

( $\omega$  — основная частота кабеля;  $\omega_{40}$  — основная частота цепочки из сорока звеньев). Следующие частоты, по крайней мере ближайшие, тоже при этом хорошо аппроксимируются.

### ТРИДЦАТЬ ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ

(8/V 1931 г.)

*Фильтры (продолжение). Задача о собственных колебаниях; граничные условия. Аппроксимация кабеля одной ячейкой и многими ячейками. Фильтр как передающая система. Критическая частота; условия пропускания. „Обратный“ фильтр. Физическое объяснение действия фильтров. Вычисление напряжений на конце фильтра в области пропускания. Резонанс.*

Продолжим исследование фильтра с одинаковыми ячейками. Он описывается уравнениями

$$L\ddot{q}^{(k)} + \frac{1}{C} (2q^{(k)} - q^{(k+1)} - q^{(k-1)}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Для определенности задачи нужно указать условия на концах. Закрепленным концам механической цепочки здесь соответствуют открытые концы:

$$q^{(0)} = 0, \quad q^{(n+1)} = 0.$$

Совершенно так же, как для цепочки, имеем:

$$\begin{aligned} q^{(k)} &= A^{(k)} \cos(\omega t + \varphi); \\ \left(\frac{2}{C} - L\omega^2\right) A^{(k)} - \frac{1}{C} (A^{(k+1)} + A^{(k-1)}) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть

$$A^{(k)} = a \sin k\beta. \quad (3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} q_s^{(k)} &= a \sin k\beta_s \cos(\omega_s t + \varphi_s), \\ \omega_s &= \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)} \quad (s = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (4)$$

Эти формулы получаются из формул для цепочки из одинаковых масс, если сделать замены

$$\alpha = \frac{1}{C}, \quad m = L.$$

Задача о собственных колебаниях полностью решена.

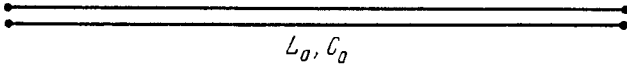


Рис. 128.

Если вместо (3) взять  $A^{(k)} = b \cos k\beta$  (с тем же самым  $\beta$ ), мы также получим решение уравнений (2). Сумма решений

$$A^{(k)} = a \sin k\beta + b \cos k\beta \quad (5)$$

— тоже решение. Здесь неизвестны  $\beta$  и отношению  $b/a$ . Их нужно определить из двух краевых условий. Мы сразу взяли  $b=0$ , так как заранее было известно, каким краевым условиям придется удовлетворять (мы имеем право угадывать решение, потому что знаем, что оно единственное). При других, более сложных, краевых условиях понадобилось бы использовать решение (5).

Пусть имеется кабель с равномерно распределенными емкостью и индуктивностью и с открытыми концами (рис. 128). Как аппроксимировать его одной ячейкой (первое самое грубое приближение)? Сделаем, например, так, как показано на рис. 129: индуктивность, равная всей индуктивности кабеля  $L_0$ , сосредоточена в одном месте, а емкость, равная всей емкости кабеля  $C_0$ , разделена на две части.

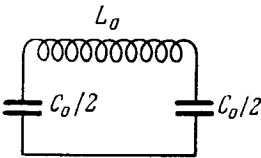


Рис. 129.

Здесь — одна собственная частота. Ее можно сравнивать только с *основной* частотой кабеля  $\tilde{\omega}_1$ .

Если  $L_1$  и  $C_1$  — индуктивность и емкость на единицу длины кабеля, то скорость распространения волн в нем равна  $1/\sqrt{L_1 C_1}$ <sup>1</sup>. Так как кабель открыт на обоих концах, то на его длине  $l$  укладывается половны и

$$\tilde{\omega}_1 = 2\pi \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \cdot \frac{1}{2l} = \frac{\pi}{l \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{\pi}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

<sup>1</sup> [См. 3-ю лекцию части II.]

