§ 7. ОСНАЩЕННЫЙ БОРДИЗМ[1]); КОНСТРУКЦИЯ ПОНТРЯГИНА

Степень отображения $M \to M'$ определена только в том случае, когда M и M' — ориентированные многообразия одинаковой размерности. Мы будем изучать предложенное Понтрягиным обобщение степени, определяемое для произвольного гладкого отображения

$$f\colon M \to S^p$$

произвольного компактного многообразия без края в сферу. Сначала дадим несколько определений.

Пусть N и N' — компактные n-мерные подмногообразия M, причем $\partial N = \partial N' = \partial M = \varnothing$. Разность размерностей $m - n$ называется *коразмерностью* подмногообразий.

Определение. *Подмногообразие N бордантно N'* в M, если подмножество

$$N \times [0, \varepsilon) \cup N' \times (1 - \varepsilon, 1]$$

многообразия $M \times [0, 1]$ можно так расширить до компактного многообразия

$$X \subset M \times [0, 1],$$

что

$$\partial X = N \times 0 \cup N' \times 1,$$

---

[1]) Следует предупредить о некотором разнобое в терминологии. Бордизмы еще несколько лет назад называли (а иногда и сейчас по старой памяти называют) кобордизмами. Такой терминологией пользовался и Милнор в оригинале этой книги. Недавнее изменение терминологии вызвано тем, что бордизмы (бывшие кобордизмы) в некотором отношении аналогичны гомологиям; термин «кобордизм» резервируется для другого понятия, примерно так же связанного с бордизмами, как когомологии с гомологиями.

Далее, термин «бордизм» чаще употребляется в словосочетании «*класс бордизмов*» (т. е. класс бордантных друг другу подмногообразий многообразия M). Вместе с тем раньше слово «бордизм» (в то время — «кобордизм») означало тройку (X, N, N') с описанными выше свойствами. В переводе было решено сохранить «бордизмы» только в первом словосочетании. Что же до X, то я рискнул воспользоваться словом, которое топологи постоянно употребляют устно: они называют X «пленкой» (подробнее: пленкой, соединяющей N с N' или реализующей их бордантность). — *Прим. ред.*

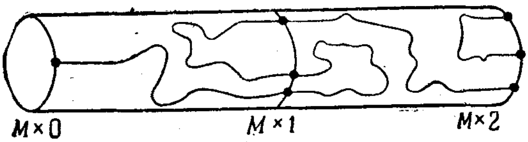

Рис. 15. Склеивание двух бордизмов внутри M.

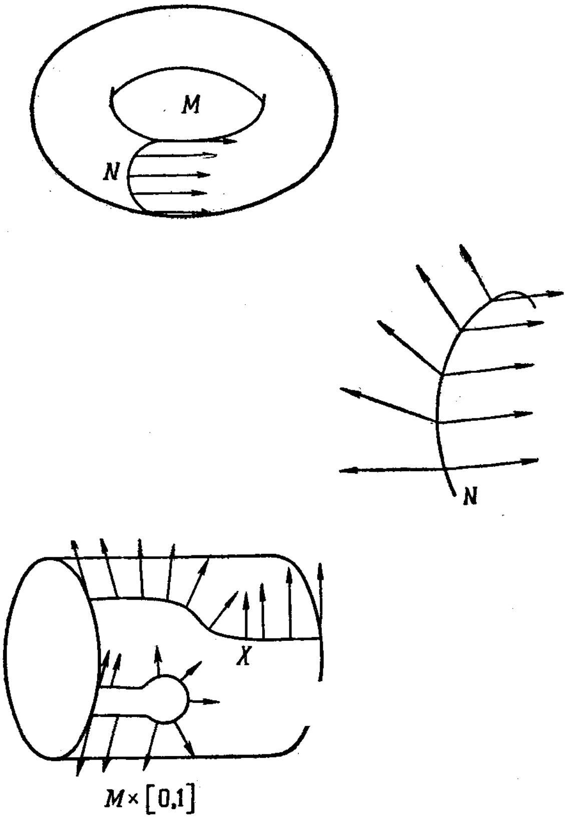

Рис. 16. Оснащенные подмногообразия и оснащенная пленка.

а X (которое в дальнейшем будет называться «пленкой») не пересекается с $M \times 0 \cup M \times 1$, кроме точек края ∂X.

