h(\xi)$; здесь $h(\xi)$ есть $\lambda z(\xi)$ и

$$c_i=\frac{\lambda}{\lambda_i}\int_0^l z(\xi)\,\psi_i(\xi)\,d\xi. \tag{3}$$

Исключая $z(\xi)$ из уравнений (2) и (3), находим:

$$c_i=\frac{\lambda}{\lambda_i-\lambda}\int_0^l f(\xi)\,\psi_i(\xi)\,d\xi. \tag{4}$$

Этим задача решена, если только $\lambda_i\neq\lambda$. Если $\lambda=\lambda_i$, то оба выражения для c_i несовместны, кроме того случая, когда $\int_0^l f(\xi)\,\psi_i(\xi)\,d\xi=0$. Если $\lambda=\lambda_i$ и, кроме того, $\int_0^l f\psi_i\,d\xi\neq 0$, то уравнение (1) не имеет решения. Таким образом, мы пришли к важной математической теореме: неоднородное интегральное уравнение всегда имеет решение, если $\lambda\neq\lambda_i$; если же $\lambda=\lambda_i$ и

$$\int_0^l f(\xi)\,\psi_i(\xi)\,d\xi\neq 0,$$

то неоднородное уравнение не имеет решения. Следовательно, в общем случае: либо однородное уравнение имеет решение, либо неоднородное уравнение имеет решение.

Решение неоднородного уравнения таково:

$$z(x)=f(x)+\lambda\sum_i\left\{\frac{1}{\lambda_i-\lambda}\int_0^l f(\xi)\psi_i(\xi)d\xi\right\}\psi_i(x), \tag{5}$$

причем ряд сходится равномерно.

Пусть $\lambda=\lambda_k$ и

$$\int_0^l f(\xi)\psi_k(\xi)\,d\xi=0. \tag{6}$$

Тогда легко показать, что решение неоднородного уравнения есть

$$z(x)=f(x)+\lambda_k\sum_i{}'\left\{\frac{1}{\lambda_i-\lambda_k}\int_0^l f(\xi)\psi_i(\xi)d\xi\right\}\psi_i(x)+C\psi_k(x), \tag{7}$$

где C — произвольная постоянная, а сумму Σ' следует распространить на все значения $i\neq k$. Решение неоднозначно из-за произвола в выборе C.

Выясним физический смысл условия (6). Подставим в него

$$f(x)=\int_0^l K(x,\ \xi)\,g(\xi)\,d\xi.$$

Тогда

$$\int_0^l\int_0^l K(x,\ \xi)\,g(\xi)\,\psi_k(x)\,d\xi dx=0,$$

или, так как

$$\int_0^l K(x,\ \xi)\,\psi_k(x)\,dx=\frac{\psi_k(\xi)}{\lambda_k},$$

то

$$\frac{1}{\lambda_k}\int_0^l g(\xi)\,\psi_k(\xi)\,d\xi=0,$$

т. е. функции $g(x)$ и $\psi_k(x)$ должны быть ортогональны. Если этого нет, то неоднородное уравнение не имеет решения при $\lambda=\lambda_k$. Но сила, действующая на единицу длины системы, есть $g(x)\cos\sqrt{\lambda_k}t$; работа этой силы за время dt на элементе длины dx, отнесенная к колебанию с частотой внешней силы, есть

$$\sqrt{\lambda_k}\,g(x)\,dx\cos\sqrt{\lambda_k}t\cdot\psi_k(x)\cos(\sqrt{\lambda_k}t+\theta)\,dt.$$

При этом работа на протяжении всей системы будет

$$\sqrt{\lambda_k}\cos\sqrt{\lambda_k}\,t\cos(\sqrt{\lambda_k}\,t+\theta)\,dt\int_0^l g(\xi)\,\psi_k(\xi)\,d\xi$$

Смысл условия (6) — в том, что при данном колебании внешняя сила не производит работы; если же работа производится, то неоднородное уравнение не имеет решения.

Итак, если частота внешней силы совпадает с одной из собственных частот системы, то, вообще говоря, неоднородное уравнение (1) не имеет решения; оно имеет решение в частном случае, когда сила, действуя на собственное колебание, имеющее частоту внешней силы, не производит работы.

Что означает „нет решения"? Мы знаем, что это — случай резонанса. Физически интересен именно этот случай, а не тот, когда сила не производит работы. Подобный же вопрос встречается и в дискретных системах с несколькими степенями свободы. Только что доказанная теорема там тоже имеет место, но в другом, конечно, виде; вообще говоря, либо система однородных линейных дифференциальных уравнений имеет решение, либо система с правыми частями имеет решение (смотря по тому, равен или не равен нулю детерминант однородной системы).

Возьмем две степени свободы (рис. 108). При одном собственном (нормальном) колебании ток в первом контуре есть

$$i_{11}=a_1\cos\omega_1 t$$

и ток во втором контуре

$$i_{21}=a_2\cos\omega_1 t.$$

При другом собственном (нормальном) колебании ток в первом контуре

$$i_{12}=b_1\cos\omega_2 t,$$

а ток во втором контуре

$$i_{22}=b_2\cos\omega_2 t.$$

Отношения a_1/a_2 и b_1/b_2 заданы системой.

