ние компактного многообразия без края не гомотопно постоянному.

В случае $M = S^n$ из этого результата следует, что не существует гладкого отображения $f\colon D^{n+1} \to S^n$, оставляющего каждую точку сферы неподвижной (т. е. сфера не является гладким «ретрактом» шара; см. § 2, лемма 5). Действительно, такое отображение давало бы гладкую гомотопию

$$F\colon S^n \times [0, 1] \to S^n, \quad F(t, x) = f(tx),$$

связывающую отображение в точку с тождественным отображением.

§ 5. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Для того чтобы определить степень отображения как целое число (а не вычет mod 2), мы должны ввести ориентацию.

Определения. Ориентация в действительном конечномерном векторном пространстве — это класс упорядоченных базисов относительно следующего отношения эквивалентности: базис $(b_1, \ldots, b_m)$ определяет *ту же ориентацию*, что и базис $(b'_1, \ldots, b'_m)$, если $b'_i = \sum a_{ij} b_j$ и $\det(a_{ij}) > 0$; он определяет *противоположную ориентацию*, если $\det(a_{ij}) < 0$. Таким образом, каждое векторное пространство положительной размерности имеет в точности две ориентации. Векторное пространство R^n имеет *стандартную* ориентацию, соответствующую базису

$$(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$$

Для нульмерного векторного пространства удобно определить «ориентацию» как символ $+1$ или -1.

Ориентированное гладкое многообразие состоит из многообразия M и ориентаций, выбранных для каждого касательного пространства TM_x. При $m \geqslant 1$ требуется выполнение следующего условия согласования этих ориентаций: для каждой точки M должны существовать окрестность $U \subset M$ и диффеоморфизм h, отображающий U на открытое подмножество в R^m или H^m, который *сохраняет ориентацию* в том смысле, что для каждого $x \in U$ изоморфизм dh_x переводит [1]) выбранную ориентацию пространства TM_x в стандартную ориентацию пространства R^m.

Если M связно и ориентируемо, то оно имеет в точности две ориентации.

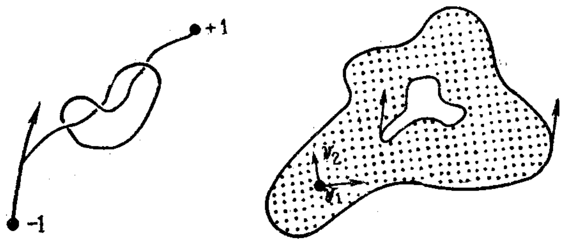

Рис. 8. Как ориентировать край.

Если M имеет край, то мы можем в точке x края различать три типа векторов касательного пространства TM_x:

1) векторы, касательные к краю; они образуют $(m-1)$-мерное подпространство $T(\partial M)_x \subset TM_x$;

2) векторы, направленные «наружу»; они образуют открытое полупространство, ограниченное подпространством $T(\partial M)_x$;

3) векторы, направленные «внутрь»; они образуют дополнительное полупространство.

Каждая ориентация многообразия M определяет ориентацию края ∂M, а именно: для $x \in \partial M$ выберем положительно ориентированный базис $(v_1, \ldots, v_m)$ в TM_x таким образом, чтобы $v_2, \ldots, v_m$ касались

---

[1]) Если $A: E \to E'$ — линейный изоморфизм двух конечномерных действительных векторных пространств и в E выбрана ориентация, то A переводит ее в некоторую ориентацию пространства E' согласно следующему правилу: пусть $(b_1, \ldots, b_m)$ — базис в E, принадлежащий выбранной в E ориентации; тогда в E' берется ориентация, соответствующая базису $(Ab_1, \ldots, Ab_m)$.

Заметим еще, что не на всяком многообразии можно ввести ориентацию и что многообразия, для которых это можно сделать, называются *ориентируемыми*, а остальные — *неориентируемыми*. — *Прим. ред.*

края (предполагается, что $m \geqslant 2$), а v_1 был направлен «наружу». Тогда базис $(v_2, \ldots, v_m)$ определяет требуемую ориентацию края ∂M в точке x.

Если размерность многообразия равна 1, то каждой точке края приписывается ориентация $+1$ или -1 в зависимости от того, будет ли положительно направленный вектор в точке x направлен «наружу» или «внутрь» (см. рис. 8).

Например, единичную сферу $S^{m-1} \subset R^m$ можно ориентировать как край шара D^m.

Степень Брауэра

Пусть M и N — два n-мерных ориентированных многообразия без края, и пусть

$$f\colon M \to N$$

— гладкое отображение. Если M компактно, а N связно, то степень отображения определяется следующим образом:

Пусть $x \in M$ — регулярная точка отображения f, т. е. $df_x\colon TM_x \to TN_{f(x)}$ — линейный изоморфизм ориентированных векторных пространств. Определим $\operatorname{sign} df_x$ равным $+1$ или -1 в зависимости от того, сохраняет df_x ориентацию или нет.

