Если $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$, то краткий подсчет показывает, что

$$Q(z) = z^n/(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \ldots + \bar{a}_n z^n).$$

Следовательно, отображение $Q$ гладко в окрестности точки 0, поэтому отображение $f = h_-^{-1} \circ Q \circ h_-$ гладко в окрестности точки $(0, 0, 1)$.

Теперь заметим, что $f$ имеет только конечное число критических точек, ибо $P$ не является локальным диффеоморфизмом только в корнях производной $P'(z) = \sum a_{n-j} j z^{j-1}$, а так как $P'$ — не тождественный нуль, то у него существует только конечное число корней. Множество регулярных значений отображения $f$ связно (ибо это сфера, из которой уделено конечное множество точек). Следовательно, локально постоянная функция $\# f^{-1}(y)$ должна быть постоянной на этом множестве. Так как $\# f^{-1}(y)$ не может быть нулевой всюду, то это число нигде не равно нулю. Итак, $f$ — отображение «на», а многочлен $P$ должен иметь корень.

## § 2. ТЕОРЕМА САРДА И БРАУНА

В общем случае нельзя, конечно, надеяться на то, что множество критических значений гладкого отображения окажется конечным. Но все-таки это множество мало в смысле, указанном в следующей теореме, которую, следуя более ранней работе А. П. Морса, в в 1942 году доказал Сард (см. [32], [25]).

Теорема. *Пусть $f\colon U \to R^n$ — гладкое отображение, определенное на открытом множестве $U \subset R^m$, а*

$$C = \{x \in U \mid \text{ранг}\, df_x < n\}.$$

*Тогда образ $f(C) \subset R^n$ имеет нулевую меру Лебега* [1] [2].

---

[1]) Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ можно покрыть $f(C)$ $n$-мерными кубиками, общий объем которых меньше $\varepsilon$.

[2]) Это было доказано Брауном в 1935 г. Этот результат был вновь открыт Дубовицким в 1953 г. и Томом в 1954 г. (см. [7], [12], [40]).

Так как множество меры нуль не может содержать внутри себя непустое открытое множество, то дополнение $R^n \setminus f(C)$ должно быть всюду плотно в $R^n$.

Эта теорема будет доказана в § 3. Для доказательства существенно наличие у $f$ большого числа производных (см. Уитни [41])[1].

Нас будет интересовать главным образом случай $m \geqslant n$. Если $m < n$, то, очевидно, $C = U$. Следовательно, в этом случае теорема просто утверждает, что $f(U)$ имеет меру нуль.

Более общо, рассмотрим гладкое отображение $f: M \to N$ многообразия размерности $m$ в многообразие размерности $n$. Обозначим через $C$ множество всех таких $x \in M$, что производная

$$df_x: TM_x \to TN_{f(x)}$$

имеет ранг, меньший $n$ (т. е. $df_x$ не является отображением «на»). Тогда $C$ будет называться множеством *критических точек*, $f(C)$ — множеством *критических значений*, а дополнение $N \setminus f(C)$ — множеством *регулярных значений* отображения $f$ (это согласуется с нашими прежними определениями в случае $m = n$)[2]. Так как $M$ можно покрыть счетным множеством

---

[1]) Требуемый класс гладкости таков: $f \in C^k$, где

$$(*) \qquad k = \max(0, m - n) + 1.$$

Именно в таком виде теорема доказана Сардом и Дубовицким. Доказательство имеется, например, в [35]. Уитни [41] и Д. Е. Меньшов показали, что предположения гладкости нельзя ослабить: в $R^m$ существует функция класса $C^{m-1}$ с $f(C) = R$. (Этот пример относится к случаю $n = 1$; из него нетрудно вывести существование соответствующих примеров и при бóльших $n$.) Если, с другой стороны, предполагать бóльшую гладкость, чем в $(*)$, то, как доказано в более поздних работах Сарда и Дубовицкого, утверждение о «малости» $f(C)$ можно несколько усилить: в зависимости от $m$, $n$ и класса гладкости $f$ эту «малость» можно характеризовать в терминах так называемых $r$-мерных мер Хаусдорфа. Впрочем, для чисто топологических целей все эти тонкости не нужны. — *Прим. ред.*