Если на такую систему действует внешняя сила частоты ω_1, то будет резонанс всегда, кроме случая, когда внешняя сила

„распределена“ так, что она „ортогональна“ к „собственной функции“, соответствующей частоте ω_1, т. е. выполнено условие

$$a_1\mathcal{E}_1 + a_2\mathcal{E}_2 = 0$$

ортогональности векторов (a_1, a_2) и $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$.

Физически решение всегда есть. Если имеет место совпадение частот, то даже в отсутствие сопротивления токи имеют в каждый момент времени какое-то значение. Физически, следовательно, надо сказать: мы искали *периодические* решения вида $z\cos\sqrt{\lambda}t$, но их не оказалось, т. е. в системе не будет *установившегося* состояния. Если бы мы приняли во внимание сопротивление, то интегральное уравнение было бы другое и установившееся состояние при резонансе было бы возможно.

Но в отсутствие сопротивления существуют возрастающие решения, которые также представляют интерес, так как практически процесс возрастания в системе без затухания в течение довольно долгого времени такой же, как при наличии не слишком большого затухания. Эти вопросы проще рассматривать с помощью дифференциальных, а не интегральных уравнений.

В случае *одной* степени свободы

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = A\cos\omega t$$

при $\omega \neq \omega_0$ имеется решение

$$y = a\cos\omega t, \tag{8}$$

где

$$a = \frac{A}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Если же $\omega = \omega_0$, то решения вида (8) не существует, но зато существует, как мы знаем[1], нарастающее решение вида

$$y = \frac{A}{2\omega_0} t\sin\omega_0 t.$$

Этой формулой можно пользоваться для исследования нарастания (в начале процесса) в системах с небольшим затуханием.

В случае распределенной системы можно поступать так же: или вводить затухание, или искать нарастающее решение. Здесь вопрос осложняется тем, что распределение силы $g(x)$ может быть

[1] [См. 16-ю лекцию части I.]

различное. Но оказывается, что вид процесса при всех возможных распределениях $g(x)$ — один и тот же.

Действительно, пусть $\lambda=\lambda_i$ и сила имеет вид

$$g(x)\cos\sqrt{\lambda_i}\,t.$$

Напишем:

$$g(x)=g(x)-b\psi_i(x)+b\psi_i(x)=\Phi(x)+b\psi_i(x)$$

и подберем постоянную b так, чтобы функция $\Phi(x)$ была ортогональна к $\psi_i(x)$:

$$\int_0^l \Phi(x)\,\psi_i(x)\,dx=\int_0^l g(x)\,\psi_i(x)\,dx-b\int_0^l \psi_i^2(x)\,dx=0,$$

или, так как функция ψ_i нормирована,

$$\int_0^l g(x)\,\psi_i(x)\,dx=b.$$

Таким образом, внешнюю силу всегда можно разбить на ортогональную часть и на неортогональный остаток; ортогональная часть не интересна, так как она нарастания не дает. Неортогональная часть есть собственная функция. Достаточно поэтому исследовать нарастание при действии внешней силы, имеющей распределение вида собственной функции данной частоты.

Таким образом, решения однородного уравнения существуют только при определенных значениях λ; для этих значений λ неоднородное уравнение, вообще говоря, не имеет решений, кроме тех случаев, когда $f(x)$ имеет специальный вид, такой, что выполнено условие (6), в котором ψ_k — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_k.

В нашем случае задачи типа Штурма—Лиувилля данному λ_k соответствует только одна собственная функция ψ_k. В задачах не-штурм-лиувиллевского типа данному λ_k может соответствовать несколько функций ψ_k. Тогда для того, чтобы существовало решение неоднородного уравнения, условие ортогональности (6) должно удовлетворяться функцией $f(x)$ для всех функций ψ_k, принадлежащих к данному λ_k.

Если $\lambda\neq\lambda_i$, то общее решение однородного уравнения имеет вид

$$z(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\gamma_i\psi_i(x)}{\lambda_i-\lambda}\,, \tag{9}$$

где

$$\gamma_i = \int_0^l f(\xi)\,\psi_i(\xi)\,d\xi. \tag{10}$$

Если, например, $\lambda = \lambda_1$ и собственному значению λ_1 соответствуют k собственных функций: $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$, и если условие ортогональности внешней силы ко всем собственным функциям $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ соблюдено, то решение имеет вид

$$z(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i \psi_i(x)}{\lambda_i - \lambda} + \sum_{\nu=1}^{k} b_\nu \psi_\nu(x).$$

Это решение неоднозначно, ибо все b_ν — произвольные величины. Физически это означает, что, кроме вынужденных колебаний, в системе останутся собственные, с произвольными амплитудами, так как внешняя сила к ним ортогональна и работы не производит.