Для любого регулярного значения y определим

$$\deg(f;\, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} df_x.$$

Как и в § 1, целое число $\deg(f;\, y)$ — локально постоянная функция от y. Эта функция определена на открытом всюду плотном множестве многообразия N.

Теорема А. *Целое число* $\deg(f;\, y)$ *не зависит от выбора регулярного значения* y.

Оно будет называться *степенью отображения* f и обозначаться через $\deg f$.

Теорема В. *Если отображение* f *гладко гомотопно* g, *то* $\deg f = \deg g$.

По существу доказательство будет таким же, как и в § 4, только необходимо внимательно следить за ориентациями.

Сначала рассмотрим следующую ситуацию: предположим, что M является краем компактного ориентированного многообразия X и M ориентировано как край многообразия X.

Лемма 1. *Если f: $M \to N$ продолжается до гладкого отображения F: $X \to N$, то* $\deg(f; y) = 0$ *для любого регулярного значения y.*

Доказательство. Сначала предположим, что y является регулярным значением как для F, так и для $f = F|M$. Компактное одномерное многообразие $F^{-1}(y)$ представляет собой конечное объединение дуг и окружностей, причем граничные точки дуг лежат на $M = \partial X$. Пусть $A \subset F^{-1}(y)$ — одна из дуг, $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$.

Мы покажем, что

$$\operatorname{sign} df_a + \operatorname{sign} df_b = 0$$

и, следовательно (надо суммировать по всем таким отрезкам), что $\deg(f, y) = 0$.

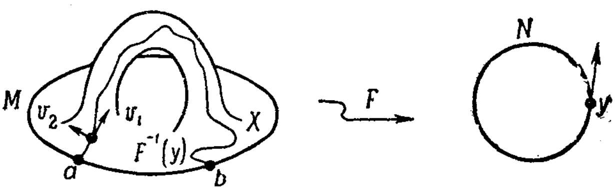

Рис. 9. Как ориентировать $F^{-1}(y)$.

Ориентации многообразий X и N следующим образом определяют ориентацию дуги A. Пусть $x \in A$, и пусть $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ — положительно ориентированный базис в TX_x, причем v_1 касается дуги A. *Тогда v_1 определяет требуемую ориентацию пространства TA_x в том и только в том случае, когда dF_x переводит $(v_2, \ldots, v_{n+1})$ в положительно ориентированный базис пространства TN_y.*

Пусть $v_1(x)$ обозначает положительно ориентированный единичный вектор, касательный к A в точке x. Ясно, что v_1 — гладкая функция и $v_1(x)$ направлен «наружу» в одной точке края (скажем, в b) и «внутрь» — в другой (в a).

Отсюда немедленно следует, что

$$\operatorname{sign} df_a = -1, \quad \operatorname{sign} df_b = +1,$$

а сумма равна нулю. Просуммировав по всем таким дугам, мы докажем, что $\deg(f;\ y) = 0$.

Более общо, предположим, что y_0 является регулярным значением для f, но не для F. Функция $\deg(f;\ y)$ постоянна в некоторой окрестности U точки y_0. Поэтому, как в § 4, мы можем выбрать внутри U регулярное значение y отображения F и заметить, что тогда

$$\deg(f;\ y_0) = \deg(f;\ y) = 0.$$

Это доказывает лемму 1.

Теперь рассмотрим некоторую гладкую гомотопию $F\colon [0, 1] \times M \to N$, связывающую два отображения $f(x) = F(0, x)$, $g(x) = F(1, x)$.

Лемма 2. *Степень* $\deg(g;\ y)$ *равна* $\deg(f;\ y)$ *для любого общего регулярного значения* y.

Доказательство. Многообразие $[0, 1] \times M$ может быть ориентировано как произведение двух ориентированных многообразий. Тогда его край будет состоять из $1 \times M$ (с правильной ориентацией) и $0 \times M$ (с неправильной ориентацией). Таким образом, степень отображения $F|\partial([0, 1] \times M)$ для регулярного значения y равна разности

$$\deg(g;\ y) - \deg(f;\ y),$$

а эта разность, согласно лемме 1, должна равняться нулю.

Остальная часть доказательства теорем А и В совершенно аналогична рассуждениям § 4. Для двух регулярных значений y и z отображения $f\colon M \to N$ выберем изотопный тождественному диффеоморфизм

$h\colon N \to N$, переводящий y в z. Тогда h будет сохранять ориентацию, и простая проверка показывает, что

$$\deg(f;\ y) = \deg(h \circ f;\ h(y)).$$

Отображение f гомотопно $h \circ f$. Из леммы 2 немедленно следует, что

$$\deg(h \circ f;\ z) = \deg(f;\ z).$$

Поэтому $\deg(f;\ y) = \deg(f;\ z)$, что заканчивает доказательство.

