

Обозначим через  $x_s^{(k)}$  и  $y_s^{(j)}$  смещения  $k$ -ой и  $j$ -ой точки при определенном  $s$ . Тогда

$$x_s^{(k)} = a_s \sin \frac{ks\pi}{2n+1} \cos(\omega_s t + \varphi_s),$$

$$y_s^{(j)} = b_s \sin \frac{js\pi}{2n+1} \cos(\omega_s t + \varphi_s).$$

Для каждого  $s$  имеется две частоты  $\omega_{s1}$  и  $\omega_{s2}$  и соответственно два значения отношения  $b/a$ . Для того, чтобы найти эти значения, нужно решить систему уравнений (21) при  $\omega = \omega_{s1}$  и  $\omega = \omega_{s2}$ . Для амплитуд имеем:

$$A_s^{(k)} = a_s \sin \frac{ks\pi}{2n+1}, \quad B_s^{(j)} = b_s \sin \frac{js\pi}{2n+1}.$$

Рассматриваемые колебания продольны, но представим себе, что мы отложили смещения, как ординаты, против точек, где расположены массы. Для данного  $s$  все массы каждого сорта располагаются в любой момент времени по синусоиде. Длина волны синусоиды определяется числом  $s$ . Например, для  $s=1$  на цепочке укладывается полволны.

В случае континуума точки также располагаются по синусоидам. Но между полученной здесь картиной и тем, что дает „непрерывная“ теория, есть принципиальная разница. В случае континуума каждой длине волны соответствует одна частота. В нашей дискретной системе для каждого  $s$ , для каждой длины волны имеется два нормальных колебания — две частоты и два распределения амплитуд. Это — замечательное обстоятельство.

## ТРИДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(6/V 1931 г.)

*Одномерная модель кристалла, состоящего из двух сортов атомов (продолжение). Подробное исследование типов колебаний и строения спектра. Акустические и внутримолекулярные колебания. Принципиальное отличие от теории, не учитывающей атомистическую структуру. Переход к случаю, когда все атомы имеют одинаковую массу. Задача об электрических фильтрах.*

В прошлой лекции мы начали разбирать одномерную модель кристаллической решетки, состоящей из чередующихся частиц (атомов) двух сортов. Конечно, реальная решетка — трехмерна, но основные, характерные черты можно увидеть и на одномерной

решетке. (Аналогичная задача — поперечные колебания струны с грузами, рис. 120.)

Мы написали для каждого сорта частиц по уравнению — представителю:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}^{(k)} + \alpha(2x^{(k)} - y^{(k+1)} - y^{(k-1)}) &= 0 \quad (k=1, 3, \dots, 2n-1), \\ M\ddot{y}^{(j)} + \alpha(2y^{(j)} - x^{(j+1)} - x^{(j-1)}) &= 0 \quad (j=0, 2, 4, \dots, 2n), \end{aligned} \right\} (1)$$

всего  $2n+2$  уравнений (по числу частиц).

Уравнения (1) имеют один и тот же вид для каждого атома каждого сорта, за исключением первого и последнего уравнений, в которых отсутствуют соответственно члены  $y^{(k-1)}$  и  $x^{(j+1)}$ .

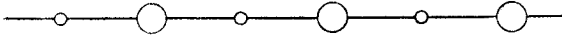


Рис. 120.

Аналогично тому, как это всегда делается при рассмотрении сплошных сред, мы вводим краевые или граничные условия. Для этого мы добавляем две новые координаты  $y^{(0)}$  и  $x^{(2n+1)}$ . Тогда для  $x^{(1)}$  и  $y^{(2n)}$  получаются такие же уравнения, что для остальных  $x^{(k)}$  и  $y^{(j)}$ , но мы требуем дополнительно — и в этом состоят краевые условия, — чтобы было

$$y^{(0)} = 0, \quad x^{(2n+1)} = 0. \quad (2)$$

Итак, мы добились того, что все уравнения (1) для  $k=1, 3, \dots, 2n-1$ , а также для  $j=0, 2, 4, \dots, 2n$  тождественны, но зато ввели краевые условия.