[2]) Наконец, точка $x \in M$ — *регулярная*, если в этой точке ранг $df_x = n$. Следует предупредить, что многие авторы исполь-

окрестностей, каждая из которых диффеоморфна открытому подмножеству из $R^m$, то мы имеем

Следствие (Браун). *Множество регулярных значений гладкого отображения $f$: $M \to N$ всюду плотно в $N$.*

Для того чтобы использовать это замечание, нам необходима следующая

Лемма 1. *Если $f$: $M \to N$ — гладкое отображение многообразия размерности $m$ в многообразие размерности $n$, а $y \in N$ — регулярное значение отображения $f$, то множество $f^{-1}(y) \subset M$ — гладкое многообразие размерности $m - n$* [1].

Доказательство. Пусть $x \in f^{-1}(y)$. Так как $y$ — регулярное значение, то дифференциал $df_x$ должен отображать $TM_x$ на $TM_y$. Поэтому ядро $\mathfrak{N} \subset \subset TM_x$ отображения будет $(m - n)$-мерным векторным пространством.

Пусть $M \subset R^k$. Выберем линейное отображение $L$: $R^k \to R^{m-n}$, невырожденное на подпространстве $\mathfrak{N} \subset TM_x \subset R^k$. Определим

$$F\colon M \to N \times R^{m-n}$$

как $F(\xi) = (f(\xi), L(\xi))$. Дифференциал $dF_x$, очевидно, задается формулой

$$dF_x(v) = (df_x(v), L(v)).$$

Поэтому он невырожден. Следовательно, $F$ диффеоморфно отображает некоторую окрестность $U$ точки $x$ на окрестность $V$ точки $(y, L(x))$. Отметим, что при отображении $F$ множество $f^{-1}(y)$ является прообразом гиперплоскости $y \times R^{m-n}$. При этом $F$ диффеоморфно отображает $f^{-1}(y) \cap U$ на $(y \times R^{m-n}) \cap V$.

---

зуют этот термин в другом смысле, называя регулярными те точки, где ранг $df_x = \min(m, n)$; тогда, естественно, и при $m < n$ могут быть регулярные точки. — *Прим. ред.*

[1] Если только множество $f^{-1}(y)$ непусто. Эта тривиальная оговорка в дальнейшем часто подразумевается, но не приводится. Читателю предоставляется проследить, где она нужна, и убедиться, что по существу она ничего не меняет. — *Прим. ред.*

Это доказывает, что $f^{-1}(y)$ — гладкое многообразие размерности $m-n$.

В качестве примера мы можем дать простое доказательство того, что единичная сфера $S^{m-1}$ является гладким многообразием. Рассмотрим функцию

$$f\colon R^m \to R, \quad f(x) = x_1^2 + \ldots + x_m^2.$$

Любое $y \neq 0$ является регулярным значением, а гладкое многообразие $f^{-1}(1)$ — это единичная сфера.

Если $M'$ — многообразие, содержащееся в $M$, то, как уже было замечено, $TM'_x$ — подпространство пространства $TM_x$ при $x \in M'$. Тогда ортогональное дополнение подпространства $TM'_x$ в $TM_x$ будет $(m - m')$-мерным векторным пространством, которое называется пространством *нормальных к* $M'$ *векторов* (*из*) $M$ *в точке* $x$.

В частности, пусть $M' = f^{-1}(y)$, где $y$ — регулярное значение отображения $f\colon M \to N$.

Лемма 2. *Ядро производной* $df_x\colon TM_x \to TN_y$ *в точности совпадает с касательным пространством* $TM'_x \subset TM_x$ *подмногообразия* $M' = f^{-1}(y)$. *Следовательно,* $df_x$ *изоморфно отображает ортогональное дополнение к* $TM'_x$ *на* $TN_y$.

