(которых будет не менее r и не более $2r$). Обозначим эйлерову характеристику полученной замкнутой поверхности через χ'. Докажите, что $\chi' \geqslant \chi + r$ и $\chi' \leqslant 2$. Выведите отсюда, что род $M < \infty$.

в) Какие из замкнутых поверхностей ограничивают?

Задача 26*. Пусть $M^{n-1} \subset R^n$ — гладкое компактное подмногообразие без края, а S^{n-1} — единичная сфера $\| x \| = 1$. Для любой точки $p \in M^{n-1}$ определим *порядок* $\operatorname{mod} 2$ *точки p относительно* M^{n-1} как степень $\operatorname{mod} 2$ отображения

$$(*) \qquad M^{n-1} \to S^{n-1}, \qquad x \to \frac{x-p}{\|x-p\|}.$$

Обозначим его через $\omega(p, M^{n-1})$. Возьмем на какой-нибудь гладкой дуге, трансверсально пересекающей M^{n-1} в точке p_0, две точки p_1 и p_2, близкие к p_0 и расположенные по разные стороны от нее. Докажите, что

$$\omega(p_1, M^{n-1}) \equiv \omega(p_2, M^{n-1}) \operatorname{mod} 2.$$

Выведите отсюда, что $R^n \setminus M^{n-1}$ несвязно. Рассматривая подходящую окрестность M^{n-1}, докажите, что $R^n \setminus M^{n-1}$ состоит ровно из двух компонент и что M^{n-1} совпадает с границей каждой из них. Докажите, наконец, что M^{n-1} ориентируемо и допускает оснащение в R^n.

(Теперь мы могли бы, ориентировав M^{n-1}, определить *порядок точки p относительно* M^{n-1} как степень отображения $(*)$. Очевидно, это коэффициент зацепления p и M^{n-1}. Разумеется, можно и в общем случае ввести коэффициент зацепления $\operatorname{mod} 2$; наш порядок $\operatorname{mod} 2$ — частный случай.)

Приложение

КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Здесь мы докажем один результат, который использовался в этой книге.

Теорема. *Любое связное гладкое одномерное многообразие диффеоморфно либо окружности S^1, либо интервалу числовой оси R.*

(*Интервал* — это связное подмножество R, не сводящееся к одной точке. Он может быть конечным или бесконечным, замкнутым, открытым или полуоткрытым.)

Поскольку любой интервал диффеоморфен[1]) либо $[0, 1]$, либо $(0, 1]$, либо $(0, 1)$, то существуют только четыре различных связных одномерных многообразия.

В доказательстве будет использовано понятие «длины дуги». Обозначим интервал буквой I.

Определение. Отображение f: $I \to M$ называется *параметризацией длиной дуги*, если f диффеоморфно отображает I на открытое подмножество[2]) многообразия M и при каждом $s \in I$ длина «вектора скорости» $df_s(1) \in TM_{f(s)}$ равна единице.

Любая локальная параметризация $I' \to M$ путем простой замены переменной может быть переобразована в параметризацию длиной дуги.

Лемма. *Пусть f: $I \to M$ и g: $J \to M$ — две параметризации длиной дуги. Тогда $f(I) \cap g(J)$ имеет не более двух компонент связности. Если это пересечение состоит только из одной компоненты, то f можно продолжить до параметризации длиной дуги объединения $f(I) \cup g(J)$. Если имеются две компоненты, то M обязательно диффеоморфно S^1.*

Доказательство. Ясно, что $g^{-1} \circ f$ диффеоморфно отображает любое относительно открытое[3]) подмножество интервала I на относительно открытое подмножество интервала J. Кроме того, производная функции $g^{-1} \circ f$ всюду равна $+1$ либо -1.

Рассмотрим график этой функции $\Gamma \subset I \times J$; он состоит из всех тех точек (s, t), что $f(s) = g(t)$. Тогда Γ — замкнутое подмножество в $I \times J$, состоящее из отрезков прямых наклона ± 1. Так как Γ

[1]) Бесконечный интервал диффеоморфно отображается на единичный, например, при помощи отображения вида $f(t) = a \operatorname{th} t + b$.

