§ 1. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ГЛАДКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Сначала объясним некоторые обозначения и термины: R^k обозначает k-мерное евклидово пространство; таким образом, точка $x \in R^k$ — это набор k действительных чисел

$$x = (x_1, \ldots, x_k).$$

Пусть $U \subset R^k$ и $V \subset R^l$ — открытые множества. Отображение f множества U в V (будем писать $f\colon U \to V$) называется *гладким*, если все частные производные $\partial^n f / \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}$ существуют и непрерывны.

Более общо, пусть $X \subset R^k$ и $Y \subset R^l$ — произвольные подмножества евклидовых пространств. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *гладким*, если для любой точки $x \in X$ существуют открытое множество $U \subset R^k$, содержащее x, и гладкое отображение $F\colon U \to R^l$, совпадающее с f на $U \cap X$ [1]).

Заметим, что если отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ гладкие, то композиция $g \circ f\colon X \to Z$ тоже будет гладким отображением. Тождественное отображение произвольного множества X автоматически является гладким.

Определение. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *диффеоморфизмом*, если f гомеоморфно [2])

---

[1]) Определение понятия «функция, гладкая на подмножестве евклидова пространства» у Милнора на первый взгляд кажется более широким, чем у Уоллеса (определения 2.2, 2.3), но с помощью подходящего разбиения единицы ([30], стр. 22, теорема 1) можно доказать их эквивалентность. Впрочем, для дальнейшего это не важно. — *Прим. ред.*

[2]) Отображение $f\colon X \to Y$ называется *гомеоморфизмом* множеств X и Y, если $f(X) = Y$, отображение f взаимно однозначно и как f, так и обратное к нему отображение f^{-1} непрерывны. — *Прим. ред.*

отображает X на Y, и оба отображения f и f^{-1} гладкие[1]).

Мы можем приблизительно охарактеризовать предмет дифференциальной топологии, сказав, что она изучает те свойства множества $X \subset R^k$, которые инвариантны относительно диффеоморфизмов.

Однако мы не хотим рассматривать совершенно произвольные множества X. Следующее определение выделяет особенно интересный и полезный класс.

Определение[2]). Подмножество $M \subset R^k$ называется *гладким многообразием размерности m* (или *гладким m-мерным многообразием*), если для каждой точки $x \in M$ существует окрестность $W \cap M$, которая диффеоморфна открытому подмножеству U евклидова пространства R^m.

Любой данный диффеоморфизм g: $U \to W \cap M$ называется *параметризацией* области $W \cap M$. (Обратный диффеоморфизм $W \cap M \to U$ называется *системой координат на $W \cap M$*.)

Иногда нам понадобится рассматривать многообразия размерности нуль. По определению M — *нульмерное* многообразие, если каждая точка $x \in M$ имеет окрестность $W \cap M$, состоящую только из нее самой.

Примеры. Единичная сфера S^2, состоящая из всех точек $(x, y, z) \in R^3$, удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, является гладким многообразием размерности 2. Действительно, диффеоморфизм

$$(x, y) \to \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right) \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 < 1$$

[1]) Согласно определению гладкости, если $x \in X \subset R^k$ и $y \in Y \subset R^l$, то существуют такие гладкие отображения g: $U \to R^l$ и h: $V \to R^k$, где U и V — некоторые окрестности точек x и y в R^k и R^l, что совпадают ограничения

$$g \mid U \cap X = f \mid U \cap X, \quad h \mid V \cap Y = f^{-1} \mid V \cap Y.$$

Обратите внимание, что g и h уже не обязаны быть обратными по отношению друг к другу. — *Прим. ред.*

[2]) С более общей точки зрения (см. Уоллеса), здесь определяются гладкие подмногообразия евклидова пространства. — *Прим. ред.*

параметризует область $z > 0$ на S^2. Поменяв ролями x, y, z и изменив знаки у переменных, мы получим подобные же параметризации областей $x > 0$, $y > 0$, $x < 0$, $y < 0$ и $z < 0$, которые покрывают сферу. Следовательно, S^2 — гладкое многообразие.