Мы взяли специальный случай, когда концы (крайние частицы слева и справа) закреплены. Закрепить концы реального кристалла не так просто. Физический смысл закрепленных концов — заделка концов кристалла в иную, намного более жесткую среду. Можно было бы взять другие специальные случаи граничных условий, например случай свободных концов. Можно считать приближенно, что концы свободны, если кристалл намного жестче, чем ограничивающая его среда.

Необходимо заметить, что главные интересующие нас здесь свойства колебаний кристаллической решетки *не зависят* от граничных условий.

Решение задачи (1), (2) лобовым методом, приводящее к секулярному уравнению  $2n$ -го порядка, очень громоздко. Мы применили особый прием, сделав для амплитуд  $A^{(k)}$  и  $B^{(j)}$  координат  $x^{(k)}$  и  $y^{(j)}$  подстановку

$$A^{(k)} = a \sin k\beta, \quad B^{(j)} = b \sin j\beta, \quad (3)$$

и получили для  $a$ ,  $b$  и  $\omega$  уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (2\alpha - m\omega^2)a - 2\alpha \cos \beta \cdot b &= 0; \\ -2\alpha \cos \beta \cdot a + (2\alpha - M\omega^2)b &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Если мы найдем такие  $a$ ,  $b$  и  $\omega$ , которые удовлетворяют этим двум уравнениям, то подстановка (3) удовлетворит всем  $2n$  уравнениям (1) при любом  $\beta$ . Остается удовлетворить граничным условиям (2).

Мы могли бы заменить в (3) синусы на косинусы. Это также привело бы к решению уравнений (1), но не позволило бы удовлетворить граничным условиям. Тем, что мы взяли синусы, мы уже удовлетворили первому граничному условию. Для того, чтобы удовлетворить второму, нужно взять для  $\beta$  одно из значений

$$\beta = \frac{s\pi}{2n+1} \quad (s=1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Для каждого  $s$  имеется два значения  $\omega_s$ , определяемые уравнениями (4). Обозначим меньшее из этих значений через  $\omega_{s1}$ , большее — через  $\omega_{s2}$ . Для того, чтобы решить задачу до конца, нужно для каждого  $s$  вычислить  $\omega_{s1}$  и  $\omega_{s2}$ , а затем найти из (4) соответствующие им значения отношения  $a/b$ . Но основное свойство этого отношения можно вывести, не проводя вычисления частот  $\omega_{s1}$  и  $\omega_{s2}$ . Это свойство состоит в том, что отношение  $a/b$  положительно для  $\omega = \omega_{s1}$  и отрицательно для  $\omega = \omega_{s2}$ . Действительно, из уравнений (4) имеем:

$$\frac{a}{b} = \frac{2\alpha \cos \beta}{2\alpha - m\omega^2}. \quad (6)$$

Уравнения (4) имеют такой же вид, как уравнения системы с двумя степенями свободы, причем величины

$$n_1 = \sqrt{\frac{2\alpha}{M}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \quad (7)$$

играют роль парциальных частот (для любого  $s$ ). Следовательно, если  $M \neq m$ , то<sup>1</sup>

$$\omega_{s1}^2 < n_1^2 < n_2^2 < \omega_{s2}^2.$$

Перепишем (6) в таком виде:

$$\frac{a}{b} = \frac{2\alpha}{m} \frac{\cos \beta}{n_2^2 - \omega^2}. \quad (9)$$

Подставляя в (9)  $\omega = \omega_{s1}$  и  $\omega = \omega_{s2}$ , принимая во внимание неравенства (8), а также то, что согласно (5)  $\cos \beta_s > 0$ , получаем:

$$\frac{a_{s1}}{b_{s1}} > 0, \quad \frac{a_{s2}}{b_{s2}} < 0.$$

Таким образом, колебания с частотой  $\omega_{s1}$  происходят так, что все массы — и большие и малые — смещаются одновременно в *одну*

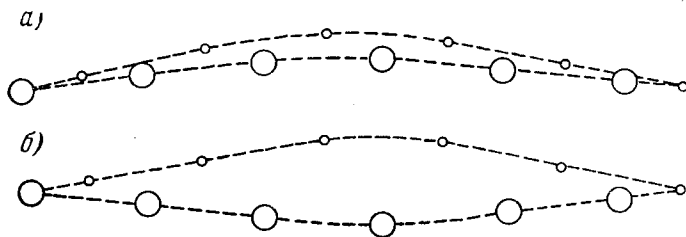


Рис. 121.