Контур рис. 129 имеет собственную частоту

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{L_0 C_0}},$$

сильно отличающуюся от  $\tilde{\omega}_1$ . Но и при одной ячейке можно получить лучшее приближение, если иначе распределить параметры. Прежде чем это показать, рассмотрим аппроксимацию кабеля фильтром из  $n$  ячеек. Чем больше  $n$ , тем лучшее приближение можно получить.

Повидимому, наилучший способ распределения индуктивности и емкости кабеля между  $n$  ячейками состоит в следующем. Разобьем кабель на  $n + 1$  участок. Поместим в середине каждого участка

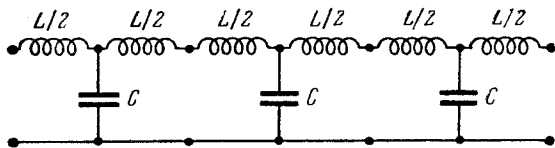


Рис. 130.

сосредоточенную емкость  $C$ , равную емкости участка, а слева и справа от нее две индуктивности  $L/2$ , равные в сумме распределенной индуктивности участка (рис. 130). Из  $n + 1$  участка получается  $n$  ячеек. Сумма емкостей всех ячеек равна емкости всего кабеля. С индуктивностью дело обстоит иначе: половинки  $L/2$  на концах остаются „мертвыми“. Емкость  $C_0$  и индуктивность  $L_0$  всего кабеля связаны с  $C$  и  $L$  соотношениями:

$$C(n + 1) = C_0, \quad L(n + 1) = L_0.$$

Собственные частоты нашего ячеечного кабеля (фильтра) суть

$$\omega_s = \frac{2(n + 1)}{\sqrt{L_0 C_0}} \sin \frac{s\pi}{2(n + 1)},$$

собственные же частоты сплошного кабеля —

$$\tilde{\omega}_s = \frac{s\pi}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\omega_s}{\tilde{\omega}_s} = \frac{2(n + 1)}{s\pi} \sin \frac{s\pi}{2(n + 1)},$$

или

$$\frac{\omega_g}{\omega_s} = \frac{\sin \frac{s\pi}{\xi}}{\xi}, \quad \xi = \frac{s\pi}{2(n+1)}$$

(функция  $\sin \xi/\xi$  часто встречается в теоретической физике).

Для ячеечных кабелей, подобранных только что указанным способом, имеются таблицы собственных частот.

В случае аппроксимации *одной* ячейкой ( $n=1$ ) наш общий способ приводит к схеме рис. 131. Здесь, в отличие от рис. 129, в выражение для собственной частоты входит не вся индуктивность кабеля, а ее половина. Получается собственная частота

$$\omega = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Она отличается от основной частоты сплошного кабеля только на 10%.<sup>0</sup>

Мы говорили выше об индуктивности и емкости *на единицу длины кабеля*. Эти понятия нуждаются в обосновании, и в свое время мы к этому вернемся<sup>1</sup>. Теперь же мы перейдем к рассмотрению другой физической задачи, практически чрезвычайно важной.

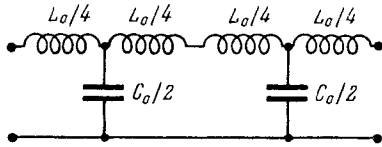


Рис. 131.

Пусть через звеньевой проводник передается напряжение от источника к потребляющему аппарату. Практически дело часто

обстоит так: источник создает не синусоидальное напряжение, а набор синусоидальных слагаемых разнообразных частот. Желательно, чтобы некоторые из этих слагаемых проходили, а другие задерживались. Иначе говоря, нужно *профильтровать* напряжение, создаваемое источником. Так как мы рассматриваем линейную систему, то для того, чтобы овладеть проблемой, достаточно рассмотреть, как ведет себя эта система под действием синусоидальной силы

$$\mathcal{E} = \cos pt,$$

где  $p$  — заданная частота.

Ответ будет различным, в зависимости от того, каков потребляющий аппарат. Оставим конец фильтра открытым и будем интересоваться напряжением на этом открытом конце. Если на конце

<sup>1</sup> [См. 3-ю лекцию части II.]