Ясно, что бордизм является отношением эквивалентности (см. рис. 15).

Определение. *Оснащением* подмногообразия $N \subset M$ называется гладкая функция $\mathfrak{v}$, ставящая в соответствие каждой точке $x \in N$ базис

$$\mathfrak{v}(x) = (v^1(x), \ldots, v^{m-n}(x))$$

пространства $TN_x^\perp \subset TM_x$ векторов, нормальных в точке x к N в многообразии M. (см. рис. 16). Пара $(N, \mathfrak{v})$ *называется оснащенным подмногообразием* многообразия M. Два оснащенных подмногообразия $(N, \mathfrak{v})$ и $(N', \mathfrak{w})$ *оснащенно бордантны*, если существуют такая пленка $X \subset M \times [0, 1]$, соединяющая N и N', и такое оснащение $\mathfrak{u}$ пленки X, что

$$u^i(x, t) = (v^i(x), 0) \quad \text{для} \quad (x, t) \in N \times [0, \varepsilon),$$
$$u^i(x, t) = (w^i(x), 0) \quad \text{для} \quad (x, t) \in N' \times (1 - \varepsilon, 1].$$

Это опять отношение эквивалентности[1]).

[1]) Так как далее речь будет идти о бордантности многообразий, являющихся прообразами регулярных значений, то целесообразно уточнить, что это означает в том случае, когда один из этих прообразов пуст.

По большей части Милнор дает такие формулировки, которые сохраняются и в этом случае, если условиться чисто формально называть пустое множество $\varnothing$ «компактным n-мерным подмногообразием многообразия M» (с n, зависящим от обстановки. Когда речь идет об оснащении, то ввиду отсутствия в $\varnothing$ точек сопоставлять им базисы не приходится.) Так, можно всюду в приведенном выше определении бордантности подмногообразий N и N' заменить N' на $\varnothing$; получится формулировка некоторого свойства подмногообразия $N \subset M$. Формальная замена N' на $\varnothing$ не совсем годится только в самом названии этого свойства: если N этим свойством обладает, то обычно говорят, не «N бордантно в M пустому множеству», а «N бордантно в M нулю» или «N ограничивает в M». Ради ясности повторим определения для этого случая.

Компактное n-мерное подмногообразие $N \subset M$, где $\partial N = \partial M = \varnothing$, *бордантно нулю в* M (*ограничивает в* M), если в $M \times [0,1]$ подмножество $N \times [0, \varepsilon)$ можно расширить до «натя-

Рассмотрим теперь гладкое отображение $f\colon M \to S^p$ и его регулярное значение $y \in S^p$. Отображение f следующим образом индуцирует оснащение многообразия $f^{-1}(y)$. Выберем положительно ориентированный базис $\mathfrak{v} = (v^1, \ldots, v^p)$ касательного пространства $T(S^p)_y$. Напомним, что для каждого $x \in f^{-1}(y)$ (см. стр. 194) производная

$$df_x\colon TM_x \to T(S^p)_y$$

переводит подпространство $Tf^{-1}(y)_x$ в 0, а его ортогональное дополнение $Tf^{-1}(y)_x^{\perp}$ изоморфно отображает на $T(S^p)_y$. Поэтому существует единственный вектор

$$w^i(x) \in Tf^{-1}(y)_x^{\perp} \subset TM_x,$$

который переводится в v^i под действием df_x. Для полученного оснащения $w^1(x), \ldots, w^p(x)$ многообразия $f^{-1}(y)$ будет удобно использовать обозначение $\mathfrak{w} = f^*\mathfrak{v}$.

Определение. Оснащенное многообразие $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v})$ будет называться *многообразием Понтрягина*, соответствующим отображению F.

Конечно, у f есть много многообразий Понтрягина. Они получаются при различном выборе y и $\mathfrak{v}$, но все они принадлежат к одномv и тому же классу оснащенных бордизмов.