Примеры. Комплексная функция $z \to z^k$, $z \neq 0$, отображает единичную окружность на себя, причем степень этого отображения равна k (здесь k может быть произвольным целым числом — положительным, отрицательным или нулем).

Вырожденное отображение

$$f\colon M \to \text{постоянная} \in N$$

имеет степень нуль. Диффеоморфизм $f\colon M \to N$ имеет степень либо $+1$, либо -1 в зависимости от того, сохраняет или обращает он ориентацию. Поэтому *обращающий ориентацию диффеоморфизм компактного многообразия без края не может быть гладко гомотопен тождественному.*

Отражение $r_i\colon S^n \to S^n$,

$$r_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}),$$

дает пример диффеоморфизма, обращающего ориентацию. Центральная симметрия $S^n \to S^n$, $x \to -x$ имеет степень $(-1)^{n+1}$, в чем легко убедиться, представив ее в виде композиции $n+1$ отражений:

$$-x = r_1 \circ r_2 \circ \ldots \circ r_{n+1}(x).$$

Таким образом, *при четном n центральная симметрия сферы S^n не может быть гладко гомотопна тождественному отображению — факт, который не улавливается с помощью степени отображения* mod 2.

В качестве приложения мы, следуя Брауэру, покажем, что *на S^n тогда и только тогда существует* *нигде не обращающееся в нуль касательное векторное поле, когда n нечетно.* (Сравните рис. 10 и 11).

Определение. Гладкое *касательное векторное поле*[1]) *на* $M \subset R^k$ — это такое гладкое отображение $v: M \to R^k$, что $v(x) \in TM_x$ для всех $x \in M$. Для сферы $S^n \subset R^{n+1}$ последнее, очевидно, эквивалентно условию

(1) $$v(x) \cdot x = 0 \text{ при всех } x \in S^n,$$

где точка означает евклидово скалярное произведение в R^{n+1}.

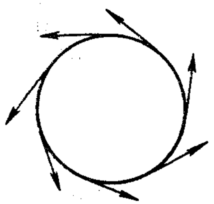

Рис. 10. Векторное поле на одномерной сфере, нигде не обращающееся в нуль.

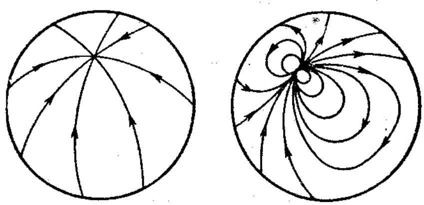

Рис. 11. Попытки построить такое поле на двумерной сфере.

Если $v(x)$ нигде че равно нулю, то мы можем также считать, что

(2) $$v(x) \cdot v(x) = 1 \quad \text{при всех} \quad x \in S^n.$$

Во всяком случае, $\bar{v}(x) = v(x)/\| v(x) \|$ будет векторным полем, удовлетворяющим этому условию. Таким образом, мы можем рассматривать v как гладкое отображение сферы S^n в себя.

Теперь определим гладкую гомотопию

$$F: S^n \times [0, \pi] \to S^n$$

[1]) Обычно слово «касательное» опускают, хотя на многообразии в евклидовом пространстве может понадобиться рассматривать и не касательные поля. — *Прим. ред.*

формулой $F(x, \theta) = x\cos\theta + v(x)\sin\theta$. Прямой подсчет показывает, что

$$F(x, \theta) \cdot F(x, \theta) = 1$$

и

$$F(x, 0) = x, \quad F(x, \pi) = -x.$$

Таким образом, центральная симметрия оказалась гомотопной тождественному отображению, что невозможно, как мы видели, при четных n.

С другой стороны, если $n = 2k - 1$, то формула

$$v(x_1, \ldots, x_{2k}) = (x_2, -x_1, \ldots, x_{2k}, -x_{2k-1})$$

определяет нигде не обращающееся в нуль касательное векторное поле на S^n. Утверждение полностью доказано.

В частности, отсюда следует, что при нечетном n центральная симметрия сферы S^n действительно гомотопна тождественному отображению. Знаменитая теорема, принадлежащая Хопфу, утверждает, что два отображения связного n-мерного многообразия в n-мерную сферу гладко гомотопны *тогда и только тогда*, когда их степени совпадают.

В § 7 мы докажем более общий результат, из которого будет следовать теорема Хопфа.

§ 6. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА

В качестве дальнейшего приложения понятия степени отображения мы изучим векторные поля на других многообразиях.

Рассмотрим сначала открытое множество $U \subset R^m$ и гладкое векторное поле

$$v \colon U \to R^m$$

с изолированным нулем в точке $z \in U$. Функция

$$\bar{v}(x) = v(x)/\|v(x)\|$$