сторону, а колебания с частотой  $\omega_{s2}$  — так, что одновременно смещения больших и малых масс направлены в *разные* стороны.

Для того, чтобы наглядно себе представить картину колебания всей цепочки, отложим амплитуды по оси ординат. Для  $a_{s1}$  и  $b_{s1}$  мы получим синусоиды, обращенные всюду в одну и ту же сторону (например, для  $s=1$  — рис. 121, а). Для  $a_{s2}$  и  $b_{s2}$  мы получим синусоиды, обращенные всюду в противоположные стороны (для  $s=1$  — рис. 121, б).

Расстояние между частицами, совершающими одинаковое движение, мы будем называть длиной волны (оно и соответствует тому, что принято называть длиной волны). Мы можем теперь сказать, что каждой длине волны соответствуют два типа колебаний.

При колебаниях *первого* типа (частота  $\omega_{s1}$ ) синусоиды, изображающие колебания частиц обоих сортов, колеблются синфазно.

<sup>1</sup> [См. 23-ю лекцию.]

При этом частицы одного сорта колеблются немного слабее, частицы другого сорта — немного сильнее. В случае колебаний *второго* типа (частота  $\omega_{s2}$ ) обе синусоиды колеблются в противофазе.

Не следует забывать, что в действительности колебания продольны. Полученная картина означает следующее.

Колебания  $\omega_{s1}$ . Здесь смещения соседних частиц происходят в одном и том же направлении. При этом меняется количество частиц на единицу длины, т. е. макроскопическая плотность. Таким образом, колебания с частотами  $\omega_{s1}$  — это *обычные акустические колебания*.

Колебания  $\omega_{s2}$ . Смещения соседних частиц происходят в противоположных направлениях. При этом типе колебаний *нет* заметного макроскопического изменения плотности. Это — *внутримолекулярные колебания*.

Перейдем к вычислению частот (напомним, что в вопросе о теплоемкости после того, как пришлось отказаться от равномерного распределения энергии по степеням свободы, стало важно знать частоты колебаний кристаллической решетки).

Для того, чтобы найти  $\omega_{s1}$  и  $\omega_{s2}$  для определенного  $s$ , надо решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 2\alpha - m\omega^2 & -2\alpha \cos \beta_s \\ -2\alpha \cos \beta_s & 2\alpha - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$Mm\omega^4 - 2\alpha(M+m)\omega^2 + 4\alpha^2 \sin^2 \beta_s = 0,$$

т. е. квадратное уравнение для  $\omega^2$ , напоминающее секулярное уравнение для линейной консервативной системы с двумя степенями свободы. Решая это уравнение, находим:

$$\omega_s^2 = \alpha \frac{M+m \pm \sqrt{(M+m)^2 - 4Mm \sin^2 \beta_s}}{Mm} \quad (s=1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

(такое простое выражение для частоты получается лишь в случае одномерной решетки. В случае пространственной решетки вычисление частот гораздо сложнее).

Кристалл имеет огромное число частот — порядка  $10^{23}$ . Фактически нам нужно знать не каждую частоту в отдельности, а закономерности в *распределении* частот. Набор частот принято называть спектром. Нам нужно выяснить, каков *спектр* нашей одномерной цепочки. Для этой цели мы найдем более простое

выражение, воспользовавшись тем, что  $n$  — очень большое число.

Из формулы (10) видно, что с увеличением  $s$  бóльшая частота  $\omega_{s2}$  уменьшается, а меньшая частота  $\omega_{s1}$  увеличивается. Таким образом,  $s=1$  дает самую низкую и самую высокую частоту,  $s=2$  дает две более близкие частоты и т. д.

Рассмотрим очень длинные волны, т. е. очень малые  $s$ . Для малых  $s$  величины  $\beta_s$ , а следовательно, и  $\sin \beta_s$ , очень малы. Здесь приближенно

$$\sqrt{(M+m)^2 - 4Mm \sin^2 \beta_s} \approx (M+m) \left[ 1 - \frac{2Mm}{(M+m)^2} \sin^2 \beta_s \right]. \quad (11)$$

Не трудно видеть, что то же приближение справедливо для любых  $\beta_s$ , если  $m$  мало по сравнению с  $M$  (в случае очень длинных волн, т. е. достаточно малых  $s$  и  $\beta_s$ , выражение (11) приближенно справедливо для любых  $M$  и  $m$ ).