Теорема А. *Если y' — другое регулярное значение для f, а $\mathfrak{v}'$ — положительно ориентированный базис*

нутой на $N \times 0$ пленки X», т. е. до такого компактного подмногообразия $X \subset M \times [0, 1]$, что $\partial X = N \times 0$ и X не пересекается с $M \times 0$ и $M \times 1$, кроме точек края ∂X. Пусть теперь N оснащено и $\mathfrak{v}$ — оснащение. Пара $(N, \mathfrak{v})$ оснащенно бордантна нулю в M, если в $M \times [0, 1]$ существует такая пленка X, натянутая на $N \times 0$, что $\mathfrak{v}$ продолжается до оснащения $\mathfrak{u}$ этой пленки в $M \times [0, 1]$, т. е.

$$u^i(x, t) = (v^i(x), 0) \quad \text{при} \quad (x, t) \in N \times [0, \varepsilon).$$

— *Прим. ред.*

пространства $T(S^p)_{y'}$, *то оснащенное многообразие* $(f^{-1}(y'), f^*\mathfrak{v}')$ *оснащенно бордантно* $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v})$.

Теорема В. *Два гладких отображения многообразия M в S^p гладко гомотопны тогда и только тогда, когда соответствующие многообразия Понтрягина оснащенно бордантны*[1]).

Теорема С. *Любое оснащенное компактное подмногообразие $(N, \mathfrak{w})$ коразмерности p в M является многообразием Понтрягина, соответствующим некоторому гладкому отображению $f: M \to S^p$.*

Таким образом, классы гомотопных отображений находятся во взаимно однозначном соответствии с классами оснащенных бордизмов подмногообразий.

Доказательство теоремы А очень похоже на рассуждения § 4 и 5. Оно будет основано на трех леммах.

Лемма 1. *Если $\mathfrak{v}$ и $\mathfrak{v}'$ — два разных положительно ориентированных базиса в точке y, то многообразие Понтрягина $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v})$ оснащенно бордантно многообразию $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v}')$.*

Доказательство. Выберем гладкий путь, соединяющий $\mathfrak{v}$ с $\mathfrak{v}'$ в пространстве положительно ориентированных базисов пространства $T(S^p)_y$. Существование такого пути обеспечивается линейной связностью пространства положительно ориентированных базисов, которое можно отождествить с пространством $GL^+(p, R)$ матриц p-го порядка, имеющих

[1]) В частности, гладкое отображение $M^m \to S^p$ гладко гомотопно постоянному отображению (отображению, образ которого сводится к одной единственной точке) тогда и только тогда, когда соответствующее многообразие Понтрягина оснащенно бордантно нулю.

Отметим еще, что в теореме В вместо «гладкой гомотопии» можно говорить просто о «гомотопии», однако по-прежнему считая рассматриваемые отображения $M^m \to S^p$ гладкими (см. § 8, задача 4). Для непрерывных, но не гладких отображений $M^m \to S^p$ говорить о многообразии Понтрягина не приходится, однако из той же задачи видно, что их гомотопическая классификация сводится к гомотопической классификации гладких отображений. — *Прим. ред.*

положительный определитель [1]). Этот путь и дает требуемое оснащение пленки $f^{-1}(y)\times[0, 1]$.

Допуская некоторую вольность в обозначениях, мы будем часто опускать указание на $f^*\mathfrak{v}$ и говорить просто об «оснащенном многообразии $f^{-1}(y)$».

Лемма 2. *Если y — регулярное значение для f, а z достаточно близко к y, то многообразие $f^{-1}(z)$ оснащенно бордантно многообразию $f^{-1}(y)$.*

Доказательство. Ввиду компактности множества $f(C)$ критических значений отображения f мы можем выбрать так $\varepsilon>0$, чтобы ε-окрестность точки y содержала бы только регулярные значения. Зафиксировав z, $\|z-y\|<\varepsilon$, выберем гладкое однопараметрическое семейство вращений (т. е. изотопию) r_t: $S^p\to S^p$ так, что $r_1(y)=z$ и

1) r_t — тождественное отображение при $0\leqslant t\leqslant\varepsilon'$;

2) r_t совпадает с r_1 при $1-\varepsilon'<t\leqslant 1$;

3) для всех t, $0\leqslant t\leqslant 1$, прообраз $r_t^{-1}(z)$ лежит на большой окружности, проходящей через y и z, и, следовательно, является регулярным значением отображения f. Определим гомотопию

$$F: M\times[0, 1]\to S^p$$

формулой $F(x, t)=r_t\circ f(x)$. Для каждого t точка z является регулярным значением композиции

$$r_t\circ f: M\to S^p.$$

Из этого следует, что z тем более является регулярным значением отображения F. Поэтому

$$F^{-1}(z)\subset M\times[0, 1]$$

— оснащенное многообразие; оно задает оснащенный бордизм между оснащенными многообразиями $f^{-1}(z)$ и $(r_1\circ f)^{-1}(z)=f^{-1}\circ r_1^{-1}(z)=f^{-1}(y)$. Это доказывает лемму 2.

