Напряжение на конце равно напряжению, подводимому к первой ячейке.

Формула (16) показывает также, что для некоторых участков частот напряжение на конце фильтра может быть значительно больше, чем $\mathscr{E}$. Фильтр пропускает все низкие частоты $(p < 2/\sqrt{LC})$, но пропускает их неравномерно. В частности, если p таково, что

$$\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta = 0,$$

то имеет место резонанс, $X = \infty$, т. е. напряжение на конце кабеля (в отсутствие затухания) растет неограниченно.

Затухание скрадывает эти различия. При больших затуханиях фильтр более или менее одинаково пропускает все частоты ниже критической.

Остается доказать вторую часть нашего утверждения — то, что фильтр практически не пропускает частот выше критической.

ТРИДЦАТЬ ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(12/V 1931 г.)

Фильтры (окончание). Исследование „прямого" фильтра при частоте выше критической. Распределение напряжения по ячейкам. Напряжение на конце. Поведение реальных фильтров при очень высоких частотах. Акустический резонатор и акустический фильтр. Механический фильтр В. Ф. Миткевича. Общие замечания о теории колебаний. Переход к распределенным системам. Разложимость произвольной функции по собственным функциям сплошной колебательной системы.

Закончим вопрос о фильтрах.

Мы искали решение дифференциальных уравнений фильтра в виде:

$$q^{(k)} = A^{(k)} \cos pt.$$

Для определения $A^{(k)}$ получаются уравнения

$$\left(\frac{2}{C} - Lp^2\right)A^{(k)} - \frac{1}{C}\left(A^{(k+1)} + A^{(k-1)}\right) = 0. \tag{1}$$

Их можно решить подстановкой

$$A^{(k)} = ae^{k\gamma},$$

приводящей к уравнению

$$\left(\frac{2}{C} - Lp^2\right) - \frac{1}{C}(e^{\gamma} - e^{-\gamma}) = 0,$$

или

$$\operatorname{ch}\gamma = 1 - \frac{LC}{2}p^2. \tag{2}$$

Если γ — решение уравнения (2), то $-\gamma$ тоже является решением. В силу линейности системы (1) ее решением будет также

$$A^{(k)} = ae^{k\gamma} + be^{-k\gamma}. \tag{3}$$

Это решение содержит две произвольные постоянные a и b, нужные для того, чтобы удовлетворить обоим условиям на концах.

Если внешняя частота p удовлетворяет условию

$$|2 - CLp^2| < 2,$$

т. е. $LCp^2 < 4$, или

$$p < \frac{2}{\sqrt{LC}}, \tag{4}$$

то $\gamma = \pm i\beta$, где β — действительная величина.

Используя краевые условия

$$q^{(0)} - q^{(1)} = C\mathscr{E}\cos pt \quad \text{или} \quad A^{(0)} - A^{(1)} = C\mathscr{E} \tag{5}$$

и

$$q^{(n+1)} = 0 \quad \text{или} \quad A^{(n+1)} = 0, \tag{6}$$

мы получили для амплитуды X напряжения $q^{(n)}/C$ на конце фильтра выражение

$$X = \mathscr{E}\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta}. \tag{7}$$

Пусть теперь частота p больше критической, т. е.

$$|2 - CLp^2| > 2, \tag{8}$$

или

$$p > \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Для таких p величина $1-LCp^2/2$ отрицательна, и на основании (2) γ не может быть действительным (если γ действительно, то $\operatorname{ch}\gamma$ положителен). В случае (8) γ не может быть и чисто мнимой величиной. Таким образом, теперь γ — существенно комплексная величина.

Пусть

$$\gamma=\xi+i\eta \tag{9}$$

(ξ, η — действительны). Тогда

$$\left.\begin{aligned} e^{\gamma}&=e^{\xi}(\cos\eta+i\sin\eta),\\ e^{-\gamma}&=e^{-\xi}(\cos\eta-i\sin\eta). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Подставив (10) в (2) и учитывая, что правая часть действительная, мы получаем:

$$\sin\eta=0, \text{ т. е. } \eta=m\pi,$$

где m — целое число. Но четные m ($m=0, 2, 4, \ldots$) непригодны: они не исправят знак в левой части уравнения (2), так как $\cos\eta$ при этом равен $+1$. Пригодны лишь нечетные m.