Напишем, используя (11), приближенные выражения для частот. Для второй частоты мы можем в первом приближении отбросить второй член формулы (11). Это приближение годится для длинных волн, а также для любых волн при большой разности масс. Мы получаем на основании (10):

$$\omega_{s1}^2 = \frac{2\alpha \sin^2 \beta_s}{M+m}, \quad \omega_{s2}^2 = \frac{2\alpha (M+m)}{Mm}. \quad (12)$$

Самое существенное в излагаемой теории заключается в том, что при одной и той же длине волны мы имеем две частоты, которые для  $M \gg m$  сильно отличаются друг от друга. Колебание с малой частотой — акустическое колебание. Колебание с большой частотой — внутримолекулярное колебание. Это разделение колебаний на два типа специфично для дискретной решетки и совершенно чуждо сплошной системе (вполне понятно, что в сплошной системе нет внутримолекулярных колебаний).

Спектр частот нашей дискретной решетки состоит из двух ветвей: ветви низких частот, которую называют *акустическим* или *дебаевским* спектром, и ветви высоких частот, которую называют *оптическим* (инфракрасным) или *борновским* спектром.

Рассмотрим теперь самые короткие волны, для которых  $s$  близко к  $n$ . Для них из точной формулы (10) имеем с очень хорошим приближением:

$$\omega_{n1}^2 = \frac{2\alpha}{M}, \quad \omega_{n2}^2 = \frac{2\alpha}{m}. \quad (13)$$

Действительно, при большом  $n$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{2n+1} \approx \frac{\pi}{2},$$

откуда  $\sin^2 \beta_n = 1$ , и, следовательно,

$$\sqrt{(M+m)^2 - 4Mm \sin^2 \beta_n} = M - m.$$

Подставляя это значение в (10), получаем (13).

Нарисуем диаграмму распределения частот, расположив их в порядке возрастания их величины, т. е. введя надлежащую новую нумерацию частот (рис. 122).

Если масштаб выдержан ( $n$  очень велико, порядка  $10^{24}$ ), то первые частоты ( $\omega_{s1}$  для малых  $s$ ) очень малы, так как очень малы величины  $\sin \frac{s\pi}{2n+1}$ , и практически кривая начинается с нуля. Так как для достаточно малых  $s$  с хорошим приближением

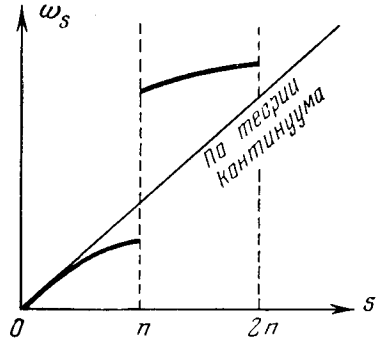


Рис. 122.

$$\omega_{s1} = \sqrt{\frac{2\alpha}{M+m}} \frac{s\pi}{2n+1} = \alpha s \quad (14)$$

( $\alpha$  — постоянная), то вначале кривая не отличима от прямой. Если  $M \gg m$ , то приближенно

$$\omega_{12} - \omega_{n2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \cdot \frac{m}{M},$$

и вся вторая половина диаграммы лежит в узкой полоске, параллельной оси абсцисс.

То, что при  $M \gg m$  в цепочке из двух сортов масс все частоты борновского спектра приблизительно одинаковы, легко видеть и непосредственно. При  $M \gg m$  в дебаевском спектре большие массы колеблются и увлекают малые, а в борновском спектре большие массы почти покоятся. Здесь можно считать (приближенно), что  $n$  частиц колеблются независимо и, следовательно, с равными частотами. Аналогичное рассмотрение применимо в случае, когда ячейки состоят из трех частиц, одна из которых обладает гораздо большей массой, чем две другие.