включен какой-нибудь аппарат, то, вообще говоря, вся картина искажается. Но если этот аппарат имеет большое внутреннее сопротивление, то решение, которое мы получим для открытого конца, даст практически правильный ответ.

Вернемся к общей постановке задачи. Это — задача не о собственных, а о *вынужденных* колебаниях.

Реальный фильтр обладает потерями. Вследствие потерь собственные колебания затухают, и под действием периодической силы устанавливаются колебания с периодом силы. Их мы и хотим найти. Наличие затухания мы учтем с самого начала тем, что будем рассматривать периодическое решение. Но, не вводя затухания в уравнение, мы не получим зависимости амплитуды вынужденных колебаний от затухания. Так можно поступать только в том случае, когда затухание мало.

Будем искать периодическое решение с частотой  $p$ . Прибегнем к тому

же приему, что и при изучении собственных колебаний<sup>1</sup>. В случае, когда включен источник внешней силы (рис. 132), первое уравнение (1) должно быть заменено уравнением

$$L\ddot{q}^{(1)} + \frac{1}{C}(q^{(1)} - q^{(2)}) = \mathcal{E} \cos pt.$$

Остальные уравнения (1) сохраняют такой же вид, как в задаче о собственных колебаниях. Получаются несимметричные уравнения, и это нежелательно. Но как сохранить для всех  $k$ , включая  $k=1$ , одинаковый вид уравнений? Выход заключается в следующем: нужно написать для  $k=1$  уравнение

$$L\ddot{q}^{(1)} + \frac{1}{C}(q^{(1)} - q^{(2)}) + \frac{1}{C}(q^{(1)} - q^{(0)}) = 0$$

и потребовать в решении, чтобы было

$$-\frac{1}{C}(q^{(1)} - q^{(0)}) = \mathcal{E} \cos pt. \quad (6)$$

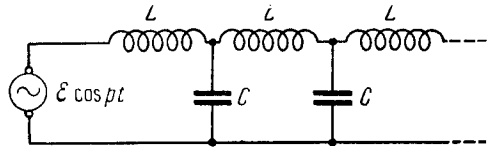


Рис. 132.

<sup>1</sup> [См. 29-ю и 30-ю лекции.]

Такой прием обычен в вопросах распространения волн при точечных источниках.

Итак, мы требуем, чтобы удовлетворялись все прежние симметричные уравнения, но дополнительно требуем, чтобы выполнялось условие (6) на одном конце и условие

$$q^{(n+1)} = 0 \quad (7)$$

на другом конце. Решать уравнения (1) мы будем при этом обычным способом, полагая

$$q^{(k)} = A^{(k)} \cos pt.$$

Формально мы получим такие же уравнения, как и раньше:

$$\left(\frac{2}{C} - Lp^2\right) A^{(k)} - \frac{1}{C} (A^{(k+1)} + A^{(k-1)}) = 0. \quad (8)$$

Разница по отношению к разысканию собственных колебаний состоит в том, что здесь частота  $p$  задана и надо искать только  $A^{(k)}$ . Если мы сделаем, как прежде, подстановку  $\sin k\beta$ , то неизвестно, сможем ли мы удовлетворить уравнениям (8). Попробуем выражение типа  $e^{k\gamma}$ , которое более гибко.

Итак, подставим в (8)

$$A^{(k)} = ae^{k\gamma}.$$

Как легко видеть, мы получим для определения  $\gamma$  уравнение

$$\left(\frac{2}{C} - Lp^2\right) - \frac{1}{C} (e^\gamma + e^{-\gamma}) = 0, \quad (9)$$

которое является квадратным уравнением по отношению к  $e^\gamma$ . Интересно то, что в зависимости от величины  $p$  значение  $\gamma$ , которое получается из (9), будет либо чисто мнимым, либо комплексным. В этих двух случаях фильтр ведет себя совершенно различно.