Возьмем, например, $m=1$, т. е. положим:

$$\gamma=\xi+i\pi. \tag{11}$$

Тогда $e^{\gamma}=-e^{\xi}$, $e^{-\gamma}=-e^{-\xi}$ и левая часть уравнения (2) обращается в

$$-(e^{\xi}+e^{-\xi})$$

(*с минусом!* Добавок $i\pi$ понадобился именно для того, чтобы обернуть знак).

Теперь можно удовлетворить уравнению (2), определив ξ из условия

$$\operatorname{ch}\xi=\left|1-\frac{LC}{2}p^2\right|. \tag{12}$$

Оно дает действительное ξ, так как в рассматриваемом случае

$$\left|1-\frac{LC}{2}p^2\right|>1.$$

При этом ξ тем больше, чем больше p.

Таким образом, для случая (8) мы получаем решение уравнений (1) в следующем виде:

$$A^{(k)}=ae^{k\xi+ik\pi}+be^{-(k\xi+ik\pi)}.$$

Принимая во внимание, что $e^{\pm ik\pi}=(-1)^k$, можно освободиться от мнимостей и написать:

$$A^{(k)}=(-1)^k(ae^{k\xi}+be^{-k\xi}). \tag{13}$$

Получился интересный результат: напряжения на последовательных конденсаторах имеют чередующиеся знаки.

Величины a и b определяются и здесь из краевых условий (5) и (6). Подставляя (13) в (5) и (6), имеем:

$$\left.\begin{aligned} &a+b+ae^{\xi}+be^{-\xi}=\mathcal{E}, \\ &ae^{(n+1)\xi}+be^{-(n+1)\xi}=0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Не решая системы (14), сделаем следующее замечание. Из второго уравнения (14) имеем:

$$a=-be^{-2(n+1)\xi}.$$

Отсюда видно, что если ξ не очень мало и если взять достаточно большое число звеньев, то a чрезвычайно мало по отношению к b.

Если k не очень велико, второй член в выражении (13) преобладает и решение практически имеет вид

$$A^{(k)}=(-1)^k be^{-k\xi}.$$

Таким образом, если частота превышает критическую, то (при указанном условии) напряжение монотонно падает с увеличением номера ячейки по экспоненциальному закону.

Для того, чтобы получить общее выражение для X, воспользуемся уже найденным нами решением (7), относящимся к первому случаю, когда γ чисто мнимое. Запишем его в виде

$$X=\mathcal{E}\frac{e^{i\frac{\beta}{2}}+e^{-i\frac{\beta}{2}}}{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}+e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}}=\mathcal{E}\frac{e^{\frac{\gamma}{2}}+e^{-\frac{\gamma}{2}}}{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma}+e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma}}. \tag{15}$$

Решение для второго случая получится, если подставить в (15), вместо γ, выражение (11). Это дает:

$$X=\mathcal{E}\frac{e^{\frac{\xi+i\pi}{2}}+e^{-\frac{\xi+i\pi}{2}}}{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)(\xi+i\pi)}+e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)(\xi+i\pi)}},$$

или, поскольку $e^{\pm i\pi/2} = \pm i$, $e^{\pm in\pi} = (-1)^n$,

$$X = \mathcal{E}(-1)^n \frac{e^{\frac{\xi}{2}} - e^{-\frac{\xi}{2}}}{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi} - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}}. \tag{16}$$

Заметим прежде всего, что в зависимости от того, является ли число звеньев четным или нечетным, амплитуда напряжения на конце положительна или отрицательна. При сколько-нибудь большом n второй член в знаменателе можно откинуть, и тогда

$$X = \mathcal{E}(-1)^n \left(e^{\frac{\delta}{2}} - e^{-\frac{\delta}{2}}\right) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta}. \tag{17}$$

Следовательно, при достаточно большом числе звеньев $|X|$ очень мало по сравнению с $\mathcal{E}$. Это и означает, что фильтр не пропускает частоты выше критической.

Пусть $\xi = 2$, $n = 10$. Получается ослабление в e^{20} раз. Такого большого ослабления на практике никогда не нужно. Не трудно иметь $\xi = 1{,}5$. Тогда для целей практики вполне достаточно 5—6 звеньев.