Таким образом, спектр состоит из двух ветвей, не соприкасающихся между собой, если  $M \neq m$ . Одна ветвь начинается практически с нуля. Другая ветвь, соответствующая более высоким частотам, не является простым продолжением первой. Наличие этих двух ветвей — это то основное и замечательное, что характерно для дискретной теории.

Посмотрим теперь:

1) дает ли дискретная теория те результаты, которые правильно отображает теория сплошных сред;

2) что в дискретной теории чуждо обычной теории сплошных сред.

Для макроскопических свойств — модуля Юнга (коэффициента упругости)  $E$  и плотности  $\rho$  — имеем<sup>1</sup>:

$$E = \alpha d, \quad \rho = \frac{M + m}{2d},$$

откуда

$$\frac{E}{\rho} = \frac{2\alpha d^2}{M + m}. \quad (15)$$

Теория сплошных сред утверждает, что звуковые (упругие) колебания распространяются в стержне со скоростью

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (16)$$

Вдоль стержня укладывается целое число полуволен, т. е.

$$s \frac{\lambda_s}{2} = l,$$

причем

$$\omega_s = \frac{2\pi v}{\lambda_s}.$$

Принимая во внимание (16), получаем:

$$\omega_s = \frac{s\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

С другой стороны, формула (14), полученная из дискретной теории, в сочетании с формулой (15) для перехода от микроскопического рассмотрения к макроскопическому для низких частот дает:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{2\alpha}{M + m}} \cdot \frac{s\pi}{2n + 1} = \sqrt{\frac{2\alpha d^2}{M + m}} \frac{s\pi}{l} = \frac{s\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

<sup>1</sup> [См. 29-ю лекцию.]



Таким образом, значения начальных частот дебаевского спектра, получающиеся из дискретной теории, совпадают с теми, какие известны из теории континуума. Но *продолжение* акустического спектра, даваемое теорией континуума, неправильно. Теория континуума дает прямую, которая идет выше, чем нужно (рис. 122).

Итак, акустическая ветвь спектра, даваемого дискретной теорией, практически (до определенного числа  $s$ ) совпадает с тем, что дает „сплошная“ теория. Не удивительно, что во всех акустических вопросах ( $\lambda$  значительно больше  $d$ ) для кристаллической решетки оказывается справедливым обычное континуальное рассмотрение. Но для более частых колебаний теория континуума приводит к неправильному результату.

В борновском спектре имеется предельная частота, определяемая второй формулой (12). Она не зависит от длины стержня. Можно доказать, что она не зависит также от способа закрепления концов. Таким образом, существует некоторая предельная частота, к которой близки частоты очень большого числа колебаний, характеризующая свойства самой решетки. В первом приближении, если  $M \gg m$ , можно считать, что все частоты борновского спектра одинаковы и равны предельной частоте.

Вспомним, что Дебай, для того чтобы получить спектр дискретной решетки, оборвал спектр континуума на  $s = 2n$ . Мы видим теперь, что это неверно: частоты решетки не совпадают с частотами континуума. Отличие не очень велико в тех случаях, которые были количественно просчитаны Дебаем (массы  $M$  и  $m$  близки между собой), и поэтому он получил хороший результат. Но если бы Дебай взял случай, когда  $M \gg m$ , он получил бы сильное расхождение между своей теорией и тем, что дает дискретное рассмотрение.

Как уже было сказано, частоты второй ветви сгущаются в конце и приближаются к определенной предельной частоте, не зависящей от  $n$  и характерной для решетки. С другой стороны, уже давно известны так называемые остаточные лучи. Если на кристалл падает инфракрасный свет, то определенные частоты очень сильно поглощаются и очень сильно отражаются, тогда как остальные частоты почти нацело проходят. Те лучи, которые сильно отражаются и поглощаются, и называются остаточными (это название связано с тем, что после многих отражений остаются только эти лучи). Их частоты совпадают с предельными частотами кристаллов:

вследствие резонанса на этих частотах получается сильное поглощение и селективное отражение.

Пусть кристалл состоит не из двух, а из трех различных сортов атомов (рис. 123). Тогда спектр состоит из *трех* ветвей (рис. 124). Правая часть спектра — дебаевская, вторая и третья — борновские. Здесь имеется два сорта остаточных лучей. Если бы

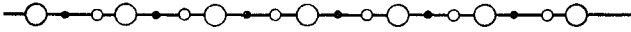


Рис. 123.

