формулой $F(x, \theta) = x\cos\theta + v(x)\sin\theta$. Прямой подсчет показывает, что

$$F(x, \theta) \cdot F(x, \theta) = 1$$

и

$$F(x, 0) = x, \quad F(x, \pi) = -x.$$

Таким образом, центральная симметрия оказалась гомотопной тождественному отображению, что невозможно, как мы видели, при четных n.

С другой стороны, если $n = 2k - 1$, то формула

$$v(x_1, \ldots, x_{2k}) = (x_2, -x_1, \ldots, x_{2k}, -x_{2k-1})$$

определяет нигде не обращающееся в нуль касательное векторное поле на S^n. Утверждение полностью доказано.

В частности, отсюда следует, что при нечетном n центральная симметрия сферы S^n действительно гомотопна тождественному отображению. Знаменитая теорема, принадлежащая Хопфу, утверждает, что два отображения связного n-мерного многообразия в n-мерную сферу гладко гомотопны *тогда и только тогда*, когда их степени совпадают.

В § 7 мы докажем более общий результат, из которого будет следовать теорема Хопфа.

§ 6. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА

В качестве дальнейшего приложения понятия степени отображения мы изучим векторные поля на других многообразиях.

Рассмотрим сначала открытое множество $U \subset R^m$ [и гла]дкое векторное поле

$$v: U \to R^m$$

с изолированным нулем в точке $z \in U$. Функция

$$\bar{v}(x) = v(x)/\|v(x)\|$$

отображает маленькую сферу с центром z в единичную сферу[1]). Степень этого отображения назовем *индексом* ι векторного поля v в точке z[2]).

На рис. 12 представлено несколько примеров таких векторных полей с индексами —1, 0, 1, 2. (С векторным полем v тесно связаны кривые, «касающиеся» поля v, которые получаются решением системы дифференциальных уравнений $dx_i/dt = v_i(x_1, \ldots, x_n)$. Именно эти кривые[3]) и изображены на рис. 12.)

Нуль произвольного индекса можно получить следующим образом: на плоскости комплексного переменного многочлен z^k определяет гладкое векторное поле с нулем индекса k в начале координат, а функция $\bar{z}^k$ определяет векторное поле с нулем индекса $-k$.

Мы должны доказать, что определение индекса инвариантно относительно диффеоморфизмов. Чтобы объяснить, что же это значит, рассмотрим более общую ситуацию. Пусть задано гладкое отображение $f\colon M \to N$ и на каждом многообразии определено векторное поле.

Определение. Векторные поля v на M и v' на N называются *f-связанными*, если дифференциал df_x переводит $v(x)$ в $v'(f(x))$ для всех $x \in M$.

---

[1]) Каждая сфера должна быть ориентирована как край соответствующего шара.

[2]) А также индексом нуля z этого векторного поля. Часто вместо «нуля» говорят об «особой точке» векторного поля, хотя с аналитической точки зрения никаких особенностей у поля v там может не быть; особенность имеется у соответствующего поля единичных касательных векторов $\bar{v}$.

Заметим попутно, что если в R^m на компактном гладком $(m-1)$-мерном многообразии M задано векторное поле v (не обязательно касательное), нигде на M не обращающееся в нуль, то степень отображения

$$M^{m-1} \to S^{m-1}, \quad x \to \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$$

называется *вращением поля v на M*. С ним встречаются не только при определении индекса, но и в других случаях; см., например, лемму 3 ниже. — *Прим. ред.*

[3]) Их называют *интегральными кривыми, траекториями* или *силовыми линиями поля v*. — *Прим. ред.*