[2]) Следовательно, I может иметь граничные точки только в том случае, когда M имеет край.

[3]) См. сноску на стр. 195. — *Прим. ред.*

замкнуто в $I \times J$ и $g^{-1} \circ f$ — локальный диффеоморфизм, то эти отрезки прямых не могут кончаться внутри $I \times J$, а должны достигать границы. Поскольку $g^{-1} \circ f$ взаимно однозначно, то на каждой из четырех сторон прямоугольника $I \times J$ может кончаться, самое большее, один такой отрезок.

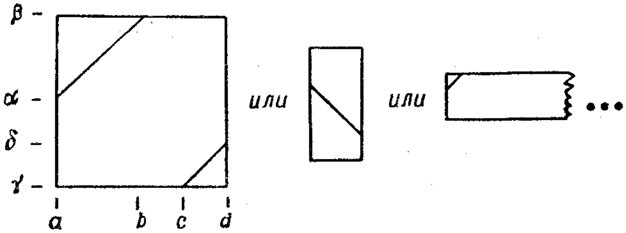

Рис. 19. Три из возможных вариантов для Г.

Следовательно, I состоит не более чем из двух компонент. (См. рис. 19.) Кроме того, если I состоит из двух компонент, то обе они должны иметь одинаковый наклон.

Если Г связно, то $g^{-1} \circ f$ продолжается до линейного отображения $L\colon R \to R$. Тогда комбинация f и $g \circ L$ дает требуемое продолжение

$$F\colon I \cup L^{-1}(J) \to f(I) \cup g(J).$$

Если Г имеет две компоненты с наклоном, скажем, $+1$, то оно должно быть устроено, как в левом прямоугольнике на рис. 19[1]). Преобразуя, если необходимо, интервал $J = (\gamma, \beta)$, мы можем считать, что $\gamma = c$ и $\delta = d$, так что

$$a < b \leqslant c < d \leqslant \alpha < \beta.$$

Полагая теперь $\theta = 2\pi t/(\alpha - a)$, мы задаем требуемый диффеоморфизм

$$h\colon S^1 \to M$$

[1]) В частности, в этом случае I и J должны быть конечными. — *Прим. ред.*

формулой

$$h(\cos\theta,\ \sin\theta)=\begin{cases} f(t) & \text{при}\quad a<t<d, \\ g(t) & \text{при}\quad c<t<\beta. \end{cases}$$

Образ $h(S^1)$, будучи одновременно компактным и открытым в M, должен совпадать со всем M. Это доказывает лемму.

Доказательство классификационной теоремы. Любую параметризацию длиной дуги можно продолжить до параметризации

$$f\colon\ I\to M,$$

максимальной в том смысле, что f уже нельзя продолжить ни на какой больший интервал как параметризацию длиной дуги: для этого нужно только продолжить f, насколько это возможно, влево[1]), а затем насколько возможно вправо.

Если многообразие M не диффеоморфно S^1, то мы докажем, что f — отображение «на» и, следовательно, диффеоморфизм. Если бы открытое множество $f(I)$ не совпадало со всем M, то у $f(I)$ имелась бы предельная точка x в $M\setminus f(I)$. Параметризовав длиной дуги окрестность точки x и применив лемму, мы получили бы, что f можно продолжить на больший интервал[2]). Это противоречит предположению о максимальности f и, следовательно, завершает доказательство.

---

[1]) Легко видеть, что если существуют продолжения f на отрезки I_α, у каждого из которых правый конец совпадает с правым концом I, то существует и продолжение на $\bigcup I_\alpha$. — *Прим. ред.*

[2]) Если бы пересечение указанной окрестности точки x с $f(I)$ не было связно, то по лемме многообразие M было бы диффеоморфно S^1. — *Прим. ред.*