---

[1]) См. сноску на стр. 222. — *Прим. ред.*

Лемма 3. *Если f и g гладко гомотопны, а y является регулярным значением для них обоих, то $f^{-1}(y)$ оснащенно бордантно $g^{-1}(y)$.*

Доказательство. Выберем такую гомотопию F, что

$$F(x, t)=f(x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon,$$
$$F(x, t)=g(x) \quad \text{при} \quad 1-\varepsilon \leqslant t \leqslant 1.$$

Пусть z — такое близкое к y регулярное значение отображения F, что $f^{-1}(z)$ оснащенно бордантно $f^{-1}(y)$ и $g^{-1}(z)$ оснащенно бордантно $g^{-1}(y)$. Тогда $F^{-1}(z)$ — оснащенное многообразие; оно задает оснащенный бордизм между $f^{-1}(z)$ и $g^{-1}(z)$. Это доказывает лемму 3.

Доказательство теоремы А. Для двух фиксированных регулярных значений y и z отображения f можно так выбрать вращения

$$r_t\colon S^p \to S^p,$$

что r_0 — тождественное отображение, а $r_1(z)=z$. Тогда отображение f гомотопно композиции $r_1 \circ f$; поэтому $f^{-1}(z)$ оснащенно бордантно оснащенному подмногообразию

$$(r_1 \circ f)^{-1}(z)=f^{-1} \circ r_1^{-1}(z)=f^{-1}(y).$$

Доказательство теоремы А закончено.

Доказательство теоремы С будет основано на утверждении, относящемся к следующей ситуации. Пусть $N \subset M$ является оснащенным подмногообразием коразмерности p с оснащением $\mathfrak{v}$. Пусть N компактно и $\partial N=\partial M=\varnothing$.

Теорема об окрестности — прямом произведении. *Некоторая окрестность подмногообразия N в M диффеоморфна произведению $N \times R^p$, причем диффеоморфизм можно выбрать так, чтобы каждая точка $x \in N$ соответствовала точке $(x, 0) \in N \times R^p$, а любое наперед заданное нормальное оснащение $\mathfrak{v}(x)$ соответствовало стандартному базису в R^p.*

Замечание. Не каждое подмногообразие имеет окрестность, диффеоморфную произведению подмногообразия на евклидово пространство (см. рис. 17).

Доказательство. Сначала предположим, что M является евклидовым пространством R^{n+p}. Рассмотрим отображение g: $N \times R^p \to M$, определенное формулой

$$g(x;\ t_1,\ \ldots,\ t_p) = x + t_1 v^1(x) + \ldots + t_p v^p(x).$$

Ясно, что дифференциал $dg_{(x, 0, \ldots, 0)}$ невырожден; поэтому g диффеоморфно отображает некоторую окрестность точки $(x, 0) \in N \times R^p$ на открытое множество.

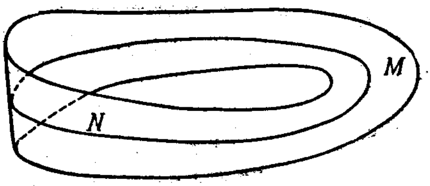

Рис. 17. Подмногообразие, не допускающее оснащения.

Мы докажем, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ отображение g взаимно однозначно на всей окрестности $N \times U_\varepsilon$ многообразия $N \times 0$; здесь U_ε обозначает ε-окрестность нуля в R^p. В противном случае в $N \times R^p$ существовали бы такие пары $(x, u) \neq (x', u')$ со сколь угодно малыми $\| u \|$ и $\| u' \|$, что

$$g(x, u) = g(x', u').$$

Ввиду компактности многообразия N мы могли бы выбрать такую последовательность подобных пар, что x сходятся, скажем, к x_0, x' — к x'_0, $u \to 0$ и $u' \to 0$. В этом случае ясно, что $x_0 = x'_0$, и мы получили бы противоречие с взаимной однозначностью отображения g в окрестности точки $(x_0, 0)$.