было четыре сорта частиц, то было бы три сорта остаточных лучей, и т. д.

Исследуя на опыте частоты остаточных лучей, мы получаем для них значения, очень близкие к тем значениям предельных частот, которые можно вычислить по Борну. Таким образом, экспериментальное исследование динамики кристалла чрезвычайно хорошо оправдывает представление о его дискретном строении. Рентгеновы лучи подтвердили дискретное представление о *статике* кристалла. Мы получили теперь подтверждение этих представлений из *динамического* рассмотрения: те свойства, о которых мы здесь говорили, специфичны для *колебаний* дискретной структуры. Но я не хотел бы, чтобы вы это понимали упрощенно.

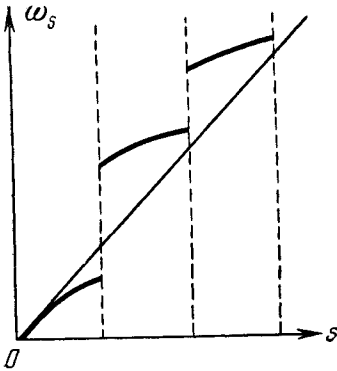


Рис. 124.

Экспериментальные факты решают спор между дискретным представлением о строении кристалла и тем

„сплошным“ представлением, которое принимается в теории упругости. Рассмотрение кристалла как *однородного* стержня приводит к некоторым результатам, находящимся в противоречии с опытом. Но представим себе другую сплошную модель кристалла. Пусть масса „размазана“ с *переменной* плотностью. Пусть распределение массы обладает *периодичностью*, причем период — молекулярного размера и на каждый период приходится два максимума плотности различной высоты (рис. 125). Я думаю, что если построить теорию колебаний в такой среде, получится практически то же самое, что дает дискретная модель с двумя сортами

частиц. (Такое динамическое рассмотрение еще не проведено, хотя уже имеются некоторые работы о сплошной среде с периодической структурой.)

Опыты, о которых здесь шла речь, опровергают не *всякое* представление о кристалле, как о сплошной среде, а представление о кристалле, как о сплошной *однородной* среде (лишенной периодичности молекулярных размеров).



Рис. 125.

Изучение динамики связанных систем привело нас к вопросам строения вещества. Мы встречаем здесь те же идеи, что и в теории „технических“ связанных систем, но только иначе примененные. Динамика кристаллической решетки интересует нас еще и в связи с тем, что мы старались с ее помощью оптически уловить строение вещества<sup>1</sup>.

Вернемся к техническим системам. Рассмотрим фильтр (рис. 126) — электрический аналог одномерной кристаллической решетки с одинаковыми массами. Двум различным массам  $M$  и  $m$  соответствовал бы фильтр с двумя различными чередующимися индуктивностями. На практике применяют фильтры, состоящие из одинаковых ячеек, но фильтры с чередующимися ячейками двух сортов также могут пригодиться.

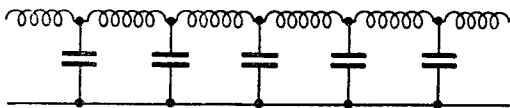


Рис. 126.

Однако, прежде чем приступить к задаче о фильтре, разберем переход к случаю равных масс в задаче о кристаллической решетке. Переход этот довольно интересен.

При  $M = m$  формула (10) сильно упрощается и дает:

$$\omega_{s1}^2 = \frac{4\alpha}{m} \sin^2 \frac{\beta_s}{2}, \quad \omega_{s2}^2 = \frac{4\alpha}{m} \cos^2 \frac{\beta_s}{2}. \quad (17)$$

Вместо того, чтобы исходить из теории, построенной для двух сортов масс, мы можем поступить иначе: считать с самого начала,

<sup>1</sup> [Ср. том I, стр. 320, 327.]