Если  $p$  таково, что

$$|2 - LCp^2| < 2, \quad (10)$$

то мы удовлетворим (9), взяв

$$\gamma = i\beta,$$

где  $\beta$  — действительная величина. Действительно,

$$e^{i\beta} + e^{-i\beta} = 2 \cos \beta \leq 2.$$

Если  $\gamma = i\beta$  удовлетворяет уравнению (19), то  $\gamma = -i\beta$  тоже удовлетворяет ему, так что уравнения (8) имеют при этом решение

$$A^{(k)} = ae^{ik\beta} + be^{-ik\beta}.$$

Так как амплитуды  $A^{(k)}$  действительны, то нужно взять  $a$  и  $b$  комплексно сопряженными:

$$2ia = Ae^{-i\psi}, \quad -2ib = Ae^{i\psi}$$

( $A$  и  $\psi$  — произвольные действительные величины), и мы получаем:

$$A^{(k)} = A \sin(k\beta - \psi). \quad (11)$$

Это решение означает, что фильтр *пропускает* частоту  $p$ .

Условие (10) может быть представлено в таком виде:

$$p < \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Если условие (10) не выполняется, т. е. частота внешней в.д.с.  $p > 2/\sqrt{LC}$ , то величина  $\gamma$  при этом не является чисто мнимой; как мы увидим, таких частот фильтр *не пропускает*.

Таким образом, фильтр пропускает только частоты, лежащие ниже определенной *критической частоты*, равной

$$p = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \quad (12)$$

Эффективность фильтра зависит от числа ячеек, но критическая частота от него не зависит; она определяется только структурой ячейки. Обычный (сплошной) кабель критической частоты не имеет, он пропускает все частоты.

Однако здесь нужно заметить следующее. Критическая частота отсутствует у *однородного* сплошного кабеля. Сплошной кабель с периодически меняющимися (в функции расстояния)  $L$  и  $C$  будет обладать фильтрующей способностью. Такой кабель будет пропускать низкие частоты и задерживать высокие.

Наряду с фильтрами рассматриваемого типа, нужны также фильтры обратного типа, пропускающие высокие частоты и задерживающие низкие. (Эти два типа фильтров составляют основу „фильтровальной“ техники.) В „обратном“ фильтре емкости расположены последовательно, а индуктивности — параллельно (рис. 133), т. е. емкости шунтируются индуктивностями.

Можно избежать нового математического исследования, сведя задачу о фильтре второго типа на задачу о фильтре первого типа. Составляя уравнения по Кирхгофу или по Лагранжу, получаем:

$$\frac{q^{(k)}}{C} + L(2\ddot{q}^{(k)} - \ddot{q}^{(k+1)} - \ddot{q}^{(k-1)}) = 0,$$

где  $q^{(k)}$  — заряд на  $k$ -ом конденсаторе. Подстановка

$$q^{(k)} = A^{(k)} \cos pt$$

дает уравнения

$$\left(2L - \frac{1}{Cp^2}\right) A^{(k)} - L(A^{(k+1)} + A^{(k-1)}) = 0. \quad (13)$$

Сравним уравнения (13) и (8). Достаточно заменить  $1/C$  на  $L$ , а  $L$  на  $1/C$  и написать  $p$  вместо  $1/p$ , чтобы перейти от уравнений (8) к уравнениям (13). След-

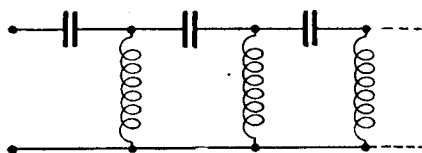


Рис. 133.

став такую же замену в формуле (12), мы получим для фильтра второго типа следующее условие пропускания:

$$p > \frac{1}{2\sqrt{LC}}.$$

Частоты, лежащие ниже  $1/2\sqrt{LC}$ , он не пропускает. Для фильтра второго типа критическая частота (при тех же  $L$  и  $C$ ) меньше, чем для первого.

Имея два фильтра, один — первого, другой — второго типа, можно составить из них фильтр, пропускающий лишь некоторый интервал частот. Первый фильтр задержит частоты *выше* некоторой определенной величины, второй задержит частоты *ниже* некоторой другой определенной величины. Разность этих величин и даст полосу пропускания.

