Антенна будет сильно отвечать на частоты, близкие к частотам основного тона, второго обертона и т. д. Нечетные обертоны возбуждаться не будут.

ШЕСТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(29/III 1932 г.)

Нарастание колебаний при резонансе. Случай, когда внешняя сила сосредоточена на малом участке. Рассмотрение того же случая с помощью дифференциального уравнения. Зависимость амплитуды от места возбуждения. Случай, когда задано движение в точке. Изменение числа узлов при повышении частоты внешней силы. Сравнительная оценка интегральных и дифференциальных уравнений. Интегральные уравнения колебаний стержня и мембраны. Приведение задачи теории потенциала к интегральным уравнениям.

Продолжим рассмотрение вынужденных колебаний. Как мы видели, когда λ (квадрат частоты внешней силы) точно равно одному из собственных значений λ_i, наша теория, не учитывающая затухания, не дает стационарного решения. В действительности, конечно, вследствие затухания стационарное решение существует и в этом случае. Чем меньше затухание, тем меньше те значения $|\lambda-\lambda_i|$, при которых теория без затухания еще дает хорошее приближение.

При достаточном отличии между λ и λ_i нет смысла вести расчеты с учетом затухания. Этого часто не понимают. Ведут расчеты с учетом затухания, что приводит к сложным и громоздким формулам. Но при λ, очень близком к λ_i, нельзя пренебрегать даже малым затуханием.

Естественно попытаться получить из теории без затухания все то, что она может дать и для случая, когда λ близко к λ_i. Оказывается, что нарастание колебаний в начальной стадии процесса происходит при наличии затухания почти так же, как если бы его не было. Нарастание колебаний легче всего исследовать, исходя из дифференциального уравнения

$$g(x, t)+\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial y}{\partial x}\right)=q\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где

$$g(x, t)=g(x)\cos\sqrt{\lambda_i}t. \tag{2}$$

Здесь λ_i — одно из собственных значений однородного уравнения.

Возьмем начальные условия

$$y = \dot{y} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{3}$$

Представим $g(x)$ в таком виде:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x),$$

где $g_1(x)$ ортогональна к $\varphi_i(x)$. Как мы знаем, нарастание дает только слагаемое $g_2(x)$.

Составляющие $g_2(x)$ различных функций $g(x)$ могут отличаться только на постоянный множитель. Действительно напишем:

$$g(x) = [g(x) - bq(x)\varphi_i(x)] + bq(x)\varphi_i(x).$$

Можно подобрать такое значение b, чтобы функция, стоящая в квадратных скобках, была ортогональна к $\varphi_i(x)$, т. е. чтобы имело место равенство

$$\int_0^l g\varphi_i dx - b\int_0^l q\varphi_i^2 dx = 0$$

(это уравнение разрешимо относительно b, так как вследствие $q(x) > 0$ второй интеграл не равен нулю). Таким образом, достаточно исследовать нарастание в случае

$$g = bq\varphi_i.$$

Решением, удовлетворяющим начальным условиям (3), является в этом случае

$$y(x, t) = \frac{b\varphi_i(x)}{\sqrt{\lambda_i}} t \sin \sqrt{\lambda_i} t,$$

что легко проверить подстановкой. Таким образом, пока не сказывается затухание, амплитуда растет пропорционально времени.

Разберем случай внешней силы, сосредоточенной на малом участке. Этот случай имеет место, например, при возбуждении антенны с помощью короткой катушки (связь предполагается настолько слабой, что можно пренебречь обратным действием антенны на возбуждающий контур). Будем считать, что

$$q(x) = 1.$$

Имеем:

$$\gamma_i = \int_0^l f(x)\psi_i(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_i}\int_0^l g(x)\psi_i(x)\,dx. \tag{4}$$

Но

$$f(x) = \int_0^l K(x, \xi)\,g(\xi)\,d\xi, \tag{5}$$

причем

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(\xi)}{\lambda_i}. \tag{6}$$