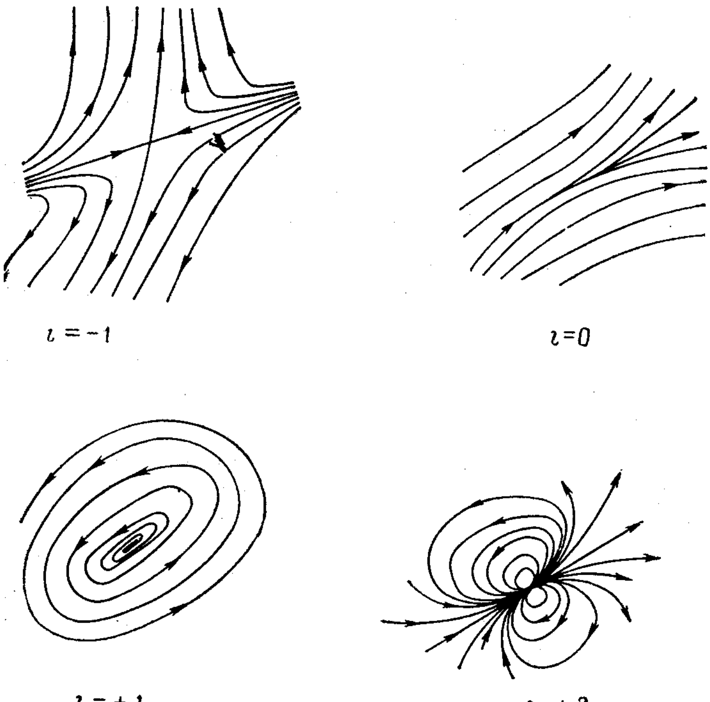

Рис. 12. Примеры векторных полей на плоскости (ι — индекс).

Если f — диффеоморфизм, то v', конечно, однозначно определяется по v. В этом случае мы будем писать

$$v' = df \circ v \circ f^{-1}.$$

Лемма 1. *Предположим, что векторное поле v на U f-связано с полем*

$$v' = df \circ v \circ f^{-1}$$

на U' с помощью диффеоморфизма f: $\to U'$. Тогда индекс поля v в изолированном нуле z, ндексу поля v' в $f(z)$.

Предположив, что лемма 1 доказана, мы можем следующим образом ввести понятие индекса векторного поля w на произвольном многообразии M. Если g: $U \to M$ — параметризация окрестности точки z на M, то *индекс* ι векторного поля w определяется как индекс соответствующего векторного поля $dg^{-1} \circ w \circ g$ на U в точке $g^{-1}(z)$. Из леммы 1, очевидно, будет следовать, что индекс ι корректно определен[1]).

Доказательство леммы 1 будет основано на доказательстве совсем другого утверждения.

Лемма 2. *Любой сохраняющий ориентацию диффеоморфизм f евклидова пространства R^m гладко изотопен тождественному.*

(Напротив, для многих значений m существуют сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы сферы S^m, которые не являются гладко изотопными тождественному; см. [20, стр. 41].)

Доказательство. Мы можем считать, что $f(0) = 0$. Так как дифференциал в нуле можно определить как

$$df_0(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tx)}{t},$$

то естественно ввести изотопию

$$F\colon R^m \times [0, 1] \to R^m,$$

определяемую формулами

$$F(x, t) = f(tx)/t \quad \text{при} \quad 0 < t \leqslant 1,$$
$$F(x, 0) = df_0(x).$$

Для доказательства гладкости отображения F при $t = 0$ мы перепишем f в виде[2])

$$f(x) = x_1 g_1(x) + \ldots + x_m g_m(x),$$

---

[1]) То есть его определение не зависит от выбора параметризации. — *Прим. ред.*

[2]) См., например, [22, стр. 14], а также упр. 4.11 из Уоллеса. — *Прим. ред.*

где $g_1, \ldots, g_m$ — некоторые гладкие функции, и заметим, что

$$F(x, t) = x_1 g_1(tx) + \ldots + x_m g_m(tx)$$

для всех значений t.

Поэтому f изотопно линейному отображению df_0, которое, очевидно, изотопно тождественному[1]). Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 1. Мы можем считать, что $z = f(z) = 0$ и U — выпуклая окрестность.

Если f сохраняет ориентацию, то, проведя в точности те же самые рассуждения, мы построим такое однопараметрическое семейство вложений[2])

$$f_t\colon U \to R^m,$$

что f_0 — тождественное вложение, $f_1 = f$ и $f_t(0) = 0$ при всех t. Пусть v_t' — векторное поле $df_t \circ v \circ f_t^{-1}$ на $f_t(U)$, f_t-связанное с полем v на U. Все эти векторные поля определены и не обращаются в нуль на достаточно малой сфере с центром в 0. Следовательно, индекс поля $v = v_0$ в 0 должен совпадать с индексом поля $v' = v_1$ в 0, что доказывает лемму 1 для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов.