Следовательно g диффеоморфно отображает $N \times U_\varepsilon$ на некоторое открытое множество. Но U_ε

диффеоморфно всему евклидову пространству R^p посредством отображения

$$u \to \frac{u}{1 - \frac{\|u\|^2}{\varepsilon^2}}.$$

Так как $g(x, 0) = x$ и $dg_{(x, 0)}$ обладает нужными свойствами, то теорема об окрестности — прямом произведении в частном случае $M = R^{n+p}$ доказана.

В общем случае прямые линии в R^{n+p} нужно заменить геодезическими линиями на M. Более точно, пусть $g(x, t_1, \ldots, t_p)$ — конец дуги геодезической линии на M длины $\| t_1 v^1(x) + \ldots + t_p v^p(x) \|$, выходящей из точки x с начальным вектором скорости

$$\frac{t_1 v^1(x) + \ldots + t_p v^p(x)}{\| t_1 v^1(x) + \ldots + t_p v^p(x) \|}.$$

Читателю, знакомому с геодезическими, не составит труда проверить, что при достаточно малом ε отображение

$$g\colon N \times U_\varepsilon \to M$$

корректно определено, гладко и диффеоморфно отображает некоторую окрестность точки $(x, 0) \in N \times U_\varepsilon$ на некоторое открытое множество[1]). Конец доказательства проводится точно так же, как выше.

---

[1]) Читатель, недостаточно знакомый с геодезическими, возможно, найдет более простым следующий путь. Считая, что $N^n \subset M^m \subset R^k$, напомним, что Милнор рассматривает касательное пространство TM_x^m как m-мерное векторное пространство в R^k, проходящее через 0 (а не через x); параллельное ему линейное пространство, проходящее через x, обозначим на минуту через L_x.

Пусть $TM_x^\perp$ — векторное $(k - m)$-мерное пространство, ортогональное к TM_x и тоже проходящее через 0, и $L_x^\perp$ — параллельное ему линейное пространство, проходящее через x. Точки пространства L_x суть $x + y$, $y \in TM_x$, а точки $L_x^\perp$ суть $x + z$, $z \in TM_x^\perp$. Каждую точку $q \in M$ можно ортогонально спроектировать на L_x и $L_x^\perp$; пусть $x + y$ и $x + z$ — эти проекции. Тогда

Доказательство теоремы С. Пусть $N \subset \subset M$ — компактное оснащенное подмногообразие без края. Возьмем, как это было сделано выше, представление некоторой окрестности V подмногообразия N в виде произведения

$$g\colon N \times R^p \to V \subset M$$

и определим проекцию

$$\pi\colon V \to R^p$$

формулой $\pi(g(x, y)) = y$ (см. рис. 18). Ясно, что 0 является регулярным значением, а $\pi^{-1}(0)$ в точности совпадает с N вместе с заданным на нем оснащением.

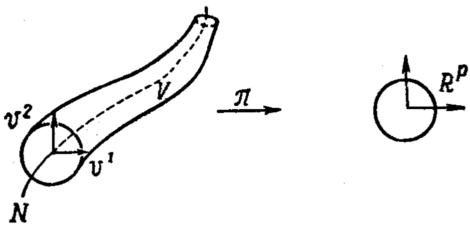

Рис. 18. Построение отображения с заданным многообразием Понтрягина.

Теперь возьмем какое-нибудь гладкое отображение $\varphi\colon R^p \to S^p$, которое переводит все точки x с $\|x\| \geqslant 1$ в одну «отмеченную» точку s_0, а открытый

некоторая окрестность W точки x на многообразии M описывается уравнением вида

$$z = f^x(y) \quad \left(z \in TM_x^{\perp},\ y \in TM_x,\ \|y\| < \varepsilon\right),$$

где $f^x\colon TM_x \to TM_x^{\perp}$ — гладкая функция и $df_0^x = 0$.