Доказательство. Из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{i} & M \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ y & \longrightarrow & N \end{array}$$

мы видим, что $df_x$ переводит подпространство $TM'_x \subset TM_x$ в нуль. Сравнение размерностей показывает, что $df_x$ *изоморфно отображает пространство нормальных к* $M'$ *векторов на* $TN_y$.

## Многообразия с краем

Усилив предыдущие леммы, можно распространить их на случай отображений гладких «многообразий с краем». Сперва рассмотрим замкнутое полупространство

$$H^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in R^m \mid x_m \geqslant 0\}.$$

По определению *край* $\partial H^m$ — это гиперплоскость $R^{m-1} \times 0 \subset R^m$.

Определение. Подмножество $X \subset R^k$ называется *гладким $m$-мерным многообразием с краем*, если для каждого $x \in X$ существует окрестность $U \cap X$, диффеоморфная открытому подмножеству $V \cap H^m$ полупространства $H^m$[1]). Край $\partial X$ — это множество всех тех точек из $X$, которые под действием таких диффеоморфизмов переходят в точки $\partial H^m$.

Не трудно показать, что $\partial X$ — корректно определенное гладкое многообразие размерности $m-1$. *Внутренность* $X$ многообразия с краем $X$, т. е. $X \setminus \partial X$, является гладким многообразием размерности $m$.

Касательное пространство $TX_x$ определяется так же, как в § 1; даже если $x$ — точка края, то $TX_x$ — это все $m$-мерное векторное пространство.

Вот один из методов для построения примеров. Пусть $M$ — многообразие без края, и пусть для функции $g\colon M \to R$ нуль является регулярным значением.

Лемма 3. *Множество всех $x \in M$, для которых $g(x) \geqslant 0$, является гладким многообразием с краем; край есть $g^{-1}(0)$.*

Доказательство в точности подобно доказательству леммы 1.

---

[1]) Здесь использована терминология, согласно которой открытое подмножество множества $A$, расположенного в евклидовом пространстве $R^m$, — это пересечение множества $A$ с каким-нибудь открытым подмножеством $U \subset R^m$; такое пересечение, вообще говоря, не будет открытым подмножеством евклидова пространства. (Иногда говорят, что $A \cap U$ *относительно открыто* в $A$.) Аналогично, если $F \subset R^m$ — замкнутое множество, то говорят, что $F \cap A$ *замкнуто* в $A$. (Основания для такой терминологии см. в первом параграфе Уоллеса.)

Как понимать в данном контексте термин «диффеоморфизм», ясно из сказанного в начале § 1. — *Прим. ред.*

Пример. *Единичный шар* $D^m$, состоящий из всех таких $x \in R^m$, что

$$1 - \sum x_i^2 \geqslant 0,$$

является гладким многообразием с краем, равным $S^{m-1}$.

Сейчас мы рассмотрим гладкое отображение $f\colon X \to N$ $m$-мерного многообразия с краем в $n$-мерное многообразие, причем $m > n$.

Лемма 4. *Если $y \in N$ является регулярным значением как для $f$, так и для ограничения $f|\partial X$, то $f^{-1}(y) \subset X$ является $(m-n)$-мерным гладким многообразием с краем. Далее, край $\partial(f^{-1}(y))$ в точности равен $f^{-1}(y) \cap \partial X$.*

Доказательство. Так как нам нужно доказать локальное свойство, то достаточно рассмотреть только частный случай — отображение $f\colon H^m \to R^n$, для которого $y \in R^n$ является регулярным значением. Пусть $\bar{x} \in f^{-1}(y)$. Если $\bar{x}$ — внутренняя точка, то, как и раньше, $f^{-1}(y)$ в окрестности точки $\bar{x}$ является гладким многообразием.

Если $\bar{x}$ — точка края, то выберем гладкое отображение $g\colon U \to R^n$, определенное всюду в некоторой окрестности $U$ точки $\bar{x}$ в $R^m$ и совпадающее с $f$ на $U \cap H^m$. Уменьшив, если это необходимо, окрестность $U$, мы можем считать, что $g$ не имеет критических точек. Отсюда $g^{-1}(y)$ — гладкое многообразие размерности $m-n$.