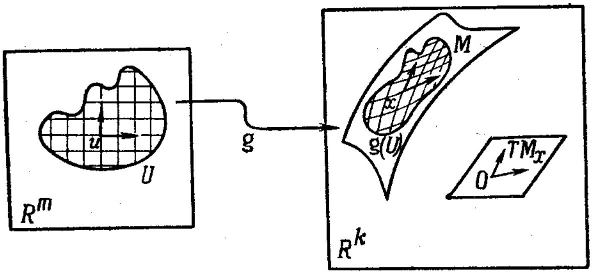

Рис. 1. Параметризация области на M.

Вообще сфера $S^{n-1} \subset R^n$, состоящая из всех точек $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условию $\sum x_i^2 = 1$, является гладким многообразием размерности $n - 1$. Например, $S^0 \subset R^1$ — многообразие, состоящее ровно из двух точек.

Множество всех точек $(x, y) \in R^2$, для которых $x \neq 0$ и $y = \sin(1/x)$, дает несколько более «дикий» пример гладкого многообразия.

Касательные пространства и производные

Для того чтобы определить понятие *производной*[1]) гладкого отображения $f\colon M \to N$, где M и N — гладкие многообразия, мы сначала свяжем с каждой точкой $x \in M \subset R^k$ линейное подпространство $TM_x \subset R^k$ размерности $m = \dim M$, называемое *касательным пространством* многообразия M в точке x. Тогда df_x будет некоторым линейным отображением TM_x в TN_y, где $y = f(x)$. Элементы векторного пространства TM_x называются *касательными векторами* к M в точке x.

[1]) Вместо производной столь же часто говорят о *дифференциале*. — *Прим. ред.*

Интуитивно можно представлять себе m-мерную плоскость в R^k, которая наилучшим образом аппроксимирует M вблизи x. Тогда TM_x — параллельная ей плоскость, проходящая через начало координат. (Ср. рис. 1 и 2.) Аналогично можно представлять себе неоднородное линейное отображение касательной плоскости в точке x в касательную плоскость в точке y,

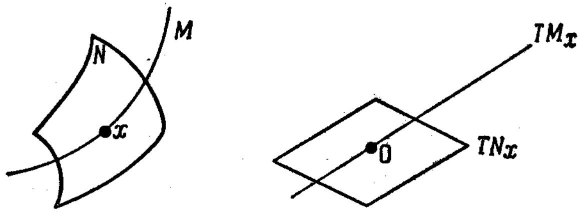

Рис. 2. Касательные пространства подмногообразия евклидова пространства.

которое лучше всего аппроксимирует f. После параллельного переноса обеих плоскостей в начало координат мы получаем df_x.

Прежде чем дать настоящее определение, мы должны изучить специальный класс отображений одного открытого множества в другое. Для любого открытого множества $U \subset R^k$ *касательное пространство* TU_x определяется как все векторное пространство R^k. Для произвольного гладкого отображения $f\colon U \to V$ *производная*

$$df_x\colon R^k \to R^l$$

определяется формулой

$$df_x(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t},$$

где $x \in U$, $h \in R^k$. Ясно, что $df_x(h)$ — линейная функция от h. (В действительности df_x — это такое линейное отображение, которое соответствует матрице $(\partial f_i/\partial x_j)_x$ порядка $l \times k$, составленной из первых частных производных, вычисленных в точке x.)

Отметим два основных свойства операции дифференцирования:

1 (производная сложной функции, или цепное правило). *Если* $f\colon U \to V$ *и* $g\colon V \to W$ — *гладкие отображения и* $f(x) = y$, *то*

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x.$$

Другими словами, каждому коммутативному треугольнику [1]) гладких отображений

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "g"] & \\ U \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & W \end{tikzcd}$$

где U, V и W — открытые подмножества векторных пространств R^k, R^l и R^m, соответствует коммутативный треугольник линейных отображений

$$\begin{tikzcd} & R^l \arrow[dr, "dg_y"] & \\ R^k \arrow[ur, "df_x"] \arrow[rr, "d(g \circ f)_x"'] & & R^m \end{tikzcd}$$