---

[1]) Пусть A — матрица с положительным определителем; тогда существует такая матрица $A(t)$, которая гладко зависит от t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и ни при одном t не вырождается, причем $A(0) = A$ и $A(1)$ — единичная матрица. Действительно, A можно представить в виде $A = SU$, где S — положительно определенная симметричная матрица, а U — ортогональная матрица с определителем 1. (Именно, S определяется из условия $AA' = S^2$, где штрих обозначает транспонирование.) Поэтому наше утверждение достаточно доказать отдельно для S и U. Это проще всего сделать, приведя S к диагональному виду, а U — к виду, состоящему из «блоков» $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ и диагональных элементов ± 1; при этом -1 войдет четное число раз, а $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — это «блок» указанного выше вида с $\varphi = \pi$, поэтому можно считать, что имеются только «блоки» и диагональные единицы. — *Прим. ред.*

[2]) См. Уоллес, определение 3.2. — *Прим. ред.*

Среди диффеоморфизмов, обращающих ориентацию, достаточно исследовать случай отражения ρ. Тогда

$$v' = \rho \circ v \circ \rho^{-1},$$

а для соответствующего отображения $\bar{v}'(x) = \frac{v'(x)}{\|v'(x)\|}$ ›еры радиуса ε в единичную сферу будет справедливо соотношение

$$\bar{v}' = \rho \circ \bar{v} \circ \rho^{-1}.$$

Очевидно, степень отображения $\bar{v}'$ равна степени отображения $\bar{v}$, что завершает доказательство леммы 1.

Мы сейчас получим классический результат, относящийся к следующей ситуации: M — компактное многообразие, w — гладкое векторное поле на M с изолированными нулями. *Если M имеет край, то требуется, чтобы векторное поле w в каждой точке края было направлено наружу.*

Теорема Пуанкаре — Хопфа. *Сумма $\sum \iota$ индексов нулей такого векторного поля равна эйлеровой характеристике*[1])

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \text{ ранг } H_i(M).$$

В частности, эта сумма индексов является топологическим инвариантом многообразия M, т. е. она не зависит от конкретного выбора векторного поля.

(Двумерный вариант этой теоремы был доказан Пуанкаре в 1885 г. Полностью теорема была доказана Хопфом [54] в 1926 г., вслед за частичными результатами Брауэра и Адамара.)

Мы докажем часть этой теоремы и дадим набросок остального. Сначала рассмотрим частный случай — компактную область в R^m.

---

[1]) Здесь $H_i(M)$ обозначает i-ю группу гомологий многообразия. Это наша первая и последняя ссылка на теорию гомологий. (Читатель, не знакомый с теорией гомологий, может ограничиться таким вариантом: сумма индексов для всех векторных полей с изолированными нулями (направленных на крае наружу, если есть край) одна и та же. — *Ред.*)

Пусть $X \subset R^m$ — компактное m-мерное многообразие с краем. Гауссово отображение[1])

$$g\colon \partial X \to S^{m-1}$$

ставит в соответствие каждой точке $x \in \partial X$ единичный вектор, нормальный к ∂X в точке x и направленный наружу многообразия X.

Лемма 3 (Хопф). *Если $v\colon X \to R^m$ — гладкое векторное поле с изолированными нулями, направленное на крае наружу многообразия X*[2]), *то сумма ин-*

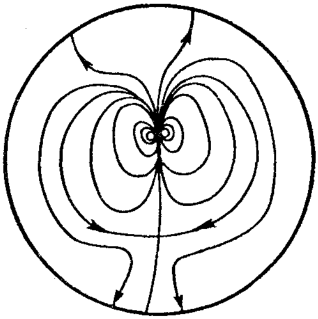

Рис. 13. Пример векторного поля с суммой индексов $+1$.

дексов $\sum \iota$ равна степени гауссова отображения края ∂X в S^{m-1}. В частности, $\sum \iota$ не зависит от выбора v.

Например, если v — векторное поле на шаре D^m, направленное на крае наружу, то $\sum \iota = 1$ (см. рис. 13).

Доказательство. Вырезав шар радиуса ε вокруг каждого нуля, мы получим новое многообразие с краем. Отображение $\bar{v}(x) = v(x)/\|v(x)\|$ переводит это многообразие в S^{m-1}. Следовательно, сум-

[1]) Его называют также *нормальным*. — *Прим. ред.*

[2]) И, в частности, нигде на ∂X не обращающееся в нуль. — *Прим. ред.*

ма степеней ограничений отображения $\bar{v}$ на различные компоненты края равна 0 [1]. Но $\bar{v}|\partial X$ гомотопно g [2]. Сумма же степеней ограничений на остальные компоненты края равна $-\sum\iota$. (Знак минус стоит перед суммой ввиду неправильной ориентации каждой маленькой сферы [3].)

