Из того, что $C_k \setminus C_{k+1}$ покрывается счетным числом таких окрестностей V, следует, что $f(C_k \setminus C_{k+1})$ имеет нулевую меру.

3-й шаг. Пусть $I^n \subset U$ — куб с ребром δ.

Если k достаточно велико (точнее, $k > n/p - 1$), то мы докажем, что $f(C_k \cap I^n)$ имеет меру нуль. Так как C_k может быть покрыто счетным числом таких кубиков, то отсюда будет следовать, что множество $f(C_k)$ имеет меру нуль.

Используя теорему Тейлора, компактность куба I^n и определение C_k, мы можем написать

$$f(x+h) = f(x) + R(x, h),$$

где

(1) $$\| R(x, h) \| \leqslant c \| h \|^{k+1}$$

при $x \in C_k \cap I^n$, $x + h \in I^n$. Здесь c — постоянная, зависящая только от f и I^n. Теперь разделим I^n на r^n кубиков с ребром δ/r. Пусть I_1 — кубик получившегося разбиения, который содержит точку $x \in C_k$. Тогда любая точка I_1 может быть записана в виде $x + h$, где

(2) $$\| h \| \leqslant \sqrt{n}\, (\delta/r).$$

Из формулы (1) следует, что $f(I_1)$ лежит в кубе с ребром a/r^{k+1} с центром в точке $f(x)$, где $a = 2c(\sqrt{n}\, \delta)^{k+1}$.

Следовательно, $f(C^k \cap I^n)$ содержится в объединении самое большее r^n кубиков, имеющих общий объем

$$V \leqslant r^n (a/r^{k+1})^p = a^p r^{n-(k+1)p}.$$

Если $k + 1 > n/p$, то очевидно, что V стремится к 0 при $r \to \infty$. Поэтому множество $f(C_k \cap I^n)$ должно иметь меру нуль. Доказательство теоремы Сарда закончено.

§ 4. СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ ПО МОДУЛЮ 2

Рассмотрим гладкое отображение $f\colon S^n \to S^n$. Напомним, что если y — регулярное значение, то $\# f^{-1}(y)$ означает число решений уравнения $f(x) = y$.

Мы докажем, что *класс вычетов* $\mathrm{mod}\,2$ *числа* $\#f^{-1}(y)$ *не зависит от выбора регулярного значения* y. Этот класс вычетов называется *степенью* $\mathrm{mod}\,2$ отображения f. Вообще это же самое определение годится и в случае произвольного гладкого отображения

$$f\colon M \to N,$$

где M — компактное многообразие без края, N связно и оба многообразия имеют одинаковую размерность. (Мы можем также считать, что N тоже является компактным многообразием без края, так как в противном случае степень отображения по $\mathrm{mod}\,2$ обязательно равнялась бы нулю.) Для доказательства мы введем два новых понятия.

Гладкая гомотопия и гладкая изотопия

Если $X \subset R^k$, то через $X \times [0, 1]$ обозначим подмножество[1]) пространства R^{k+1}, состоящее из всех (x, t), где $x \in X$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Два отображения

$$f, g\colon X \to Y$$

называются *гладко гомотопными* (сокращенно обозначаем $f \sim g$), если существует такое гладкое отображение $F\colon X \times [0, 1] \to Y$, что

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x)$$

для всех $x \in X$. В этом случае F называется *гладкой гомотопией*, связывающей f с g.

Отметим, что отношение гладкой гомотопности является отношением эквивалентности. Для доказательства транзитивности используем существование такой гладкой функции $\varphi\colon [0, 1] \to [0, 1]$, что

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/3,$$
$$\varphi(t) = 1 \quad \text{при} \quad 2/3 \leqslant t \leqslant 1.$$

---

[1]) Если M — гладкое многообразие без края, то $M \times [0,1]$ является гладким многообразием, край которого состоит из двух экземпляров многообразия M. Если бы у M был край, то точки края M привели бы к «угловым» точкам на $M \times [0,1]$.

(Например, $\varphi(t) = \lambda(t - {}^1/_3)/[\lambda(t - {}^1/_3) + \lambda({}^2/_3 - t)]$, где $\lambda(\tau) = 0$ при $\tau \leqslant 0$ и $\lambda(\tau) = \exp(-\tau^{-1})$ при $\tau > 0$.) Если F — гладкая гомотопия, связывающая f и g, то формула $G(x, t) = F(x, \varphi(t))$ определяет гладкую гомотопию G, для которой

$$G(x, t) = f(x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant {}^1/_3,$$
$$G(x, t) = g(x) \quad \text{при} \quad {}^2/_3 \leqslant t \leqslant 1.$$

Если $f \sim g$ и $g \sim h$, то с помощью этой конструкции легко доказать, что $f \sim h$.

Если f и g являются диффеоморфизмами X на Y, то мы можем также определить понятие «гладкой изотопии» между f и g. Она также будет отношением эквивалентности.