Пусть $\pi\colon g^{-1}(y) \to R$ означает проекцию на координатную ось

$$\pi(x_1, \ldots, x_m) = x_m.$$

Мы утверждаем, что 0 является регулярным значением для $\pi$. Действительно, касательное пространство к $g^{-1}(y)$ в точке $x \in \pi^{-1}(0)$ совпадает с ядром производной

$$dg_x = df_x\colon R^m \to R^n,$$

а предположение о регулярности в точке $x$ ограничения $f|\partial X$, т. е. (в рассматриваемом частном случае) $f|\partial H^m$, гарантирует нам, что это пространство не может целиком содержаться в $R^{m-1}\times 0$. Следовательно, множество $g^{-1}(y)\cap H^m = f^{-1}(y)\cap U$, состоящее из всех таких $x\in g^{-1}(y)$, что $\pi(x)\geqslant 0$, является, согласно лемме 3, гладким многообразием с краем $\pi^{-1}(0)$. Это завершает доказательство.

## Теорема Брауэра о неподвижной точке

Мы сейчас используем этот результат для доказательства леммы, являющейся ключевой для классической теоремы Брауэра о неподвижной точке. Пусть $X$ — компактное многообразие с краем.

Лемма 5. *Не существует гладкого отображения $f\colon X\to\partial X$, которое оставляло бы каждую точку края на месте*[1].

Доказательство (следуя Хиршу). Предположим, что такое отображение $f$ существует. Пусть $y\in\partial X$ — регулярное значение отображения $f$. Так как $y$, конечно, является регулярным значением для тождественного отображения $f|\partial X$, то $f^{-1}(y)$ — гладкое одномерное многообразие с краем, состоящим из одной точки:

$$f^{-1}(y)\cap\partial X=\{y\}.$$

[1]) Подмножество $B\subset A$ называется *ретрактом* множества $A$, если существует непрерывное отображение $f\colon A\to B$, оставляющее каждую точку множества $B$ на месте (пример: сторона квадрата). Это отображение называется *ретрагирующим отображением*, или *ретракцией*.

Если $A$, $B$ — гладкие многообразия и ретрагирующее отображение тоже является гладким, то $B$ можно назвать *гладким ретрактом* многообразия.

Таким образом, лемма 5 утверждает, что край компактного многообразия не является гладким ретрактом последнего. На самом деле он не является и просто ретрактом, без всяких условий гладкости. Читатель, решивший первые несколько задач, приведенных в конце книги, без труда докажет это самостоятельно. — *Прим. ред.*

Многообразие $f^{-1}(y)$ компактно, а так как компактными одномерными многообразиями являются только объединения непересекающихся окружностей[1]) и дуг[2]), то край $\partial(f^{-1}(y))$ должен состоять из четного числа точек. Это противоречие доказывает лемму.

В частности, единичный шар

$$D^n = \{x \in R^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$$

является компактным многообразием, краем которого служит сфера $S^{n-1}$. Следовательно, как частный случай мы доказали, что *тождественное отображение сферы* $S^{n-1}$ *нельзя продолжить до гладкого отображения* $D^n \to S^{n-1}$.

Лемма 6. *Любое гладкое отображение* $g\colon D^n \to D^n$ *имеет неподвижную точку* (т. е. точку $x \in D^n$, для которой $g(x) = x$).

Доказательство. Предположим, что $g$ не имеет неподвижной точки. Для $x \in D^n$ определим $f(x) \in S^{n-1}$ как точку сферы $S^{n-1}$, лежащую на соединяющей $x$ с $g(x)$ прямой и более близкую к $x$, нежели к $g(x)$ (рис. 4). Тогда $f\colon D^n \to S^{n-1}$ — гладкое отображение и $f(x) = x$ при $x \in S^{n-1}$, что противоречит лемме 5. (В гладкости $f$ можно убедиться, получив путем непосредственной выкладки, что $f(x) = x + tu$, где

$$u = \frac{x - g(x)}{\| x - g(x) \|}, \quad t = -x \cdot u + \sqrt{1 - x \cdot x + (x \cdot u)^2},$$

причем выражение под знаком радикала всегда положительно. Здесь и далее $\| x \|$ означает евклидову длину $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, а $x \cdot u$ — скалярное произведение $x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$.)