[1]) Пусть имеется диаграмма, состоящая из вершин и соединяющих их стрелок, причем каждой вершине сопоставлено определенное множество, а каждой стрелке, соединяющей две вершины, сопоставлено отображение соответствующих множеств. Например,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] & C \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "i"] & \\ & & E \\ A \arrow[uu, "f"] \arrow[r, "k"'] & D \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Диаграмма называется *коммутативной*, если всякий раз, когда от одной ее вершины к другой можно перейти по двум разным путям, двигаясь все время по стрелкам, совпадают композиции соответствующих отображений в соответствующем порядке (первым действует отображение, соответствующее первой стрелке пути, и т. д.). Например, коммутативность изображенной выше диаграммы означает, что

$$h \circ g \circ f = k, \quad i = j \circ h$$

(откуда уже следует $j \circ k = i \circ g \circ f = j \circ h \circ g \circ f$). — *Прим. ред.*

2. *Если I — тождественное отображение множества U, то dI_x — тождественное отображение пространства R^k. Более общо, если $U \subset U'$ — открытые множества и*

$$i\colon U \to U'$$

— отображение вложения[1]*, то di_x также является тождественным отображением пространства R^k.*

Заметим также следующее:

3. *Если $L\colon R^k \to R^l$ — линейное отображение, то*

$$dL_x = L.$$

В качестве простого следствия этих двух свойств мы имеем такое утверждение.

Утверждение. *Если f — диффеоморфизм открытого множества $U \subset R^k$ на открытое множество $V \subset R^l$, то k должно равняться l и линейное отображение*

$$df_x\colon R^k \to R^l$$

должно быть невырожденным.

Доказательство. Композиция $f^{-1} \circ f$ является тождественным отображением множества U. Следовательно, $d(f^{-1})_y \circ df_x$ — тождественное отображение пространства R^k. Аналогично, $df_x \circ d(f^{-1})_y$ — тождественное отображение пространства R^l. Таким образом, линейное отображение df_x имеет двустороннее обратное, откуда немедленно следует, что $k = l$.

Верно и частичное обращение этого утверждения. Пусть $f\colon U \to R^k$ — гладкое отображение, причем U открыто в R^k.

Теорема об обратной функции. *Если производная $df_x\colon R^k \to R^l$ невырожденна, то f диффеоморфно отображает любое достаточно малое открытое множество U', содержащее x, на открытое множество $f(U')$.*

---

[1] То есть отображение, сопоставляющее точке $x \in U$ ту же самую точку, рассматриваемую как элемент множества U'. — *Прим. ред.*

(Смотри Апостол [4, стр. 144] или Дьедонне [13, стр. 311].)

Заметим, что f в целом может и не быть взаимно однозначным, даже если при всех x производная df_x невырожденна. (Поучительный пример дается отображением $z \to \exp z$ комплексной плоскости в себя.)

Теперь мы определим *касательное пространство* TM_x для произвольного гладкого многообразия $M \subset R^k$. Выберем параметризацию

$$g\colon U \to M \subset R^k$$

окрестности $g(U)$ точки x на M, $g(u) = x$. Здесь U — открытое подмножество из R^m. Если рассматривать g как отображение множества U в R^k, то будет определена производная

$$dg_u\colon R^m \to R^k.$$

Положим TM_x *равным образу* $dg_u(R^m)$ (см. рис. 1).

Мы должны доказать, что это построение не зависит от выбора параметризации g. Пусть $h\colon V \to M \subset R^k$ — другая параметризация окрестности $h(V)$ точки x на M, и пусть $v = h^{-1}(x)$. Тогда $h^{-1} \circ g$ диффеоморфно отображает некоторую окрестность U_1 точки u на окрестность V_1 точки v. Коммутативная диаграмма гладких отображений открытых множеств

$$\begin{tikzcd} & R^k & \\ U_1 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h^{-1}\circ g"'] & & V_1 \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

влечет за собой коммутативную диаграмму линейных отображений

$$\begin{tikzcd} & R^k & \\ R^m \arrow[ur, "dg_u"] \arrow[rr, "\cong", "d(h^{-1}\circ g)_u"'] & & R^m \arrow[ul, "dh_v"'] \end{tikzcd}$$

откуда немедленно следует, что

$$\operatorname{Im}(dg_u) = \operatorname{Im}(dh_v).$$

Таким образом, TM_x корректно определено.