Возьмем крайний случай. Если p очень велико по сравнению с критической частотой, то, как легко видеть, уже первое звено фильтра — почти короткое замыкание. Общий принцип работы фильтров, таким образом, ясен.

Большей частью они работают на какие-нибудь нагрузочные устройства. Открытый конец получается в том случае, если фильтр подключен к сетке катодной лампы (если нет сеточного тока). Если же фильтр замкнут на некоторое конечное сопротивление, то нужно изменить граничные условия. Но пусть на открытом конце фильтра напряжение равно нулю. Тогда оно останется равным нулю, что бы к нему ни приключили. Так будет, в частности, если замкнуть конец накоротко.

Часто делают следующую ошибку.

Согласно теории, если $p \gg 2\sqrt{LC}$, то фильтр первого типа (рис. 132) практически не пропускает. Но возьмем ультравысокую частоту. На опыте окажется, что фильтр очень хорошо ее пропускает. Мне приходилось слышать, как на этом основании говорили, что теория никуда не годится. Но никогда нельзя забывать о предпосылках теории. Мы считали, что в последовательных ветвях нет емкости, а в параллельных — нет индуктивности. В действительности всякая катушка имеет емкость, а всякие подводящие провода имеют индуктивность. Мы имеем право схематизировать фильтр так, как мы это делали, только если частота не слишком высока.

При достаточно быстрых колебаниях „индуктивность" может оказаться емкостью, а для фильтра это чрезвычайно существенно: вместо ожидаемого эффекта может получиться эффект фильтра противоположного типа. Нельзя экстраполировать результат, полученный в предположении, что емкость катушки мала, на сколь угодно высокие частоты.

Еще большее значение имеют эти соображения в случае акустических фильтров. Акустики строят фильтр в виде комбинации акустических резонаторов.

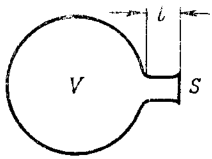

Рис. 134.

Начнем с разбора акустического резонатора (рис. 134). Пусть V — объем сосуда, S — сечение цилиндра. Предположим сначала, что цилиндр закрыт поршнем. Вычислим период собственных колебаний.

Здесь изменяются давление p и плотность ρ, причем

$$\Delta p = a^2 \Delta\rho, \tag{18}$$

где a — скорость звука[1]. На поршень действует сила

$$F = S\Delta p. \tag{19}$$

Для определения F мы должны вычислить Δp. Имеем: $\rho V = \mathrm{const}$, откуда

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V}. \tag{20}$$

Но

$$\Delta V = Sx, \tag{21}$$

где x — смещение поршня. Подставляя $\Delta\rho$ из (20) в выражение (18) и воспользовавшись (19) и (21), получаем для силы выражение

$$F = -\frac{a^2\rho S^2}{V}x.$$

Мы можем теперь написать уравнение движения поршня:

$$M\ddot{x} + \frac{a^2\rho S}{V}x = 0, \tag{22}$$

где M — масса поршня.

[1] [Ср. 2-ю лекцию части II.]

Давление во всем сосуде мы считали одинаковым. Поэтому уравнение (22) справедливо лишь для достаточно медленных колебаний, у которых длина акустической волны много больше размеров сосуда.

Акустики имеют дело с резонаторами *без* поршня. При этом они делают довольно смелую гипотезу, которая при некоторых условиях хорошо оправдывается на опыте. Они применяют для резонатора без поршня уравнение (22), понимая под M массу воздуха в цилиндрическом горлышке. Масса всего остального воздуха не принимается во внимание. На первый взгляд это странно, ибо остальной объем гораздо больше, но эту гипотезу можно подтвердить более точным расчетом, а именно для достаточно медленных колебаний. В этом случае воздух имеет заметную скорость только в горлышке. Нужно сравнивать не *массы* воздуха в горлышке и сосуде, а соответствующие энергии. Оправдание гипотезы в том, что кинетическая энергия воздуха в горлышке гораздо больше, чем в сосуде. Так как

$$M = \rho l S,$$

где l — длина горлышка, уравнение резонатора принимает вид

$$\rho l S \ddot{x} + \frac{a^2 \rho S^2}{V} x = 0. \qquad (23)$$

Итак, в теории акустических резонаторов предполагается, что давление воздуха в сосуде постоянно и что воздух *внутри* сосуда не имеет кинетической энергии. Если эти допущения справедливы, то, исходя из них, можно построить акустический фильтр. Его можно сделать в виде трубы с перегородками, через которые проходят узкие трубки (рис. 135). В трубках сосредоточена кинетическая энергия, в камерах—потенциальная.

