некоторое утверждение о непрерывных отображениях, мы сначала доказываем этот результат для гладких отображений, а затем пытаемся использовать аппроксимационную теорему, чтобы перейти к непрерывному случаю. (См. § 8, задача 4.)

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ САРДА [1])

Сначала напомним ее формулировку.

Теорема Сарда. *Пусть $f\colon U \to R^p$ — гладкое отображение, причем множество U открыто в R^n, и пусть C — множество его критических точек, т. е. множество всех тех $x \in U$, для которых*

$$\text{ранг}\, df_x < p.$$

Тогда $f(C) \subset R^p$ имеет меру нуль.

Замечание. Случай $n \leqslant p$ сравнительно прост (см. де Рам [30, стр. 30]). Однако мы дадим универсальное доказательство, в котором этот случай выглядит столь же плохим, как и остальные.

Доказательство будет вестись индукцией по n. Заметим, что утверждение имеет смысл при $n \geqslant 0$ и $p \geqslant 1$. (По определению R^0 состоит из одной точки.) Начнем индукцию: теорема, несомненно, верна при $n = 0$.

Пусть $C_1 \subset C$ означает множество всех таких $x \in U$, для которых первый дифференциал df_x равен нулю. Вообще пусть C_i означает множество таких $x \in U$, что все частные производные функции f порядка $\leqslant i$ обращаются в точке x в нуль. Таким образом, мы имеем убывающую последовательность замкнутых множеств

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots .$$

Доказательство будет разбито на три шага.

[1]) Наше доказательство основывается на рассуждении, приведенном у Понтрягина в [29]. Детали у нас несколько проще из-за того, что мы предполагаем отображение f бесконечно дифференцируемым.

1-й шаг. Образ $f(C \setminus C_1)$ имеет меру нуль.

2-й шаг. Образ $f(C_i \setminus C_{i+1})$ имеет меру нуль при $i \geqslant 1$.

3-й шаг. Образ $f(C_k)$ имеет меру нуль для достаточно большого k.

(Замечание. Если f — действительное аналитическое отображение, то пересечение всех C_i пусто, кроме того случая, когда f постоянно на целой компоненте множества U. Следовательно, в этом случае достаточно сделать первые два шага.)

Доказательство. 1-й шаг. Этот первый шаг, по-видимому, самый трудный. Мы можем считать, что $p \geqslant 2$, так как $C = C_1$ при $p = 1$. Нам понадобится хорошо известная теорема Фубини, которая утверждает, что *измеримое множество*

$$A \subset R^p = R^1 \times R^{p-1}$$

должно иметь меру нуль, если оно пересекается с каждой гиперплоскостью (const) $\times R^{p-1}$ *по множеству* $(p-1)$*-мерной меры нуль* [1]) [2]).

Для каждого $\bar{x} \in C \setminus C_1$ мы ниже найдем такую открытую окрестность $V \subset R^n$, что $f(V \cap C)$ имеет меру нуль. А так как $C \setminus C_1$ покрывается счетным числом таких окрестностей, то отсюда непосредственно будет следовать, что мера $f(C \setminus C_1)$ равна нулю.

Так как $\bar{x} \notin C_1$, то существует некоторая частная производная, например $\partial f_1 / \partial x_1$, которая отлична от нуля в точке $\bar{x}$. Рассмотрим отображение $h\colon U \to R^n$,

---

[1]) Простое доказательство можно найти у Стернберга [38, стр. 60—61] (там же есть и другое доказательство теоремы Сарда (стр. 53—64)). Стернберг предполагает, что A — компакт, но общий случай легко следует из этого частного.

[2]) Утверждение, выделенное курсивом, представляет собой весьма частный случай теоремы Фубини, которая в полном объеме здесь не понадобится. Читатель, не знакомый с теорией меры, может вместо слов «измеримое множество» подставить «множество, являющееся объединением счетного числа компактных множеств», ибо только к такому множеству данное утверждение будет применяться. — *Прим. ред.*

определенное формулой

$$h(x)=(f_1(x),\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Так как производная $dh_{\bar{x}}$ невырожденна, то h диффеоморфно отображает некоторую окрестность V точки $\bar{x}$ на открытое множество V'. Композиция $g = f\circ h^{-1}$ будет отображать V' в R^p. Заметим, что множество C' критических точек отображения g есть в точности $h(V\cap C)$; следовательно, множество $g(C')$ критических значений для g совпадает с $f(V\cap C)$.

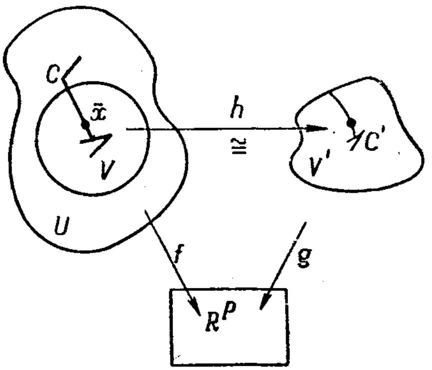

Рис. 5. Построение отображения g.