Следовательно,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)}{\lambda_i}\int_0^l g(\xi)\,\psi_i(\xi)\,d\xi,$$

и на основании (4) и выражения (9) предыдущей лекции решение уравнения (1) предыдущей лекции можно представить в таком виде:

$$z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)}{\lambda_i - \lambda}\int_0^l g(\xi)\,\psi_i(\xi)\,d\xi.$$

Сделаем предельный переход к силе, сосредоточенной в точке $x = a$. Будем считать, что длина участка, на котором $g(x)$ отлична от нуля, стремится к нулю, но вместе с тем плотность силы $g(x)$ на этом участке растет неограниченно, и притом так, что

$$\int_0^l g(\xi)\,d\xi = 1.$$

В пределе $g(x)$ превращается в функцию Дирака $\delta(x - a)$. При этом

$$z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(a)}{\lambda_i - \lambda}. \tag{7}$$

Прием, который мы применили, не имеет здесь математического обоснования. Сомнение в его законности может возникнуть на основании следующих соображений. Если участок, на котором $g(x) \neq 0$, очень мал, то для не слишком больших i можно приближенно считать $\psi_i(x) = \text{const}$ на этом участке. Но при достаточно большом i соответствующее $\psi_i(x)$ будет заметно осциллировать на протяжении сколь угодно малого заданного участка: число нулей функции $\psi_i(x)$ на любом заданном отрезке неограниченно растет с ростом i. Однако, основываясь на том, что билинейная форма (6) сходится равномерно, можно доказать, что ряд (7) является решением задачи о вынужденных колебаниях в предельном случае силы, сосредоточенной в точке.

Если $\lambda \ll \lambda_i$, то

$$z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(a)}{\lambda_i} = K(x, a),$$

и мы опять получаем статический случай. Можно сказать, что выражение (7) есть обобщение билинейной формы (6) на случай когда сила является гармонической.

Если сила приложена к точке $x = a$, колебание в точке $x = b$ выражается формулой

$$z(b) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(b)\,\psi_i(a)}{\lambda_i - \lambda}.$$

Из нее следует для рассматриваемого случая теорема взаимности: если электродвижущая сила приложена к точке b, то ток в точке a — такой же, каким был бы ток в точке b, если бы сила была приложена к точке a. Таким образом, теорема взаимности, полученная ранее[1] для статического случая, обобщена нами на случай вынужденных колебаний.

Из формулы (7) следует, что если λ близко к λ_i, форма (пространственное распределение) вынужденного колебания близка к форме i-го собственного колебания. Где бы ни была приложена сила частоты $\sqrt{\lambda_i}$, узлы i-го собственного колебания не раскачиваются. Поэтому согласно теореме взаимности, если сила частоты $\sqrt{\lambda_i}$ приложена к узлу i-го колебания, это колебание не возбудится.

Рассмотрение вынужденных колебаний с помощью интегральных уравнений приводит к решению в виде ряда. Это иногда удобно, но недостаточно наглядно. Иногда желательно получить решение в замкнутом виде. Покажем, что дифференциальное уравнение приводит к решению такого вида.

[1] [См. 26-ю лекцию части I.]

Рассмотрим однородную систему. Пусть э. д. с. приложена к точке $x=a$. Всюду, кроме точки a, выполняются уравнения

$$\frac{\partial I}{\partial x}=-C\frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{L}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t},$$

где C и L — емкость и индуктивность на единицу длины. В точке $x=a$ потенциал имеет скачок, так что

$$\frac{1}{C}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{a-0}=-\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{a-0}, \quad \frac{1}{C}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{a+0}=-\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{a+0},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{C}\left\{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{a-0}-\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{a+0}\right\}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(V_{a-0}-V_{a+0}\right).$$

Пусть э. д. с. в точке $x=a$ равна $\sin\omega t$. Тогда

$$V_{a+0}-V_{a-0}=\sin\omega t,$$

а значит,

$$\frac{1}{\omega C}\left\{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{a-0}-\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{a+0}\right\}=\cos\omega t. \tag{8}$$

Ток I всюду непрерывен, так как сосредоточенных емкостей нет.