Если написать дифференциальные уравнения движения для такой цепочки из камер и трубок, то получится то же, что и для струны с грузами или для электрического фильтра. Камеры играют роль пружин или емкостей, а трубки — масс или индуктивностей. Сравнивая дифференциальное уравнение (23) с соответствующими уравнениями для электрической и механической систем, не трудно видеть, что

$$\rho l S \text{ аналогично } L \text{ или } m,$$

$$a^2 \rho S^2/V \text{ аналогично } 1/C \text{ или } \alpha.$$

Отсюда можно заключить, что система пропускает тогда, когда

$$p < 2a\sqrt{\frac{S}{lV}}.$$

Она является акустическим фильтром для пропускания низких частот.

Для того, чтобы можно было пользоваться этой теорией, длина волны должна быть велика по отношению к линейным размерам камер. При очень высоких частотах эта теория совершенно непригодна.

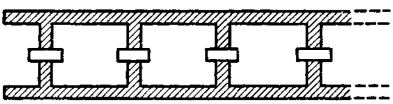

Рис. 135.

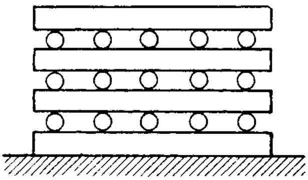

Рис. 136.

Укажем еще на механический фильтр В. Ф. Миткевича. Для того, чтобы обезопасить приборы от сотрясений, он делает „слоеный пирог“ из тяжелых плит, между которыми проложены резиновые трубки или стержни (рис. 136). Это, в сущности, механический фильтр. В сейсмографии берут для той же цели *одну* систему с очень медленным периодом; для высокочастотных колебаний такой механический фильтр гораздо эффективнее. А. И. Данилевский применял аналогичные устройства для записи граммофонных пластинок (при передаче акустических колебаний на резец).

Рассмотрением фильтров мы закончим наш курс в этом году. Сделаем несколько заключительных замечаний.

Колебания — очень важная и специфичная область.

Одна из характерных черт колебательных систем — та, что они несут в себе свой масштаб времени. Он определяется собственным периодом колебаний, или, если говорить более общо, динамическими свойствами системы. Именно этот временной масштаб является решающим в вопросах резонанса, а также в вопросе о связи, о взаимодействии между колебательными системами. Если колебательные системы расстроены, то даже на „близком“ расстоянии они почти не действуют друг на друга; если они настроены, то они сильно взаимодействуют даже на „большом“

расстоянии[1]. Таким образом, какое расстояние между колебательными системами следует считать близким, а какое — далеким, зависит от их колебательных свойств.

Эти представления особенно важны в волновой механике. Она в каком-то смысле рассматривает всякое тело как колебательную систему. В частности, молекулы являются колебательными системами. Их взаимодействие коренным образом зависит от соотношений их колебательных свойств. Поэтому пространственное расстояние двух молекул само по себе не дает еще указаний на то, действуют они друг на друга заметно или нет.

Итак, законы взаимодействия колебательных систем очень специфичны. Вместе с тем они являются общими для самых различных явлений, происходящих в электрических контурах, маятниках, кристаллах. Это — совершенно разные вещи, но колебательные закономерности их объединяют.

Из-за недостатка времени мы очень бегло коснулись теории нелинейных колебаний и совсем не затронули колебаний распределенных (сплошных) систем. Между тем потребность в этих разделах теории колебаний — насущная.

Струна, кабель — это сплошные системы. Как происходит переход от дискретной системы к сплошной? Мы можем это выяснить на примере фильтра.