что все массы одинаковы, и написать и решать уравнения одного типа для всех масс от  $k=1$  до  $k=2n$ . Тогда вместо двух выражений для частоты получается *одно* и ее номер  $s$  изменяется от 1 до  $2n$ . При этом нет никакого деления на спектры Дебая и Борна, каждой длине волны соответствует одна частота. А именно, если с самого начала решать задачу для  $M=m$ , то все частоты выражаются формулой

$$\omega_s^2 = \frac{4x}{m} \sin^2 \frac{\beta_s}{2} \quad (s=1, 2, \dots, 2n), \quad (18)$$

а распределения амплитуд — формулой

$$A_s^{(k)} = a_s \sin k\beta_s \quad (k=0, 1, 2, \dots, 2n), \quad (19)$$

причем

$$\beta_s = \frac{s\pi}{2n+1} \quad (s=1, 2, \dots, 2n). \quad (20)$$

Легко убедиться, что формулы (17) и (18) дают один и тот же спектр частот для  $s=1, 2, \dots, n$ . Формула (18) совпадает с первой формулой (17), а для  $s=n+1, n+2, \dots, 2n$  из формулы (18) получается то же, что и из второй формулы (17) для  $s=n, n-1, \dots, 2, 1$ .

Несколько сложнее обстоит дело с типом колебаний. Когда в формуле (20)  $s$  меняется от 1 до  $2n$ , длины волн становятся все короче и короче. Для первого типа колебаний все в порядке: синусоиды, определяемые формулами (19) и (20) для  $s=1, 2, \dots, n$ , совпадают с синусоидами, которые дают при  $M=m$  формулы (3), (6) и (9) (здесь  $a=b$ ). Но для второго типа колебаний на первый взгляд получается противоречие. Когда мы исходим из нашего *первого* способа рассмотрения, полагая затем  $M=m$ , то мы получаем *две* синусоиды одинаковой амплитуды, но противоположной фазы ( $b=-a$ ). На одной синусоиде лежат все четные массы, на другой — все нечетные. Если же мы пользуемся *вторым* способом рассмотрения, с самого начала полагая  $M=m$ , то массы оказываются расположенными на *одной* синусоиде (19). Противоречие разрешается следующим образом. Физический смысл имеют не все ординаты синусоид, а только те, которые соответствуют точкам, где расположены атомы. Но для этих точек формулы (3) и (19) дают одно и то же, т. е. соответствующие им ординаты синусоид (3) являются вместе с тем ординатами синусоиды (19). Покажем это.

Колебанию  $\omega_{s_2}$  ( $s=1, 2, \dots, n$ ), получаемому при первом способе рассмотрения, соответствует при втором способе рассмотрения колебание  $\omega_{s'}$ , где  $s'=2n, 2n-1, \dots, n+1$ , т. е.

$$s' = 2n + 1 - s.$$

Оно имеет согласно (19) и (20) распределение вида

$$A_{s'}^{(k)} = a \sin k \beta_{s'} = a \sin \frac{ks'\pi}{2n+1} = (-1)^k \left( -a \sin \frac{k s \pi}{2n+1} \right)$$

$$(k=0, 1, 2, \dots, 2n),$$

или, если ввести для нечетных  $k$  обозначение  $j$ ,

$$A_{s'}^{(j)} = a \sin \frac{j s \pi}{2n+1} \quad (j=1, 3, \dots, 2n+1),$$

$$A_{s'}^{(k)} = -a \sin \frac{k s \pi}{2n+1} \quad (k=0, 2, 4, \dots, 2n).$$

Эти выражения совпадают с теми, которые получаются из (3) при  $b=-a$ .

Итак, частицы одновременно лежат на двух синусоидах (3) и на одной, более частой, синусоиде (19) (рис. 127). Вопрос пол-

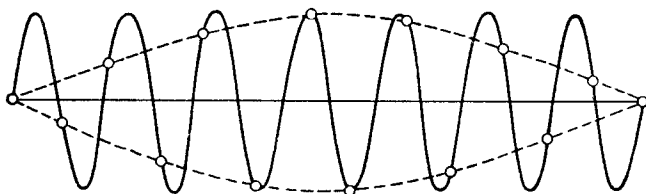


Рис. 127.

ностью разъяснен. При обоих способах рассмотрения получаются лишь различные выражения одинаковых результатов.