Иными словами, каждая точка $q \in W$ имеет своей ортогональной проекцией на L_x некоторое $x + y$, где y мало, а на $L_x^{\perp}$ — $x + z$, где $z = f^x(y)$; такую точку q мы обозначим через $h^x(y)$. Тогда можно принять

$$g(x, t_1, \ldots, t_p) = h^x\left(t_1 v^1(x) + \ldots + t_p v^p(x)\right).$$

— *Прим. ред.*

единичный шар диффеоморфно отображает[1]) на $S^p \setminus s_0$. Определим

$$f\colon M \to S^p,$$

положив

$$f(x) = \varphi(\pi(x)) \quad \text{при} \quad x \in V,$$
$$f(x) = s_0 \quad \text{при} \quad x \notin V.$$

Ясно, что F — гладкое отображение и $\varphi(0)$ является его регулярным значением. Так как соответствующее многообразие Понтрягина

$$f^{-1}(\varphi(0)) = \pi^{-1}(0)$$

в точности совпадает с оснащенным многообразием N, то доказательство теоремы С закончено.

Для доказательства теоремы В нам сначала необходимо показать, что многообразие Понтрягина любого отображения однозначно определяет его класс гомотопных отображений. Пусть $f, g\colon M \to S^p$ — гладкие отображения, а y является регулярным значением для них обоих.

Лемма 4. *Если оснащенное многообразие $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v})$ совпадает с $(g^{-1}(y), g^*\mathfrak{v})$, то отображение f гладко гомотопно g.*

Доказательство. Обозначим $N = f^{-1}(y)$. Предположение $f^*\mathfrak{v} = g^*\mathfrak{v}$ означает, что $df_x = dg_x$ для всех $x \in N$.

Сначала предположим, что f в действительности совпадает с g на целой окрестности V многообразия N. Пусть $h\colon S^p \setminus y \to R^p$ — стереографическая проекция

[1]) Например, $\varphi(x) = h^{-1}(x/\lambda(\|x\|^2))$, где h — стереографическая проекция из точки s_0, λ — гладкая монотонно убывающая функция, причем $\lambda(t) > 0$ при $t < 1$ и $\lambda(t) = 0$ при $t \geqslant 1$. (Считаем, что s_0 — северный полюс сферы S^p, а R^p параллельно $TS^p_{s_0}$. — *Ред.*)

из точки y. Тогда гомотопия

$$F(x, t) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in V,$$

$$F(x, t) = h^{-1}[t \cdot h(f(x)) + (1-t)\, h(g(x))] \text{ при } x \in M \setminus N$$

показывает, что f гладко гомотопно g.

Таким образом, нам достаточно так продеформировать f, чтобы оно в некоторой малой окрестности подмногообразия N совпало с g; при этом надо позаботиться о том, чтобы в процессе деформации никакие новые точки не отображались бы в y. Возьмем представление окрестности V многообразия N в виде прямого произведения $N \times R^p \to V \subset M$, и пусть V — настолько малая окрестность, что ни $f(V)$, ни $g(V)$ не содержат точки $\bar{y}$, центрально-симметричной точке y. Отождествляя V с $N \times R^p$ и $S^p \setminus \bar{y}$ с R^p, мы получаем из f, g отображения

$$F, G\colon N \times R^p \to R^p,$$

причем

$$F^{-1}(0) = G^{-1}(0) = N \times 0$$

и

$$dF_{(x, 0)} = dG_{(x, 0)} = (\text{проекция на } R^p)$$

для всех $x \in N$.

Сначала мы найдем такую постоянную c, что

$$F(x, u) \cdot u > 0, \quad G(x, u) \cdot u > 0$$

при $x \in N$ и $0 < \| u \| < c$, т. е. точки $F(x, u)$ и $G(x, u)$ принадлежат одному и тому же открытому полупространству в R^p [1]). Поэтому гомотопия

$$-t)\, F(x, u) + tG(x, u),$$

соединяющая F с G, не переводит никаких новых точек в 0 — по крайней мере при $\| u \| < c$.

Согласно теореме Тейлора,

$$\| F(x, u) - u \| \leqslant c_1 \| u \|^2 \quad \text{при} \quad \| u \| \leqslant 1.$$

[1]) Именно з; используется, что $df_x = dg_x$ при всех $x \in N$. — *Прим* *ред.*

Поэтому
$$|(F(x, u) - u) \cdot u| \leqslant c_1 \| u \|^3$$
и
$$F(x, u) \cdot u \geqslant \| u \|^2 - c_1 \| u \|^3 > 0$$
при $0 < \| u \| < \min(c_1^{-1}, 1)$; аналогичное неравенство справедливо и для G.