Теперь мы докажем, что TM_x является *m-мерным векторным пространством*. Ввиду гладкости отображения

$$g^{-1}\colon\ g(U) \to U$$

можно выбрать открытое множество W, содержащее x, и гладкое отображение $F\colon\ W \to R^m$, совпадающее с g^{-1} на $W \cap g(U)$. Полагая $U_0 = g^{-1}(W \cap g(U))$, мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dr, "F"] & \\ U_0 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\text{вложение}"] & & R^m \end{tikzcd}$$

и связанную с ней коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & R^k \arrow[dr, "dF_x"] & \\ R^m \arrow[ur, "dg_u"] \arrow[rr, "\text{тождественное}"] & & R^m \end{tikzcd}$$

Из последней диаграммы, очевидно, следует, что ранг отображения dg_u равен m. Следовательно, размерность его образа TM_x равна m.

Пусть $M \subset R^k$ и $N \subset R^l$ — два гладких многообразия, а

$$f\colon\ M \to N$$

— гладкое отображение и $f(x) = y$. Мы сейчас следующим образом определим *производную*

$$df_x\colon\ TM_x \to TN_y.$$

Так как f — гладкое отображение, то существуют содержащее точку x открытое множество W и гладкое отображение $F\colon W \to R^l$, совпадающее с f на $W \cap M$. *Определим* $df_x(v) = dF_x(v)$ *для всех* $v \in TM_x$.

Для обоснования корректности этого определения необходимо доказать, что $dF_x(v)$ принадлежит пространству TN_y и не зависит от конкретного выбора отображения F.

Сначала выберем параметризации

$$g\colon U \to M \subset R^k \quad \text{и} \quad h\colon V \to N \subset R^l$$

окрестностей $g(U)$ и $h(V)$ точек x и y соответственно. Уменьшив U, если потребуется, мы можем считать, что $g(U) \subset W$ и что f отображает $g(U)$ в $h(V)$. Таким образом, корректно определено гладкое отображение

$$h^{-1} \circ f \circ g\colon U \to V.$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму гладких отображений открытых множеств

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] & R^l \\ U \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1}\circ f\circ g"] & V \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Переходя к производным, мы получим коммутативную диаграмму линейных отображений

$$\begin{tikzcd} R^k \arrow[r, "dF_x"] & R^l \\ R^m \arrow[u, "dg_u"] \arrow[r, "d(h^{-1}\circ f\circ g)_u"] & R^m, \arrow[u, "dh_v"'] \end{tikzcd}$$

где $u = g^{-1}(x)$, $v = h^{-1}(y)$.

Из этой диаграммы немедленно следует, что dF_x переводит $TM_x = \operatorname{Im}(dg_u)$ в $TN_y = \operatorname{Im}(dh_v)$. Кроме того, отображение df_x не зависит от конкретного выбора отображения F, так как мы можем получить то же самое линейное отображение, обходя основание этой диаграммы, а именно:

$$df_x = dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u \circ (dg_u)^{-1}.$$

Тем самым доказана корректность определения производной.

Как и выше, операция дифференцирования обладает двумя основными свойствами:

1 (цепное правило). *Если* f: $M \to N$ *и* g: $N \to P$ — *гладкие отображения и* $f(x) = y$, *то*

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x.$$

2. *Если* I — *тождественное отображение многообразия* M, *то* dI_x — *тождественное отображение касательного пространства* TM_x. *Более общо, если* $M \subsetneq N$ *при помощи отображения вложения* i, *то* $TM_x \subsetneq TN_y$ *при помощи отображения вложения* di_x (см. рис. 2).

Доказательства этих свойств очевидны.