То, что было сказано о пропускании и непропускании, нам еще предстоит доказать. Кроме того, нужно будет получить количественные выражения для амплитуды на выходе фильтра. Но я хотел бы сначала показать наглядно, в чем здесь „колдовство“.

Возьмем фильтр первого типа (рис. 132). Почему он пропускает медленные колебания? Если приложить к одному концу постоянное напряжение от батареи, то на другом конце будет такое же напряжение, как на батарее. С другой стороны, для очень быстрых колебаний емкости представляют собой очень малые сопротивления



ния, они образуют почти короткие замыкания. При очень большой частоте каждый конденсатор шунтирует предыдущую часть линии малым (и уменьшающимся с увеличением частоты) сопротивлением.

Возьмем фильтр второго типа (рис. 133). Приключенная к его концу батарея зарядит первый конденсатор, но дальше ток не пойдет, напряжение на конце будет равно нулю. Если же частота источника велика, каждая ячейка шунтируется большим сопротивлением (индуктивное сопротивление растет с увеличением  $p$ ) и напряжение на конце линии велико.

Нам нужно теперь вычислить амплитуды колебаний в фильтре.

При частоте ниже критической в фильтре первого типа мы получаем, подставляя  $q^{(k)} = A^{(k)} \cos pt$ , где  $A^{(k)}$  дается формулой (11), в граничное условие (6):

$$-A \sin \psi + A \sin(\beta - \psi) = C\varepsilon. \quad (14)$$

Второе уравнение для определения  $A$  и  $\psi$  мы получим, подставляя (11) в граничное условие (7):

$$A \sin[(n+1)\beta - \psi] = 0.$$

Отсюда

$$\psi = (n+1)\beta. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), имеем

$$A = -\frac{C\varepsilon}{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta}.$$

Пользуясь этой формулой, найдем амплитуду  $X$  напряжения  $q^{(n)}/C$  на конце фильтра:

$$X = \frac{A^{(n)}}{C} = -\frac{A \sin(\psi - n\beta)}{C} = \frac{A \sin \beta}{C} = \frac{C\varepsilon \sin \beta}{C \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta},$$

или

$$X = \varepsilon \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta}. \quad (16)$$

Для очень малых  $p$  величина  $\beta$  также очень мала, и можно считать приближенно:

$$\cos \frac{\beta}{2} = 1, \quad \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta = 1.$$

Напряжение на конце равно напряжению, подводимому к первой ячейке.

Формула (16) показывает также, что для некоторых участков частот напряжение на конце фильтра может быть значительно больше, чем  $\mathcal{E}$ . Фильтр пропускает все низкие частоты ( $p < 2/\sqrt{LC}$ ), но пропускает их неравномерно. В частности, если  $p$  таково, что

$$\cos\left(p + \frac{1}{2}\right)\beta = 0,$$

то имеет место резонанс,  $X = \infty$ , т. е. напряжение на конце кабеля (в отсутствие затухания) растет неограниченно.

Затухание скрадывает эти различия. При больших затуханиях фильтр более или менее одинаково пропускает все частоты ниже критической.

Остается доказать вторую часть нашего утверждения — то, что фильтр практически не пропускает частот выше критической.

## ТРИДЦАТЬ ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(12/V 1931 г.)

*Фильтры (окончание). Исследование „прямого“ фильтра при частоте выше критической. Распределение напряжения по ячейкам. Напряжение на конце. Поведение реальных фильтров при очень высоких частотах. Акустический резонатор и акустический фильтр. Механический фильтр В. Ф. Миткевича. Общие замечания о теории колебаний. Переход к распределенным системам. Разложимость произвольной функции по собственным функциям сплошной колебательной системы.*

Закончим вопрос о фильтрах.

Мы искали решение дифференциальных уравнений фильтра в виде:

$$q^{(k)} = A^{(k)} \cos pt.$$

Для определения  $A^{(k)}$  получаются уравнения

$$\left(\frac{2}{C} - Lp^2\right)A^{(k)} - \frac{1}{C}(A^{(k+1)} + A^{(k-1)}) = 0. \quad (1)$$