Краевым условиям задачи $I(0)=I(l)=0$ удовлетворяют решения вида:

$$\varphi_1(x, t)=A\sin\frac{\omega x}{c}\cos\omega t \quad \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant a; \tag{9}$$

$$\varphi_2(x, t)=B\sin\frac{\omega(l-x)}{c}\cos\omega t \quad \text{при} \quad a\leqslant x\leqslant l. \tag{10}$$

Постоянные A и B нужно подобрать так, чтобы удовлетворить условию

$$\varphi_1(a)=\varphi_2(a), \tag{11}$$

являющемуся следствием непрерывности тока, и условию (8) для скачка производной $\partial I/\partial x$. Подставив (9) и (10) в (11) и (8), получаем для A и B следующие уравнения:

$$A\sin\frac{\omega a}{c}-B\sin\frac{\omega(l-a)}{c}=0;$$

$$A\cos\frac{\omega a}{c}+B\cos\frac{\omega(l-a)}{c}=cC.$$

Решая их, получаем:

$$A = cC\frac{\sin\frac{\omega(l-a)}{c}}{\sin\frac{\omega l}{c}}, \quad B = cC\frac{\sin\frac{\omega a}{c}}{\sin\frac{\omega l}{c}}. \tag{12}$$

Наконец, подставляя (12) в (9) и (10), получаем решение нашей задачи в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} I(x,t) &= cC\frac{\sin\frac{\omega(l-a)}{c}}{\sin\frac{\omega l}{c}}\sin\frac{\omega x}{c}\cos\omega t \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant a;\\ I(x,t) &= cC\frac{\sin\frac{\omega a}{c}}{\sin\frac{\omega l}{c}}\sin\frac{\omega(l-x)}{c}\cos\omega t \quad \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant l. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Внешне формулы (13) выглядят сложнее, чем (7), где

$$\psi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{i\pi x}{l},$$

но толкование решения (13) проще. Конечно, оба решения тождественны.

Только что примененный нами метод дает решение в замкнутом виде также при учете затухания, но решение с учетом затухания является более сложным.

Вынужденное колебание, возбуждаемое гармонической силой, действующей в одной точке, выражается формулой

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\psi_i(x)\,\psi_i(a)}{\lambda_i-\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,t+\varepsilon). \tag{14}$$

Если λ мало по сравнению со всеми λ_i, имеем приближенно:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\psi_i(x)\,\psi_i(a)}{\lambda_i}\cos(\sqrt{\lambda}t+\varepsilon),$$

— в каждый данный момент имеет место статическое отклонение, причем оно периодически меняется с частотой внешней силы. Если λ близка к одному из λ_i, то соответствующий член является преобладающим, и можно писать приближенно:

$$y(x,t) \simeq \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(a)}{\lambda_i-\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,t+\varepsilon).$$

Вообще говоря, колебание (14) не совпадает по форме ни с одним из собственных колебаний, и при вынужденных колебаниях не имеет смысла говорить, что система колеблется в полволны и т. д. Но при подходе к резонансу форма вынужденного колебания приближается к форме соответствующего собственного колебания.

Здесь интересно отметить еще одно обстоятельство. Амплитуда вынужденного колебания зависит от того, где приложена сила. При одной и той же величине силы амплитуда вынужденного колебания тем больше, чем больше значение $\psi_i(x)$ в точке приложения силы $x=a$. Колебание будет наиболее интенсивным, если сила приложена в пучности соответствующего колебания. Если сила приложена в узле, т. е. так, что $\psi_i(a)=0$, колебание не возбуждается вовсе. Это — частный случай силы, ортогональной к собственной функции $\psi_i(x)$. В самом деле, если $g(x)\neq 0$ только в такой точке x, где $\psi_i(x)=0$, то