Для дискретной системы (фильтра) мы имели:

$$u^{(k)}=a_s \sin \frac{ks\pi}{n+1} \cos(\omega_s t+\varphi_s), \tag{24}$$

$$\omega_s=\frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)} \tag{25}$$

(через $u^{(k)}$ здесь обозначено напряжение на k-том звене). У нас было n ячеек и n соответствующих им величин $u^{(k)}$. Каждая из них — функция времени.

Пусть каждая ячейка делается все меньше, а число ячеек — все больше. Тогда неудобно характеризовать ячейку ее номером. Введем расстояние x от начала системы до рассматриваемой ячейки. Пусть расстояние между ячейками будет d. Тогда

$$x=kd, \quad l=(n+1)d. \tag{26}$$

---

[1] [См. 25-ю лекцию.]

Подставляя (26) в (24), получаем:

$$u(x)=a_s \sin\frac{s\pi x}{l}\cos(\omega_s t+\varphi_s). \tag{27}$$

В этой формуле дискретность исчезла, но это пока только видимость, так как u имеет смысл лишь для дискретных значений x.

Пусть теперь число ячеек растет неограниченно, т. е. $n\to\infty$. В пределе u становится непрерывной функцией *двух* величин: t и x. Легко убедиться, что эта функция удовлетворяет одному дифференциальному уравнению, но в частных производных, а именно уравнению

$$\frac{1}{L_1C_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{28}$$

где L_1 и C_1 — индуктивность и емкость на единицу длины. Этому дифференциальному уравнению в частных производных удовлетворяет вся совокупность функций (27), соответствующих различным значениям s.

Задачи о колебаниях сплошных систем приводят к составлению и решению дифференциальных уравнений в частных производных с добавлением краевых условий (краевые условия играют в математике чрезвычайно важную роль). Этот метод гораздо более могуч, чем методы, применяемые при рассмотрении дискретных систем со многими степенями свободы. Там мы умеем решать некоторые задачи только потому, что они обладают определенной симметрией, например в случае одинаковых звеньев. Заметим также, что методы, применяемые для решения задач о сплошных системах, охватывают и системы, имеющие больше одного измерения.

Таким образом, открывается целая новая область исследования, интересная и физически и математически, — колебания *сплошных* систем.

Мы знаем, что общим решением в случае дискретной системы (s принимает только конечное число значений: $s=1, 2, \ldots, n$) является

$$u=\sum_{s=1}^{n} a_s \sin\frac{ks\pi}{n+1}\cos(\omega_s t+\varphi_s). \tag{29}$$

Можно ожидать, что и в случае сплошной системы, когда s

принимает бесконечный ряд значений, общее решение может быть построено по аналогии с (29), т. е. имеет вид

$$u = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \sin\frac{s\pi x}{l}\cos(\omega_s t + \varphi_s). \tag{30}$$

Правильность этого предположения можно доказать. То, что решение (30) является общим, означает, что оно должно изображать — при соответствующем подборе величин a_s и φ_s — любой начальный вид функции u и ее производной по времени:

$$\left.\begin{aligned} u(0, x) &= \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos\varphi_s \sin\frac{s\pi x}{l}, \\ \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} &= \sum_{s=1}^{\infty} a_s\omega_s \sin\varphi_s \sin\frac{s\pi x}{l}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Мы говорили о кабеле. Но выражением, аналогичным (29), может быть описано также любое колебание однородной струны с закрепленными концами. Это нашел Бернулли, и он сделал отсюда такой вывод: можно задать начальную форму струны как угодно — изогнуть ее произвольным образом и отпустить. Но тогда формула (31) должна представлять *любую* функцию. Итак, если правильно, что любое колебание струны можно выразить как сумму колебаний вида (30), то любую функцию можно представить в виде ряда синусов. Здесь на основании физических соображений высказывается глубокое математическое утверждение.

Если емкость на единицу длины не постоянна, а изменяется с x, то решениями будут не синусы, а какие-то другие функции. Но все соображения о разложении произвольной функции на систему функций, являющихся решением задачи о колебаниях сплошной системы, остаются в силе. Для различных неоднородных систем получаются различные системы таких „собственных функций“. Учение о разложении заданной функции в ряд по собственным функциям рассматриваемой колебательной задачи имеет очень существенное значение и в математике и в физике.