В случае фильтра с равными ячейками магнитная и электрическая энергия определяются выражениями:

$$2T = \sum_k L (\dot{q}^{(k)})^2, \quad 2U = \sum_k \frac{(q^{(k)} - q^{(k+1)})^2}{C}.$$

Из них получаются, в качестве уравнений Лагранжа, такие же уравнения, как для решетки, с заменой  $\alpha$  на  $1/C$ ,  $m=M$  на  $L$  и  $x$  на  $q$ :

$$L\ddot{q}^{(k)} + \frac{1}{C}(2q^{(k)} - q^{(k+1)} - q^{(k-1)}) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (21)$$

Само собой разумеется, уравнения (21) являются для соответствующих обходов ячеек обыкновенными кирхгофовскими уравнениями.

Итак, мы получаем тот же самый вид уравнений, что для цепочки из одинаковых масс.

Однако здесь нас интересуют главным образом другие вопросы. В отличие от кристаллической решетки, основной интерес здесь представляют не собственные колебания системы, а то, как она ведет себя в качестве линии передачи.

Отметим еще и другое отличие. В случае электрического фильтра число звеньев обычно не очень велико: не более 20—30. В случае кристаллической решетки мы пренебрегаем единицей по сравнению с числом звеньев. Здесь нужно быть осторожнее.

В электротехнике представляет интерес не только фильтр сам по себе, но также фильтр как модель кабеля. Здесь положение в некотором смысле противоположно тому, какое было с кристаллами. В теории кристаллов мы начали с континуума. Потом, чтобы быть ближе к природе, пришлось перейти к решетке. Кабель можно считать континуумом: здесь нас интересуют волны, не имеющие отношения к молекулярным размерам. Но все-таки и для кабеля имеет смысл рассматривать дискретную модель, и вот почему. Пусть, например, кабель имеет длину 200—300 км. Такой кабель очень трудно исследовать в натуре. Поэтому часто требуется создать лабораторную модель кабеля. Электрические свойства кабеля определяются его емкостью, индуктивностью, сопротивлением. При воссоздании кабеля в лаборатории нельзя заменить его одним контуром с емкостью и индуктивностью, равными емкости и индуктивности кабеля. Это ничего не даст: в кабеле возможен ряд явлений, чуждых цепи с одной степенью свободы. Но можно сделать искусственный кабель из ряда дискретных сосредоточенных емкостей и индуктивностей, общая емкость и индуктивность которых такие же, как у настоящего кабеля. Подобный искусственный кабель легко построить. Возникает вопрос: насколько он может воспроизводить свойства настоящего кабеля? Оказывается, что достаточно небольшого числа ячеек, чтобы получить очень хорошую аппроксимацию. Если мы берем модель кабеля из 30—40 ячеек, имеющих такую же общую емкость и такую же общую индуктивность, как кабель, то

$$\omega / \omega_{40} = 0,9997$$

( $\omega$  — основная частота кабеля;  $\omega_{40}$  — основная частота цепочки из сорока звеньев). Следующие частоты, по крайней мере ближайшие, тоже при этом хорошо аппроксимируются.

### ТРИДЦАТЬ ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ

(8/V 1931 г.)

*Фильтры (продолжение). Задача о собственных колебаниях; граничные условия. Аппроксимация кабеля одной ячейкой и многими ячейками. Фильтр как передающая система. Критическая частота; условия пропускания. „Обратный“ фильтр. Физическое объяснение действия фильтров. Вычисление напряжений на конце фильтра в области пропускания. Резонанс.*

Продолжим исследование фильтра с одинаковыми ячейками. Он описывается уравнениями

$$L\ddot{q}^{(k)} + \frac{1}{C} (2q^{(k)} - q^{(k+1)} - q^{(k-1)}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Для определенности задачи нужно указать условия на концах. Закрепленным концам механической цепочки здесь соответствуют открытые концы:

$$q^{(0)} = 0, \quad q^{(n+1)} = 0.$$

Совершенно так же, как для цепочки, имеем:

$$\begin{aligned} q^{(k)} &= A^{(k)} \cos(\omega t + \varphi); \\ \left(\frac{2}{C} - L\omega^2\right) A^{(k)} - \frac{1}{C} (A^{(k+1)} + A^{(k-1)}) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть

$$A^{(k)} = a \sin k\beta. \quad (3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} q_s^{(k)} &= a \sin k\beta_s \cos(\omega_s t + \varphi_s), \\ \omega_s &= \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)} \quad (s = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (4)$$