Поэтому

$$\deg g - \sum \iota = 0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Степень отображения g известна также под названием «интегральной кривизны» гиперповерхности ∂X, так как она пропорциональна интегралу по ∂X от гауссовой кривизны. Она равна, конечно, эйлеровой характеристике многообразия X. Для нечетного m она равна также половине эйлеровой характеристики многообразия ∂X [4].

Прежде чем распространить этот результат на другие многообразия, необходимы некоторые приготовления.

---

[1]) Используется лемма 1 из § 5 и тот простой факт, что для несвязного многообразия M степень отображения равна сумме степеней ограничений этого отображения на компоненты связности многообразия M. — *Прим. ред.*

[2]) Достаточно рассмотреть $\dfrac{(1-t)\bar{v}+tg}{\|(1-t)\bar{v}+tg\|}$. Знаменатель нигде не обращается в нуль, так как ни в одной точке $x \in \partial X$ направление одного из этих двух полей не противоположно направлению другого. — *Прим. ред.*

[3]) Пусть $D_\varepsilon^m(x)$ — шар радиуса ε с центром в x, а $S_\varepsilon^{m-1}(x)$ — ограничивающая его сфера. Обозначим нули векторного поля v через $x_1, \ldots, x_N$. Индекс точки x_i — это степень отображения $x \to \dfrac{v(x)}{\|v(x)\|}$ сферы $S_\varepsilon^{m-1}(x)$ в S^{m-1}, где сферы должны быть ориентированы как края соответствующих шаров. Но ориентация, которую $S_\varepsilon^{m-1}(x)$ получает как край многообразия $Y = X \setminus \bigcup_i D_\varepsilon^m(x_i)$, противоположна ориентации ее как края шара $D_\varepsilon^m(x_i)$, потому что если в какой-нибудь точке сферы вектор направлен наружу $D_\varepsilon^m(x_i)$, то тот же вектор в этой же точке направлен внутрь Y. — *Прим. ред.*

[4]) См. § 8, задача 20. — *Прим. ред.*

Естественно попытаться вычислить индекс векторного поля v в нуле z с помощью производных поля v в точке z. Рассмотрим сначала векторное поле v на открытом множестве $U \subset R^m$. Будем рассматривать его как отображение $U \to R^m$, так что определен дифференциал dv_z.

Определение. Векторное поле v называется *невырожденным в точке* z, если линейное преобразование dv_z невырожденно.

В этом случае z — изолированный ну

Лемма 4. *Индекс векторного поля* v *в невырожденном нуле* z *равен либо* $+1$, *либо* -1, *в зависимости от того, положителен или отрицателен определитель дифференциала* dv_z.

Доказательство. Будем рассматривать как диффеоморфизм некоторой выпуклой окрестности U_0 точки z в пространство R^m. Можно считать, что $z = 0$. Если отображение v сохраняет ориентацию, то мы уже видели, что $v | U_0$ может быть гладко продеформировано в тождественное отображение, причем никаких новых нулей не появится. (См. леммы 1, 2.) Поэтому индекс равен $+1$.

Если v обращает ориентацию, то совершенно аналогичным образом оно может быть продеформировано в отражение; отсюда $\iota = -1$.

Более общо, рассмотрим нуль z векторного поля w на многообразии $M \subset R^k$. Будем рассматривать w как отображение M в R^k с дифференциалом dw_z: $TM_z \to R^k$

Лемма 5. *Дифференциал* dw_z *в действительности переводит* TM_z *в подпространство* $TM_z \subset R^k$; *поэтому* dw_z *можно рассматривать как линейное преобразование пространства* TM_z. *Если это линейное преобразование имеет определитель* $D \neq 0$, *то* z *является изолированным нулем поля* w. *Индекс точки* z *равен* $+1$ *или* -1 *в зависимости от того, полож гелен* D *или отрицателен.*

Доказательство. Пусть $h: U \to M$ — параметризация некоторой окрестности точки z, e^i обозначает i-й базисный вектор в R^m, и пусть

$$t^i = dh_u(e^i) = \partial h/\partial u_i,$$

так что векторы $t^1, \ldots, t^m$ образуют базис касательного пространства $TM_{h(u)}$. Нам нужно вычислить, куда переходит вектор $t^i = t^i(u)$ под действием линейного преобразования $dw_{h(u)}$. Сначала заметим, что

$$(1) \qquad dw_{h(u)}(t^i) = d(w \circ h)_u(e^i) = \partial w(h(u))/\partial u_i.$$