Определение. Диффеоморфизм f *гладко изотопен* диффеоморфизму g, если существует такая гладкая гомотопия F: $X \times [0, 1] \to Y$ между f и g, что для каждого $t \in [0, 1]$ соответствующее отображение

$$x \to F(x, t)$$

диффеоморфно отображает X на Y.

Из дальнейшего будет видно, что степень отображения $\bmod 2$ зависит только от его класса гладко гомотопных отображений.

Лемма о гомотопии. *Пусть f, g: $M \to N$ — гладко гомотопные отображения многообразия M в многообразие N той же размерности, причем M — компактное многообразие без края. Если $y \in N$ является регулярным значением как для f, так и для g, то*

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# g^{-1}(y) \pmod 2.$$

Доказательство. Пусть F: $M \times [0, 1] \to N$ — гладкая гомотопия, связывающая f и g. Сначала предположим, что y является регулярным значением также и для F. Тогда $F^{-1}(y)$ — компактное одномерное многообразие с краем, равным

$$F^{-1}(y) \cap (M \times 0 \cup M \times 1) = f^{-1}(y) \times 0 \cup g^{-1}(y) \times 1.$$

Таким образом, общее число точек края многообразия $F^{-1}(y)$ равно

$$\# f^{-1}(y) + \# g^{-1}(y).$$

Вспомним (§ 2), что компактное одномерное многообразие всегда имеет четное число точек края. Таким образом, $\# f^{-1}(y) + \# g^{-1}(y)$ четно. Отсюда

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# g^{-1}(y) \pmod 2.$$

Теперь предположим, что y не является регулярным значением отображения F. Напомним (§ 1), что

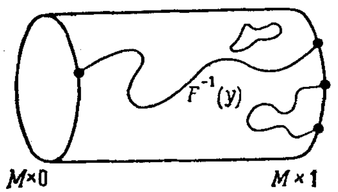

Рис. 6. Число точек края слева сравнимо с числом точек края справа mod 2.

$\# f^{-1}(y')$ и $\# g^{-1}(y')$ являются локально постоянными функциями от y' (пока мы остаемся вне множества критических значений). Поэтому существует такая окрестность $V_1 \subset N$ точки y, состоящая из регулярных значений отображения f, что

$$\# f^{-1}(y') = \# f^{-1}(y)$$

для всех $y' \in V_1$, и аналогичная окрестность $V_2 \subset N$, в которой

$$\# g^{-1}(y') = \# g^{-1}(y)$$

для всех $y' \in V_2$. Выберем регулярное значение z отображения F в $V_1 \cap V_2$. Тогда

$$\# f^{-1}(y) = \# f^{-1}(z) \equiv \# g^{-1}(z) = \# g^{-1}(y),$$

что и завершает доказательство.

В дальнейшем нам будет необходима следующая

Лемма об однородности. *Пусть y и z — произвольные внутренние точки гладкого связного многообразия N.*

Тогда существует диффеоморфизм $h: N \to N$, гладко изотопный тождественному и переводящий y в z.

(В частом случае, когда $N = S^n$, доказательство очевидно: в качестве h выберем вращение, которое переводит y в z и оставляет неподвижными все векторы, ортогональные плоскости, натянутой на векторы y и z.)

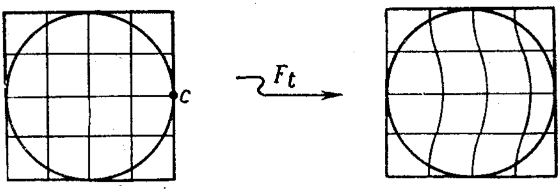

Рис. 7. Деформация единичного шара.

В общем случае доказательство ведется следующим образом. Сперва построим гладкую изотопию R^n на себя, которая:

1) оставляет неподвижными все точки вне единичного шара;

2) переводит начало координат в произвольно выбранную точку открытого единичного шара.

Пусть φ: $R^n \to R$ — такая гладкая функция, что

$$\varphi(x) > 0 \quad \text{при} \quad \|x\| < 1,$$
$$\varphi(x) = 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \geqslant 1.$$

(Например, $\varphi(x) = \lambda(1 - \|x\|^2)$, где $\lambda(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $\lambda(t) = \exp(-t^{-1})$ при $t > 0$.) Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = c_i \varphi(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $c = (c_1, \ldots, c_n) \in S^{n-1}$ — произвольный фиксированный вектор, $\|c\| = 1$.

Для любого $\bar{x} \in R^n$ эта система имеет единственное решение $x = x(t)$, определенное при всех [1]) действительных t и удовлетворяющее начальному условию

$$x(0) = \bar{x}.$$

Мы будем обозначать это решение $x(t)$ через $F_t(\bar{x})$. Ясно, что:

1) $F_t(\bar{x})$ определено при всех t и $\bar{x}$ и гладко зависит от t и $\bar{x}$;

2) $F_0(\bar{x}) = \bar{x}$;

3) $F_{s+t}(\bar{x}) = F_s \circ F_t(\bar{x})$.