Чтобы образы удаленных от N точек не пришлось двигать при гомотопии, возьмем такую гладкую функцию λ: $R^p \to R$, что
$$\lambda(u) = 1 \quad \text{при} \quad \| u \| \leqslant c/2,$$
$$\lambda(u) = 0 \quad \text{при} \quad \| u \| \geqslant c.$$
Тогда гомотопия
$$F_t(x, u) = [1 - \lambda(u) t] F(x, u) + \lambda(u) t G(x, u)$$
соединяет отображение $F = F_0$ с отображением F_1, которое (1) совпадает с G в области $\| u \| < \frac{c}{2}$; (2) совпадает с F при $\| u \| \geqslant c$; (3) не имеет новых нулей. Тем самым получается требуемая деформация исходного отображения f, и лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы В. Если f и g гладко гомотопны, то, согласно лемме 3, многообразия Понтрягина $f^{-1}(y)$ и $g^{-1}(y)$ оснащенно бордантны. Обратно, если $f^{-1}(y)$ и $g^{-1}(y)$ оснащенно бордантны, а $(X, \mathfrak{w})$ — оснащенная пленка, реализующая этот бордизм, то с помощью рассуждений, полностью аналогичных доказательству теоремы С, строится гомотопия
$$F\colon M \times [0, 1] \to S^p,$$
для которой многообразие Понтрягина $(F^{-1}(y), F^*\mathfrak{w})$ в точности совпадает с $(X, \mathfrak{w})$. Положим $F_t(x) = F(x, t)$ и заметим, что F_0 и f имеют одно и то же многообразие Понтрягина. Поэтому $F_0 \sim f$, согласно лемме 4; аналогично $F_1 \sim g$. Отсюда $f \sim g$, и теорема В доказана.

Замечания. Теоремы А, В и С можно легко обобщить на тот случай. когда M — многообразие с краем. Основная идея состоит в том, чтобы рассматривать только те отображения, которые переводят край в отмеченную точку s_0. Гомотопические классы таких отображений

$$(M, \partial M) \to (S^p, s_0)$$

находятся во взаимно однозначном соответствии с классами бордизмов оснащенных подмногообразий

$$N \subset \text{Внутренность } (M)$$

коразмерности p. Если $p \geqslant {}^1/_2 m + 1$, то в этом множестве гомотопических классов можно ввести структуру абелевой группы, которая называется p-й *когомотопической* группой $\pi^p(M, \partial M)$. Групповая операция в $\pi^p(M, \partial M)$ соответствует операции объединения непересекающихся оснащенных подмногообразий, лежащих во внутренности M (см. § 8, задача 17).

Теорема Хопфа

В качестве примера рассмотрим следующую ситуацию. Пусть M — связное ориентированное многообразие размерности $m = p$. Оснащенное подмногообразие коразмерности p — это просто конечное множество точек с выделенным базисом касательного пространства в каждой из них.

Пусть $\operatorname{sgn}(x)$ равно $+1$ или -1 в зависимости от того, согласуется ли ориентация выделенного базиса с ориентацией M или нет. Тогда $\Sigma \operatorname{sgn}(x)$, очевидно, равна степени соответствующего отображения $M \to S^m$. С другой стороны, не трудно понять, что класс оснащенных бордизмов нульмерных многообразий однозначно определяется целым числом $\Sigma \operatorname{sgn}(x)$. Следовательно, мы доказали следующую теорему.

Теорема Хопфа. *Если M — компактное связное ориентированное m-мерное многообразие без края, то два отображения $M \to S^m$ гладко гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень.*

С другой стороны, предположим, что M неориентируемо. Тогда, взяв какой-нибудь базис в TM_x, можно провести точку x по такому замкнутому пути в M, что этот базис непрерывно перейдет в базис, имеющий противоположную ориентацию[1]). В этом случае просто доказывается следующее утверждение.

Теорема. *Если M — связное компактное неориентируемое m-мерное многообразие без края, то два отображения $M \to S^m$ гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень* mod 2.