Пусть $v = \Sigma v_j e^j$ — векторное поле на U, которое h-связано с векторным полем w на M. По определению $v = dh^{-1} \circ w \circ h$ и

$$w(h(u)) = dh_u(v) = \sum v_j t^j.$$

Поэтому

$$(2) \qquad \partial w(h(u))/\partial u_i = \sum_j (\partial v_j/\partial u_i)\, t^j + \sum_j v_j\, (\partial t^j/\partial u_i)$$

Комбинируя формулы (1) и (2), мы получаем в нуле $h^{-1}(z)$ векторного поля v следующую формулу:

$$(3) \qquad dw_z(t^i) = \sum_j (\partial v_j/\partial u_i)\, t^j.$$

Таким образом, dw_z отображает TM_z в себя, а определитель D этого преобразования $TM_z \to TM_z$ равен определителю матрицы $(\partial v_j/\partial u_i)$, что вместе с леммой 4 завершает доказательство.

Теперь мы рассмотрим компактное многообразие без края $M \subset R^k$. Пусть N_ε обозначает замкнутую ε-окрестность многообразия M, т. е. множество всех таких $x \in R^k$, что $\| x - y \| \leqslant \varepsilon$ для некоторого $y \in M$. Можно показать, что N_ε будет гладким многообразием с краем при достаточно малых ε (см. § 8, задача 11).

Теорема 1. *Для любого векторного поля v на M, имеющего только невырожденные нули, сумма* *индексов* $\sum\iota$ *равна степени гауссова отображения* [1])

$$g\colon \partial N_\varepsilon \to S^{k-1}.$$

В частности, эта сумма не зависит от выбора векторного поля v.

Доказательство. Для $x \in N_\varepsilon$ через $r(x) \in M$ мы обозначим ближайшую к x точку многообразия M (см. § 8, задача 12). Заметим, что вектор $x - r(x)$ перпендикулярен касательному пространству к M

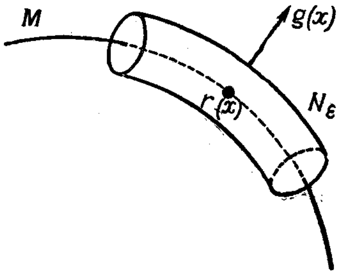

Рис. 14. ε-окрестность многообразия M.

в точке $r(x)$, иначе $r(x)$ не была бы ближайшей к x точкой многообразия M. Если ε достаточно мало, то $r(x)$ — гладкая и корректно определенная функция.

Мы будем также рассматривать квадратичную функцию расстояния

$$\varphi(x) = \| x - r(x) \|^2.$$

Простой подсчет показывает, что градиент функции φ задается соотношением

$$\operatorname{grad} \varphi = 2(x - r(x)).$$

Отсюда для каждой точки x поверхности уровня $\partial N_\varepsilon = \varphi^{-1}(\varepsilon^2)$ внешний единичный нормальный век-

[1]) Другая интерпретация этой степени дана Аллендорфером и Фенхелем: степень отображения g может быть выражена через интеграл по M от подходящего скаляра кривизны; таким образом получается m-мерный вариант классической теоремы Гаусса — Бонне (см. [2], [48], а также Чжень [57]).

тор задается равенством

$$g(x) = \operatorname{grad}\varphi / \|\operatorname{grad}\varphi\| = \frac{1}{\varepsilon}(x - r(x)).$$

Продолжим v до векторного поля w на окрестности N_ε, полагая

$$w(x) = (x - r(x)) + v(r(x)).$$

Тогда w направлено «наружу» на крае, так как скалярное произведение $w(x) \cdot g(x) = \varepsilon > 0$.

Заметим, что w обращается в нуль только в нулях поля v на M; это явствует из того, что два слагаемых $x - r(x)$ и $v(r(x))$ взаимно ортогональны. Вычислив дифференциал w в нуле $z \in M$, найдем, что

$$dw_z(h) = dv_z(h) \quad \text{для всех} \quad h \in TM_z,$$
$$dw_z(h) = h \quad \text{для} \quad h \in TM_z^{\perp}.$$

Поэтому определитель отображения dw_z равен определителю отображения dv_z. Следовательно, индекс поля w в нуле z равен индексу ι векторного поля v в точке z.