Поэтому каждое F_t является диффеоморфизмом пространства R^n на себя. Меняя t, мы видим, что для любого t диффеоморфизм F_t гладко изотопен тождественному отображению посредством изотопии, оставляющей неподвижными все точки вне единичного шара. Ясно, что при подходящем выборе c и t диффеоморфизм F_t будет переводить начало координат в любую наперед заданную точку открытого единичного шара.

Теперь рассмотрим связное многообразие N. Назовем две точки «изотопными», если существует гладкая изотопия, переводящая одну точку в другую. Очевидно, что это отношение эквивалентности. Если y — внутренняя точка, то она имеет окрестность, диффеоморфную R^n; следовательно, приведенное выше рассуждение показывает, что любая достаточно близкая к y точка «изотопна» y. Другими словами, каждый класс «изотопных» внутренних точек N является открытым множеством и внутренность многообразия N разбита на непересекающиеся открытые классы «изотопных» точек. Но внутренность N — связное множество, поэтому может существовать только один такой класс. Это завершает доказательство.

Теперь мы можем доказать основной результат этого раздела. Предположим, что M — компактное многообразие без края, N связно, а $f\colon M \to N$ гладко.

---

[1]) См. [22, § 2.4].

Теорема. *Если y и z — регулярные значения отображения f, то*

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# f^{-1}(z) \pmod 2.$$

Этот общий класс вычетов, который называется степенью отображения f mod 2, зависит только от содержащего f класса гладко гомотопных отображений, а не от самого f.

Доказательство. Пусть даны регулярные значения y и z. Через h обозначим изотопный тождественному диффеоморфизм h: $N \to N$, который переводит y в z. Тогда z является регулярным значением для композиции $h \circ f$. Так как $h \circ f$ гомотопно отображению f, то, согласно лемме о гомотопии,

$$\# (h \circ f)^{-1}(z) \equiv \# f^{-1}(z) \pmod 2,$$

но

$$(h \circ f)^{-1}(z) = f^{-1} \circ h^{-1}(z) = f^{-1}(y).$$

Отсюда

$$\# (h \circ f)^{-1}(z) = \# f^{-1}(y).$$

Поэтому

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# f^{-1}(z) \pmod 2,$$

что и требовалось доказать.

Обозначим этот общий класс вычетов через $\deg_2(f)$. Предположим теперь, что f гладко гомотопно g. Согласно теореме Сарда, существует точка $y \in N$, являющаяся регулярным значением как для f, так и для g. Сравнение

$$\deg_2(f) \equiv \# f^{-1}(y) \equiv \# g^{-1}(y) \equiv \deg_2(g) \pmod 2$$

показывает, что $\deg_2(f)$ инвариантен относительно гладкой гомотопии, что и заканчивает доказательство.

Примеры. Постоянное отображение (отображение в точку) c: $M \to M$ имеет четную степень mod 2. Тождественное отображение I: $M \to M$ имеет нечетную степень mod 2. Значит, *тождественное отображе-*

ние компактного многообразия без края не гомотопно постоянному.

В случае $M = S^n$ из этого результата следует, что не существует гладкого отображения $f\colon D^{n+1} \to S^n$, оставляющего каждую точку сферы неподвижной (т. е. сфера не является гладким «ретрактом» шара; см. § 2, лемма 5). Действительно, такое отображение давало бы гладкую гомотопию

$$F\colon S^n \times [0, 1] \to S^n, \quad F(t, x) = f(tx),$$

связывающую отображение в точку с тождественным отображением.

§ 5. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Для того чтобы определить степень отображения как целое число (а не вычет $\mathrm{mod}\, 2$), мы должны ввести ориентацию.

Определения. Ориентация в действительном конечномерном векторном пространстве — это класс упорядоченных базисов относительно следующего отношения эквивалентности: базис $(b_1, \ldots, b_m)$ определяет *ту же ориентацию*, что и базис $(b'_1, \ldots, b'_m)$, если $b'_i = \sum a_{ij} b_j$ и $\det(a_{ij}) > 0$; он определяет *противоположную ориентацию*, если $\det(a_{ij}) < 0$. Таким образом, каждое векторное пространство положительной размерности имеет в точности две ориентации. Векторное пространство R^n имеет *стандартную* ориентацию, соответствующую базису

$$(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$$

Для нульмерного векторного пространства удобно определить «ориентацию» как символ $+1$ или -1.

Ориентированное гладкое многообразие состоит из многообразия M и ориентаций, выбранных для каждого касательного пространства TM_x. При $m \geqslant 1$ требуется выполнение следующего условия согласования этих ориентаций: для каждой точки M должны существовать окрестность $U \subset M$ и диффеоморфизм h,