Заметим, что для каждой точки $(t,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\in V'$ точка $g(t,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ принадлежит гиперплоскости $t\times R^{p-1}\subset R^p$, т. е. g переводит гиперплоскости в гиперплоскости. Пусть

$$g^t\colon\ (t\times R^{n-1})\cap V'\to t\times R^{p-1}$$

обозначает ограничение отображения g на область в гиперплоскости $t\times R^{n-1}$. Заметим, что точка гиперплоскости $t\times R^{n-1}$ является критической для g^t тогда и только тогда, когда она — критическая точка для g, так как матрица частных производных отображения g представляется в виде

$$(\partial g_i/\partial x_j)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ * & (\partial g_i^t/\partial x_j)\end{pmatrix}.$$

В соответствии с предположением индукции, множество критических значений для g^t имеет меру нуль в $t \times R^{p-1}$. Поэтому множество критических значений для g пересекается с каждой гиперплоскостью по множеству меры нуль. Это множество $g(C')$ измеримо, так как оно может быть представлено в виде счетного объединения компактных подмножеств. Значит, по теореме Фубини множество

$$g(C') = f(V \cap C)$$

имеет меру нуль, и первый шаг завершен.

2-й шаг. Для каждого $\bar{x} \in C_k \setminus C_{k+1}$ существует $(k+1)$-я производная $\partial^{k+1} f_r / \partial x_{s_1} \ldots \partial x_{s_{k+1}}$, отличная от нуля в точке $\bar{x}$. Стало быть, функция

$$w(x) = \partial^k f_r / \partial x_{s_2} \ldots \partial x_{s_{k+1}}$$

обращается в точке $\bar{x}$ в нуль, но $\partial w / \partial x_{s_1}$ не равна нулю. Предположим для определенности, что $s_1 = 1$. Тогда отображение $h\colon U \to R^n$, определенное по формуле

$$h(x) = (w(x), x_2, \ldots, x_n),$$

диффеоморфно отображает некоторую окрестность V точки $\bar{x}$ на открытое множество V'. Заметим, что h переводит $C_k \cap V$ в гиперплоскость $0 \times R^{n-1}$. Опять рассмотрим

$$g = f \circ h^{-1}\colon V' \to R^p.$$

Пусть

$$\bar{g}\colon (0 \times R^{n-1}) \cap V' \to R^p$$

обозначает ограничение отображения g. По предположению индукции множество критических значений у $\bar{g}$ имеет меру нуль в R^p. Но все точки множества $h(C_k \cap V)$ заведомо являются критическими точками для $\bar{g}$, так как в них все производные порядка $\leqslant k$ равны нулю. Поэтому множество

$$\bar{g} h(C_k \cap V) = f(C_k \cap V)$$

имеет меру нуль.

Из того, что $C_k \setminus C_{k+1}$ покрывается счетным числом таких окрестностей V, следует, что $f(C_k \setminus C_{k+1})$ имеет нулевую меру.

3-й шаг. Пусть $I^n \subset U$ — куб с ребром δ.

Если k достаточно велико (точнее, $k > n/p - 1$), то мы докажем, что $f(C_k \cap I^n)$ имеет меру нуль. Так как C_k может быть покрыто счетным числом таких кубиков, то отсюда будет следовать, что множество $f(C_k)$ имеет меру нуль.

Используя теорему Тейлора, компактность куба I^n и определение C_k, мы можем написать

$$f(x+h) = f(x) + R(x, h),$$

где

(1) $$\| R(x, h) \| \leqslant c \| h \|^{k+1}$$

при $x \in C_k \cap I^n$, $x + h \in I^n$. Здесь c — постоянная, зависящая только от f и I^n. Теперь разделим I^n на r^n кубиков с ребром δ/r. Пусть I_1 — кубик получившегося разбиения, который содержит точку $x \in C_k$. Тогда любая точка I_1 может быть записана в виде $x + h$, где

(2) $$\| h \| \leqslant \sqrt{n}\, (\delta/r).$$

Из формулы (1) следует, что $f(I_1)$ лежит в кубе с ребром a/r^{k+1} с центром в точке $f(x)$, где $a = 2c(\sqrt{n}\,\delta)^{k+1}$.

Следовательно, $f(C^k \cap I^n)$ содержится в объединении самое большее r^n кубиков, имеющих общий объем

$$V \leqslant r^n (a/r^{k+1})^p = a^p r^{n-(k+1)p}.$$

Если $k + 1 > n/p$, то очевидно, что V стремится к 0 при $r \to \infty$. Поэтому множество $f(C_k \cap I^n)$ должно иметь меру нуль. Доказательство теоремы Сарда закончено.

§ 4. СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ ПО МОДУЛЮ 2

Рассмотрим гладкое отображение $f\colon S^n \to S^n$. Напомним, что если y — регулярное значение, то $\# f^{-1}(y)$ означает число решений уравнения $f(x) = y$.