$$\int_0^l g\psi_i dx=0.$$

Если желательно возбудить антенну в третьем обертоне, то возбуждающую катушку можно поместить на расстоянии $l/6$ от конца. Но на практике часто дело обстоит не так просто. Получаются две связанные системы и вместо частоты $\sqrt{\lambda_i}$ получаются *две* частоты; отличие между ними тем больше, чем сильнее связь. Обычно считают, что ослабить связь — это значит уменьшить коэффициент взаимной индукции M. Между тем „действительная связь“ [1] зависит не только от величины M, но и от того, *где* она осуществляется (например, в узле или пучности соответствующего колебания). „Действительная связь“ тем сильнее, чем ближе к пучности расположена возбуждающая катушка.

В общем случае разложение (14) часто оказывается недостаточно наглядным. Выше мы получили то же самое решение, но в замкнутом виде (13). С помощью этого решения можно проследить за видом колебания, не суммируя ряд, что очень неприятно. Если мы разложим (13) в ряд, мы получим (14), и наоборот, суммирование ряда (14) приводит к формулам (13).

Мы рассмотрели случай, когда задана *сила*, действующая в определенной точке. Возможна другая постановка задачи: задано

[1] [„Связанность“, см. 25-ю лекцию части I.]

движение одной из точек распределенной системы. Например, одна из точек струны прикреплена к ножке камертона, совершающего заданные колебания. Если решать задачу об антенне, возбуждаемой в точке, исходя не из тока, а из напряжения, мы тоже получим случай, когда задано *движение* в точке, а не сила.

Здесь интересно следующее. Будем возбуждать струну близко к резонансу. Если задана амплитуда колебания в точке, то наиболее выгодный выбор этой точки противоположен тому, какой был в случае заданной силы. Наиболее сильное возбуждение будет, если данное колебание создается в узле, наиболее слабое — если оно задается в пучности. Физически это вполне понятно. Вблизи резонанса форма колебания близка к форме собственного колебания; поэтому при амплитуде, заданной в узле, колебание в пучности будет гораздо больше, чем если та же амплитуда задана в самой пучности.

О форме колебания многое можно сказать без вычислений. Пусть задан период силы. Форма колебания, вообще говоря, не похожа ни на одно из собственных колебаний, но есть очень изящные приемы, позволяющие решить, будут ли узлы и сколько их будет.

Пусть, например, на струну действует в некоторой точке гармоническая сила, частота которой меньше основной собственной частоты. В этом случае на струне не может быть узла ни слева, ни справа от точки приложения силы (кроме закрепленных концов струны). Это доказывается следующим образом. Пусть сила приложена в точке A. Предположим, что в точке B возникает узел. Закрепим точку B. Отрезок OB будет продолжать колебаться с частотой ω внешней силы, т. е. эта частота является одной из собственных частот струны OB. Но ни одна из собственных частот струны OB не может быть ниже основной частоты *всей* струны и, следовательно, не может быть меньше ω. Мы пришли к противоречию (всякое укорочение струны ведет, как мы видели, к повышению всех собственных частот). Наше утверждение, таким образом, доказано.

Далее можно показать, что если частота внешней силы переходит, повышаясь, через основную частоту участка OB, то на этом участке появляется один узел.

Можно сделать ряд высказываний о расположении узлов в общем случае. Это имеет большое практическое значение в случае антенны, так как на соседних участках, разделенных узлами тока, токи текут в противоположных направлениях, а это существенно для излучения.

Вернемся к общей оценке интегральных уравнений. Какой смысл имело введение этого математического аппарата?

Первое преимущество заключается в следующем. Дифференциальное уравнение вовсе не приурочено к данной задаче. Физическая задача — это задача, скажем, о стержне такой-то длины, с такими-то граничными условиями. Для того, чтобы ее охватить, нужно дифференциальное уравнение плюс граничные условия. Интегральное уравнение содержит в себе всю задачу. Оно имеет совсем другой охват, чем дифференциальное уравнение.