Но, в соответствии с леммой 3, сумма индексов $\sum \iota$ равна степени g. Тем самым теорема 1 доказана.

Примеры. На сфере S^m существует векторное поле, направленное на «север» в каждой точке[1]). В южном полюсе векторы направлены от полюса (индекс равен $+1$), а в северном полюсе сходятся внутрь (индекс равен $(-1)^m$). Поэтому инвариант $\sum \iota$ равен нулю для нечетных m и 2 для четных. Это дает новое доказательство того факта, что на четномерной сфере любое векторное поле имеет нуль.

Для нечетномерного многообразия без края инвариант $\sum \iota$ равен нулю, так как, если заменить

---

[1]) Например, v можно определить формулой $v(x) = p - (p \cdot x)x$, где p — северный полюс (см. рис. 11).

векторное поле v на $-v$, то каждый индекс умножится на $(-1)^m$, а равенство

$$\sum \iota = (-1)^m \sum \iota$$

для нечетных m влечет за собой

$$\sum \iota = 0.$$

Замечание. Имеется теорема Хопфа, утверждающая, что если для связного многообразия M имеет место равенство $\sum \iota = 0$, то на M существует векторное поле, нигде не обращающееся в нуль[1]).

Чтобы доказать теорему Пуанкаре — Хопфа в полном объеме, необходимо сделать еще три шага.

1-й шаг. *Отождествление инварианта* $\sum \iota$ *с эйлеровой характеристикой* $\chi(M)$. Достаточно построить только один какой-нибудь пример невырожденного векторного поля на M, для которого легко проверялось бы, что $\sum \iota = \chi(M)$. Наиболее удобный способ построения таков.

Согласно М. Морсу, на M обязательно существует функция с действительными значениями, «градиент» которой является невырожденным векторным полем[2]). Кроме того, Морс показывает, что сумма индексов такого градиентного векторного поля равна эйлеровой характеристике многообразия M. Подробное изложение этих рассуждений читатель может найти у Милнора [22, стр. 40, 47].

2-й шаг. *Доказательство теоремы для векторных полей с вырожденными нулями.* Рассмотрим сначала векторное поле v на открытом множестве U, имеющее изолированный нуль в точке z. Если функция

$$\lambda : U \to [0, 1]$$

равна 1 в малой окрестности N_1 точки z и ра[illegible] нулю вне несколько большей окрестности N, а y [illegible] доста-

[1]) См. § 8, задача 21*. — *Прим. ред.*

[2]) См. § 8, задача 19*. — *Прим. ред.*

точно малое регулярное значение для v, то векторное поле

$$v' = v(x) - \lambda(x)\,y$$

невырожденно[1]) внутри N. Сумма индексов для нулей, лежащих внутри N, может быть вычислена через степень отображения

$$\bar{v}\colon \partial N \to S^{m-1};$$

поэтому она не изменилась после замены v на v'.

Более общо, рассмотрим векторные поля на компактном многообразии M. Локально применяя эти рассуждения, мы видим, что *любое векторное поле с изолированными нулями можно заменить невырожденным векторным полем, не изменив* $\Sigma\iota$.

3-й шаг. *Многообразия с краем. Если* $M \subset R^k$ имеет край, то любое векторное поле, направленное на ∂M «наружу», опять можно так продолжить на окрестность N_ε, чтобы на ∂N_ε оно было направлено наружу. Однако возникают некоторые трудности с гладкостью из-за края M. Так, N_ε не является гладким (в нашем смысле, т. е. дифференцируемым класса C^∞) многообразием, а только многообразием класса C^1.

Продолжение w, если определять его, как и выше, формулой $w(x) = v(r(x)) + (x - r(x))$, будет только непрерывным векторным полем вблизи ∂M. Тем не менее доказательство можно довести до конца либо показав, что наши сильные требования гладкости в действительности не нужны, либо другими методами[2]).

---

[1]) Ясно, что v' невырожденно внутри N_1; но если y доста-т чно мало, то v' вообще не будет обращаться в нуль на $N \setminus N_1$

[2]) При первом варианте наиболее «неприятной» является, вероятно, «обосновательская» деятельность, вроде доказательства C^1-гладкости N_ε, однозначной определенности и непрерывности $r(x)$ и тому подобные простые, но громоздкие рассуждения. О непрерывных векторных полях см. § 8, задача 18*. Другой вариант - 8, задача 20*. — *Прим. ред.*