Теория оснащенных бордизмов была разработана Понтрягиным для изучения гомотопических классов отображений $S^m \to S^p$ при $m > p$ (случай $m < p$ три-

---

[1]) Пусть $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — путь в многообразии M (т. е. точка $x(t) \in M$ непрерывно зависит от t). Пусть выбрана ориентация $\mathcal{O}_0$ касательного пространства $TM_{x(0)}$. Существует такой базис $\mathfrak{v}$ в $TM_{x(t)}$, который непрерывно зависит от t (т. е. состоит из непрерывно зависящих от t векторов) и при $t = 0$ ориентирован согласно $\mathcal{O}_0$. (Существование такого базиса $\mathfrak{v}(t)$ очевидно, если весь путь целиком лежит в одной координатной окрестности, т. е. $x([0, 1]) \subset g(U)$, где g: $U \to M$ — некоторая параметризация. В общем же случае можно разбить путь на участки, целиком лежащие в некоторых координатных окрестностях.) Базисов $\mathfrak{v}(t)$ с указанными свойствами существует много, но ориентация $\mathcal{O}_1$, которую $\mathfrak{v}(1)$ определяет в $TM_{x(1)}$, зависит только от исходной ориентации $\mathcal{O}_0$ и, может быть, еще от пути $x(t)$. (Если $\mathfrak{w}(t)$ — другой непрерывно зависящий от t базис в $TM_{x(t)}$, то при всех t переход от первого базиса ко второму описывается невырожденной матрицей m-го порядка, и если ее определитель положителен при $t = 0$, то он будет положителен и при $t = 1$.) Будем говорить, что ориентация $\mathcal{O}_1$ *получается при переносе* $\mathcal{O}_0$ *вдоль пути* $x(t)$.

Допустим теперь, что на M не существует замкнутого пути, *обращающего ориентацию*, т. е. такого пути $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x(0) = x(1)$, при переносе вдоль которого в $TM_{x(1)} = TM_{x(0)}$ получается ориентация, противоположная исходной. Зафиксировав какую-нибудь точку $x \in M$ и какую-нибудь ориентацию $\mathcal{O}_x$ пространства TM_x, определим для любой точки $y \in M$ ориентацию $\mathcal{O}_y$, как ту ориентацию, которая получается при переносе $\mathcal{O}_x$ вдоль какого-нибудь пути, соединяющего x с y. Если бы $\mathcal{O}_y$ зависела от выбора этого пути, то, идя из x в y по одному пути и возвращаясь из y в x по другому, мы получили бы путь, обращающий ориентацию. Легко видеть, что ориентации $\mathcal{O}_y$ согласованы в смысле, указанном в начале § 5. Итак, если на многообразии нет замкнутых путей, обращающих ориентацию, то оно ориентируемо (кстати, очевидно, что обратное тоже верно). — *Прим. ред.*

виален). Например, если $m = p + 1 \geqslant 4$, то существует ровно два гомотопических класса отображений $S^m \to S^p$. Понтрягин доказал этот результат, классифицируя одномерные оснащенные подмногообразия в S^m. Гораздо труднее оказалась эта задача при $m = p + 2 \geqslant 4$, но и в этом случае ему удалось, используя 2-мерные оснащенные многообразия, показать, что существуют ровно два гомотопических класса. Однако при $m - p > 2$ такой подход к этой задаче упирается в трудности с многообразиями большей размерности[1]. С тех пор выяснилось, что гомотопические классы отображений проще вычислять при помощи совсем других, более алгебраических методов[2]. Конструкция Понтрягина, однако, является обоюдоострым оружием. Она не только позволяет нам переводить информацию о многообразиях на язык гомотопической теории, но и, наоборот, позволяет переводить информацию о гомотопиях на язык теории многообразий. Некоторые наиболее глубокие работы по современной топологии возникли при взаимодействии этих двух теорий. Важным примером является работа Тома о бордизме ([40], [21])

§ 8. УПРАЖНЕНИЯ

В заключение читателю предлагается несколько задач.

Задача 1. Показать, что степень композиции $g \circ f$ равна произведению (степень g) $\cdot$ (степень f).

Задача 2. Показать, что любой комплексный многочлен степени n задает гладкое отображение степени n сферы S^2 на себя.

Задача 3. Доказать, что если отображения f и g единичной сферы S^p удовлетворяют условию $\|f(x) - g(x)\| < 2$ при всех x, то f гомотопно g, и гомотопия гладкая, если f и g гладкие.

---

[1]) Этим методом удалось еще разобрать случай $m - p = 3$ (В. А. Рохлин [31*]). — *Прим. ред.*

[2]) См., например, Ху Сы-цзян [56] (или [36*], [49*]. — *Ред.*).