Как и раньше, эти два свойства дают следующее

Утверждение. *Если* f: $M \to N$ — *диффеоморфизм, то* df_x: $TM_x \to TN_y$ — *изоморфизм векторных пространств. В частности, размерность многообразия* M *должна быть равна размерности многообразия* N [1]).

---

[1]) Полезно иметь в виду, что отображение $f: M \to N$ гладких многообразий $M \subset R^k$ и $N \subset R^l$ будет гладким тогда и только тогда, когда будут гладкими его представления в локальных координатах; последнее означает, что если g: $U \to M$ и h: $V \to N$ — две параметризации, причем $f \circ g(U) \subset h(V)$, то отображение $h^{-1} \circ f \circ g$: $U \to V$ — гладкое. Действительно, доказывая корректность определения производной, Милнор попутно отмечает гладкость отображения $h^{-1} \circ f \circ g$ для гладких f. Обратно, пусть известно, что представления отображения $f: M \to N$ в локальных координатах гладкие. Для $x \in M$ мы должны указать такую окрестность W в R^k и гладкое отображение ψ: $W \to R^l$, что $\psi | W \cap M = f | W \cap M$. По определению параметризации существуют такие окрестность $W \ni x$ и гладкое отображение φ: $W \to R^m$, что $\varphi | W \cap M = g^{-1} | W \cap M$. Можно считать, что $\varphi(W) \subset U$. Рассматривая отображения

$$\begin{array}{ccccccccccc} W & \xrightarrow{\varphi} & U & \xrightarrow{g} & g(U) & \xrightarrow{f} & h(V) & \xrightarrow{h^{-1}} & V & \xrightarrow{h} & R^l \\ & & & & \cap & & \cap & & & & \\ & & & & M & \xrightarrow{f} & N & & & & \end{array}$$

легко понять, что за ψ можно взять композицию $h \circ (h^{-1} \circ f \circ g) \circ \varphi$; ее гладкость следует из гладкости отображений φ, $h^{-1} \circ f \circ g$ и h.

Обычно гладкость отображения одного гладкого многообразия в другое определяется именно как гладкость представления данного отображения в локальных координатах. Милнор далее фактически тоже пользуется этим определением. — *Прим. ред.*

Регулярные значения

Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение многообразий одинаковой размерности[1]). Назовем точку $x \in M$ *регулярной*, если дифференциал df_x невырожден. Из теоремы об обратной функции следует, что в этом случае f диффеоморфно отображает некоторую окрестность точки $x \in M$ на открытое множество многообразия N. Точка $y \in N$ называется *регулярным значением*, если $f^{-1}(y)$ состоит только из регулярных точек (в частности, если $f^{-1}(y)$ пусто).

Если дифференциал df_x вырожден, то x называется *критической точкой* отображения f, а ее образ $f(x)$ — *критическим значением*. Таким образом, любая точка $y \in N$ является либо регулярным, либо критическим значением в зависимости от того, содержит или не содержит $f^{-1}(y)$ критическую точку.

Отметим, что *если M компактно, а $y \in N$ — регулярное значение, то $f^{-1}(y)$ — конечное (возможно, пустое) множество точек.*

Множество $f^{-1}(y)$, будучи замкнутым подмножеством компакта M, само является компактом; кроме того, $f^{-1}(y)$ дискретно[2]), поскольку f взаимно однозначно в окрестности любой точки $x \in f^{-1}(y)$.

Для гладкого отображения $f\colon M \to N$, где M — компакт, и регулярного значения $y \in N$ *обозначим через $\# f^{-1}(y)$ число точек в $f^{-1}(y)$*. Следует отметить, что $\# f^{-1}(y)$ локально постоянна как функция y (здесь y пробегает только регулярные значения!), т. е. *у точки y существует такая окрестность $V \subset N$, что $\# f^{-1}(y) = \# f^{-1}(y')$ для всех $y' \in V$.* [Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — все точки из $f^{-1}(y)$; выберем попарно непересекающиеся окрестности $U_1, \ldots, U_k$ этих точек, которые диффеоморфно отображаются на окрестности $V_1, \ldots, V_k$ в многообразии N. Мы тогда можем положить

$$V = V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_k \setminus f(M \setminus \bigcup U_i).]$$

---

[1]) Это ограничение будет снято в § 2.