Перейдем ко второму преимуществу интегральных уравнений. Возьмем, например, поперечные колебания стержня. Они подчиняются дифференциальному уравнению

$$p\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+q\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0,$$

совершенно отличному от уравнения продольных колебаний стержня. Кроме того, здесь возможно большее разнообразие краевых условий. Концы могут быть свободны, или заделаны, или могут находиться на опоре. Здесь должны быть заданы *четыре* граничных условия: по *два* для каждого конца. Например, для свободного конца граничные условия таковы:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=0.$$

Таким образом, здесь весь тип задачи существенно отличен от соответствующей задачи для продольных колебаний.

Но интегральное уравнение поперечных колебаний стержня, составленное для функции $\varphi(x)$, описывающей распределение амплитуды

$$y=\varphi(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t$$

имеет вид

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^l G(x,\xi)\,q(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{15}$$

т. е. такой же вид, как для продольных колебаний. Отличие между обеими задачами заключено в функции Грина $G(x, \xi)$. Для поперечных колебаний стержня

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x(\xi - l)(x^2 + \xi^2 - 2l\xi)}{6lp} & \text{при } x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\xi(x - l)(\xi^2 + x^2 - 2lx)}{6lp} & \text{при } x \geqslant \xi. \end{cases}$$

Мы видим, какой большой охват имеет интегральное уравнение вида (15).

Перейдем к двухмерным задачам. Дифференциальное уравнение колебаний мембраны имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\,\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\,\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q(x, y)\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,.$$

Если подставить в него

$$z = \varphi(x, y)\cos\sqrt{\lambda}\;t,$$

то мы получим для φ уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = -\lambda q\varphi.$$

Здесь и для амплитуды φ получается уравнение в частных производных. Математическая задача имеет совсем другой вид, чем для одномерной системы.

Интегральное уравнение задачи имеет вид

$$\varphi(x, y) = \lambda \iint G(x, y, \xi, \eta)\,\varphi(\xi, \eta)\,d\xi d\eta.$$

Интеграл здесь — двойной; функция Грина есть функция четырех переменных; но главные свойства интегральных уравнений не зависят от того, является ли интеграл простым, двойным, тройным и т. д. При любой кратности интеграла сохраняются одна и та же методика, одни и те же теоремы.

В случае мембраны разнообразие краевых условий гораздо больше, чем в случае одномерной системы, так как край мембраны может иметь произвольную форму и различного рода закрепление.

Мы видим, что физически близкие вопросы приводят к интегральным уравнениям аналогичного типа.

Третье преимущество интегральных уравнений заключается в том, что с их помощью ряд общих теорем (например, о разложимости по собственным функциям) доказывается проще и элементарнее, чем с помощью дифференциальных уравнений. Но как бы ни были хороши интегральные уравнения для решения общих вопросов, они мало пригодны для конкретных вычислений. Так обстоит дело в настоящее время, и вряд ли это положение изменится.

Существуют способы вычисления собственных значений и собственных функций путем последовательных приближений, причем за исходное приближение — и в этом вся соль — можно взять произвольную функцию. После третьего шага (вся работа занимает довольно короткое время) получается собственное значение с точностью порядка 1/1000. Я не могу сказать, насколько это не случайно.

К интегральным уравнениям приводит и ряд задач, относящихся к теории потенциала. Здесь имеются четыре основные задачи: внутренняя и внешняя задача Дирихле, внутренняя и внешняя задача Неймана. Возьмем в качестве примера внутреннюю задачу Дирихле.

В тех точках, где нет масс, потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{16}$$

Пусть внутри замкнутой поверхности S нет масс. Можно показать, что в этом случае распределение потенциала на поверхности S однозначно определяет потенциал во всех точках, находящихся внутри этой поверхности.