Пусть λ очень мало по сравнению с наименьшим собственным значением, т. е. частота внешней силы гораздо меньше основной частоты системы:

$$\lambda \ll \lambda_i.$$

Тогда приближенно решение имеет вид

$$z(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_i \lambda}{\lambda_i} \psi_i(x).$$

Если λ/λ_i настолько мало, что можно пренебречь суммой, то $z(x) = f(x)$, или, если перейти к первоначальным функциям,

$$z_1(x) = \int_0^l V(x, \xi)\, g_1(\xi)\, d\xi,$$

где $z_1(x)$ амплитуда; $V(x, \xi)$ — функция Грина; $g_2(\xi)$ — приложенная сила. Следовательно,

$$y(x, t) = z_1(x) \cos\sqrt{\lambda}\, t = \frac{f(x)}{\sqrt{q(x)}} \cos\sqrt{\lambda}\, t.$$

Но

$$\int_0^l V(x, \xi)\, g_1(\xi)\, d\xi$$

есть статическое отклонение под действием постоянной силы $g_1(\xi)$; значит, система в этом случае следует за действием внешней силы.

Если λ подходит очень близко к значению λ_i, то соответствующий член в решении очень велик по сравнению с остальными и приближенно

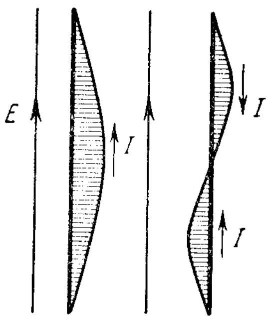

Рис. 186.

$$y(x, t)=\frac{\lambda\gamma_i}{\lambda_i-\lambda}\frac{\psi_i(x)}{\sqrt{q(x)}}\cos\sqrt{\lambda_i}t,$$

т. е. при подходе к резонансу с i-ым обертоном система колеблется, независимо от формы внешней силы, с распределением амплитуд, как угодно близким к распределению в случае собственного колебания $\psi_i(x)$. Это сильно упрощает дело. Но нельзя переносить эти первичные формы колебания на случай, когда λ не близко к λ_i; тогда форма колебания может быть совсем иной и меняется в зависимости от формы внешней силы. Последняя входит через величину γ_i, выражаемую формулой (10).

Будем и дальше считать, что $q(x)=1$, т. е. $\psi_i=\varphi_i$. Подставляя в (10) значение

$$f(\xi)=\int_0^l K(x, \xi)\,g(\xi)\,d\xi,$$

находим:

$$\gamma_i=\frac{1}{\lambda_i}\int_0^l g(\xi)\,\psi_i(\xi)\,d\xi.$$

Если λ близко к λ_i, то амплитуда колебания все же может быть невелика. Это будет, если γ_i мало, т. е. в том случае, когда распределение внешней силы близко к ортогональности по отношению к функции ψ_i. Таким образом, амплитуда колебания зависит не только от соотношения частот, но и от распределения внешней силы. Величина γ_i служит мерой для оценки ответа системы на возбуждение.

Пусть, например, антенна находится под действием однородной плоской волны (рис. 186). Тогда

$$g(x)=\text{const},\qquad \gamma_i=\frac{g}{\lambda_i}\int_0^l \psi_i(\xi)\,d\xi.$$

Антенна будет сильно отвечать на частоты, близкие к частотам основного тона, второго обертона и т. д. Нечетные обертоны возбуждаться не будут.

ШЕСТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(29/III 1932 г.)

Нарастание колебаний при резонансе. Случай, когда внешняя сила сосредоточена на малом участке. Рассмотрение того же случая с помощью дифференциального уравнения. Зависимость амплитуды от места возбуждения. Случай, когда задано движение в точке. Изменение числа узлов при повышении частоты внешней силы. Сравнительная оценка интегральных и дифференциальных уравнений. Интегральные уравнения колебаний стержня и мембраны. Приведение задачи теории потенциала к интегральным уравнениям.

Продолжим рассмотрение вынужденных колебаний. Как мы видели, когда λ (квадрат частоты внешней силы) точно равно одному из собственных значений λ_i, наша теория, не учитывающая затухания, не дает стационарного решения. В действительности, конечно, вследствие затухания стационарное решение существует и в этом случае. Чем меньше затухание, тем меньше те значения $|\lambda - \lambda_i|$, при которых теория без затухания еще дает хорошее приближение.

При достаточном отличии между λ и λ_i нет смысла вести расчеты с учетом затухания. Этого часто не понимают. Ведут расчеты с учетом затухания, что приводит к сложным и громоздким формулам. Но при λ, очень близком к λ_i, нельзя пренебрегать даже малым затуханием.

Естественно попытаться получить из теории без затухания все то, что она может дать и для случая, когда λ близко к λ_i. Оказывается, что нарастание колебаний в начальной стадии процесса происходит при наличии затухания почти так же, как если бы его не было. Нарастание колебаний легче всего исследовать, исходя из дифференциального уравнения

$$g(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial y}{\partial x}\right) = q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

где

$$g(x, t) = g(x) \cos \sqrt{\lambda_i} t. \qquad (2)$$