[2]) То есть все его точки — изолированные. — *Прим. ред.*

Основная теорема алгебры

В качестве приложения этих понятий мы докажем основную теорему алгебры: *каждый комплексный многочлен* $P(z)$, *отличный от константы, должен где-то обращаться в нуль.*

Для доказательства надо прежде всего перейти от плоскости комплексных чисел к компактному многообразию. Рассмотрим единичную сферу $S^2 \subset R^3$ и стереографическую проекцию

$$h_+ \colon S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \to R^2 \times 0 \subset R^3$$

из «северного полюса» $(0, 0, 1)$ сферы S^2 (см. рис. 3). Мы будем отождествлять $R^2 \times 0$ с плоскостью комплексных чисел.

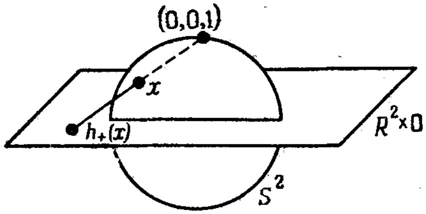

Рис. 3. Стереографическая проекция.

Полиномиальному отображению P плоскости $R^2 \times 0$ в себя соответствует отображение f сферы S^2 в себя, где

$$f(x) = h_+^{-1} \circ P \circ h_+(x) \quad \text{при} \quad x \neq (0, 0, 1),$$
$$f(0, 0, 1) = (0, 0, 1).$$

Хорошо известно, что получившееся отображение f является гладким, даже в окрестности «северного полюса». Чтобы убедиться в этом, введем стереографическую проекцию h_- из «южного полюса» $(0, 0, -1)$ и положим

$$Q(z) = h_- \circ f \circ h_-^{-1}(z).$$

Из элементарной геометрии следует, что

$$h_+ \circ h_-^{-1}(z) = z/|z|^2 = 1/\bar{z}.$$

Если $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$, то краткий подсчет показывает, что

$$Q(z) = z^n / (\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \ldots + \bar{a}_n z^n).$$

Следовательно, отображение Q гладко в окрестности точки 0, поэтому отображение $f = h_-^{-1} \circ Q \circ h_-$ гладко в окрестности точки (0, 0, 1).

Теперь заметим, что f имеет только конечное число критических точек, ибо P не является локальным диффеоморфизмом только в корнях производной $P'(z) = \sum a_{n-j} j z^{j-1}$, а так как P' — не тождественный нуль, то у него существует только конечное число корней. Множество регулярных значений отображения f связно (ибо это сфера, из которой уделено конечное множество точек). Следовательно, локально постоянная функция $\# f^{-1}(y)$ должна быть постоянной на этом множестве. Так как $\# f^{-1}(y)$ не может быть нулевой всюду, то это число нигде не равно нулю. Итак, f — отображение «на», а многочлен P должен иметь корень.

§ 2. ТЕОРЕМА САРДА И БРАУНА

В общем случае нельзя, конечно, надеяться на то, что множество критических значений гладкого отображения окажется конечным. Но все-таки это множество мало в смысле, указанном в следующей теореме, которую, следуя более ранней работе А. П. Морса, в в 1942 году доказал Сард (см. [32], [25]).

Теорема. *Пусть $f\colon U \to R^n$ — гладкое отображение, определенное на открытом множестве $U \subset R^m$, а*

$$C = \{x \in U \mid \text{ранг}\, df_x < n\}.$$

Тогда образ $f(C) \subset R^n$ имеет нулевую меру Лебега[1] [2].

[1]) Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ можно покрыть $f(C)$ n-мерными кубиками, общий объем которых меньше ε.

[2]) Это было доказано Брауном в 1935 г. Этот результат был вновь открыт Дубовицким в 1953 г. и Томом в 1954 г. (см. [7], [12], [40]).