Доказательство однозначности строится так. Разность двух функций, принимающих в каждой точке поверхности S одни и те же заданные значения, равна нулю на этой поверхности; если функция равна нулю на поверхности S и внутри поверхности удовлетворяет уравнению (16), то она равна нулю всюду внутри S. Последнее следует из того, что линии потенциального вектора $\operatorname{grad}\varphi$ не могут быть замкнутыми, поэтому если нет источников (т. е. масс), то не может быть и поля.

Сформулируем теперь задачу Дирихле.

Пусть задано *произвольное* распределение потенциала φ на поверхности S. Существует ли непрерывная функция φ, удовлетворяющая внутри S уравнению Лапласа и принимающая на поверхности S заданные значения? Если такая функция существует, то согласно тому, что было уже сказано, эта функция — единственная. Такова внутренняя задача Дирихле. [Внешняя задача получается, если мы зададимся функцией φ на поверхности S и будем искать функцию, удовлетворяющую уравнению (15) вне S и достаточно быстро стремящуюся к нулю в бесконечности].

Напишем формулу

$$\varphi_P = \oint\limits_S u_{P'} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS, \tag{17}$$

где P — точка внутри S; P' — точка, принадлежащая S (рис. 187); u — некоторая вспомогательная функция. Формула (17) есть выражение для потенциала двойного слоя. Определяемая ею функция φ_P обладает замечательным свойством. Всюду внутри S она удовлетворяет уравнению Лапласа, а при подходе к самой поверхности стремится к некоторому пределу φ_i.

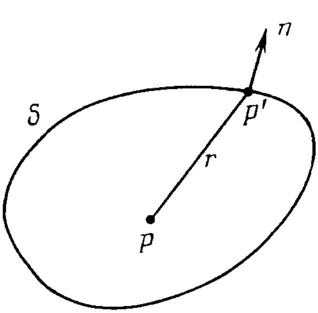

Рис. 187.

Если же мы сначала возьмем точку P на самой поверхности, то значение φ_P на поверхности связано с φ_i равенством:

$$\varphi_i = \varphi_P - 2\pi u_P.$$

(При переходе изнутри наружу 2π нужно заменить на 4π.) Если

$$\varphi_i = f(P),$$

то всюду на поверхности

$$\oint\limits_S u_{P'} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds - 2\pi u_P = f(P). \tag{18}$$

Здесь u_P — неизвестная функция. Если удастся подобрать функцию u, удовлетворяющую уравнению (18), то она будет удовлетворять всем поставленным условиям: она будет решением нашей задачи.

Уравнение (18) есть неоднородное интегральное уравнение. Обычно перед интегралом мы пишем параметр λ. Вопрос сводится к тому, имеет ли интегральное уравнение

$$u_P = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_S u_{P'} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds - f(P) \tag{19}$$

решение при $\lambda = 1/2\pi$ и произвольной $f(P)$. Если да, то наша задача имеет решение.

Ядро нашего интегрального уравнения несимметрично.

Из теории интегральных уравнений известна следующая альтернатива. Если для данного значения параметра λ однородное уравнение, получающееся из (19) при $f(P) = 0$, не имеет (нетривиального) решения, то неоднородное уравнение (19) заведомо имеет решение. (В случае колебательных задач это означало, что если частота внешней силы не совпадает с собственной, то нет резонанса.)

Но мы знаем, что если потенциал на поверхности S равен нулю, то внутри S он тоже равен нулю. Это значит, что если

$$f(P) = 0,$$

то уравнение (19) имеет только тривиальное решение. Но отсюда следует, что неоднородное уравнение имеет решение при любом λ. Следовательно, задача Дирихле всегда имеет решение.

Таким образом, та же теорема, которая говорит о том, что в системе без трения при резонансе нет установившегося колебания, привела нас к решению задачи Дирихле. На этом примере видно, как ценен математический аппарат интегральных уравнений, хотя для чисто вычислительных целей он вряд ли может служить рабочим аппаратом.