---

[1]) «Окружность», конечно, означает не окружность в смысле евклидовой метрики, а диффеоморфное ей одномерное многообразие, т. е. гладкую замкнутую кривую без самопересечений. — *Прим. ред.*

[2]) Доказательство дано в приложении.

Теорема Брауэра о неподвижной точке. *Любое непрерывное отображение $G$: $D^n \to D^n$ имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Мы сведем эту теорему к лемме 6, аппроксимируя $G$ гладким отображением. Согласно аппроксимационной теореме Вейерштрасса[1]), для любого $\varepsilon > 0$ существует такое полиномиальное отображение $P_1$: $R^n \to R^n$, что $\| P_1(x) -$

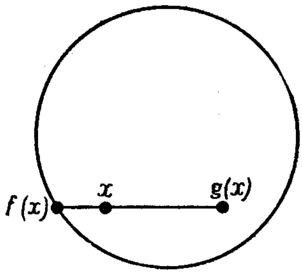


Рис. 4.

$- G(x) \| < \varepsilon$ при $x \in D^n$. Однако $P_1$ может переводить точки из $D^n$ в точки, находящиеся вне $D^n$. Этого можно избежать, положив

$$P(x) = P_1(x)/(1 + \varepsilon).$$

Ясно, что $P$ отображает $D^n$ в $D^n$ и $\| P(x) - G(x) \| < 2\varepsilon$ при $x \in D^n$.

Предположим, что $G(x) \neq x$ для всех $x \in D^n$. Тогда непрерывная функция $\| G(x) - x \|$ должна иметь на $D^n$ минимум $\mu > 0$. Выберем, как показано выше, такое полиномиальное отображение $P$: $D^n \to D^n$, что $\|P(x) - G(x)\| < \mu$ при всех $x \in D^n$. Тогда $P$ — гладкое отображение шара $D^n$ в себя, не имеющее неподвижных точек. Это противоречит лемме 6, чем и завершается доказательство теоремы.

Использованная здесь процедура часто применяется в более общих ситуациях: чтобы доказать

[1]) См., например, Дьедонне [13, стр. 160].

некоторое утверждение о непрерывных отображениях, мы сначала доказываем этот результат для гладких отображений, а затем пытаемся использовать аппроксимационную теорему, чтобы перейти к непрерывному случаю. (См. § 8, задача 4.)

## § 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ САРДА[1])

Сначала напомним ее формулировку.

Теорема Сарда. *Пусть $f$: $U \to R^p$ — гладкое отображение, причем множество $U$ открыто в $R^n$, и пусть $C$ — множество его критических точек, т. е. множество всех тех $x \in U$, для которых*

$$\text{ранг}\, df_x < p.$$

*Тогда $f(C) \subset R^p$ имеет меру нуль.*

Замечание. Случай $n \leqslant p$ сравнительно прост (см. де Рам [30, стр. 30]). Однако мы дадим универсальное доказательство, в котором этот случай выглядит столь же плохим, как и остальные.

Доказательство будет вестись индукцией по $n$. Заметим, что утверждение имеет смысл при $n \geqslant 0$ и $p \geqslant 1$. (По определению $R^0$ состоит из одной точки.) Начнем индукцию: теорема, несомненно, верна при $n = 0$.

Пусть $C_1 \subset C$ означает множество всех таких $x \in U$, для которых первый дифференциал $df_x$ равен нулю. Вообще пусть $C_i$ означает множество таких $x \in U$, что все частные производные функции $f$ порядка $\leqslant i$ обращаются в точке $x$ в нуль. Таким образом, мы имеем убывающую последовательность замкнутых множеств

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots .$$

Доказательство будет разбито на три шага.

---

[1]) Наше доказательство основывается на рассуждении, приведенном у Понтрягина в [29]. Детали у нас несколько проще из-за того, что мы предполагаем отображение $f$ бесконечно дифференцируемым.