ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга, предлагаемая вниманию читателя, является переводом двух отдельных книг: Дж. Милнора «Топология с дифференциальной точки зрения» и А. Уоллеса «Дифференциальная топология. Первые шаги» (название, которое вполне подошло бы и к книжке Милнора). Они почти не перекрываются и весьма удачно дополняют друг друга. Вместе взятые, они дают введение в основные понятия дифференциальной топологии, весьма наглядное и доступное широкому кругу читателей, начиная со студентов младших курсов. Авторы излагают некоторые из основных геометрических методов дифференциальной топологии. Алгебраические средства остаются в стороне, но читатель подводится к пониманию того, как возникает необходимость в использовании этих средств. Он сможет понять, в чем состоят некоторые из недавних достижений дифференциальной топологии, но еще не будет в состоянии усвоить полные доказательства. Знакомство с некоторыми из более простых и более старых вещей будет включать и доказательства.

Книга Уоллеса входит в серию «Математических монографий», издаваемую под редакцией Р. Ганнинга и Х. Росси, которая специально предназначена для студентов младших курсов[1]). Ее вполне можно отнести к научно-популярной литературе (если, конечно, не считать, что под это название подпадают только брошюры типа «Отчего бывает день и ночь»).

Местами, особенно к концу, Уоллес не доказывает, а рассказывает — для научно-популярной литературы это вполне естественно (часто даже неизбежно), нужно лишь четко различать, что доказано, а что нет.

В книге Милнора по сравнению с первой изложение является заметно более сжатым, что в известной

---

[1]) Ранее у нас была переведена еще одна из книг этой серии: М. Спивак, Анализ на многообразиях, изд-во «Мир», 1968.

мере связано с ее происхождением. Она основана на записях курса лекций, к тому же весьма небольшого курса, в который Милнор тем не менее сумел включить достаточно содержательный материал. Однако никакого предварительного знакомства читателя с предметом Милнор также не предполагает. Проработав книгу Милнора, читатель сможет заделать почти все дыры в первых семи параграфах книги Уоллеса.

В соответствии с элементарным характером изложения материал первых четырех параграфов у Уоллеса и первых трех параграфов у Милнора еще не относится собственно к дифференциальной топологии: сообщаемые здесь начальные сведения о гладких многообразиях нужны везде, где гладкие многообразия встречаются. Ленг удачно назвал подобный материал «ничьей землей, лежащей между обычным курсом анализа, с одной стороны, и тремя великими дифференциальными теориями — дифференциальной топологией, дифференциальной геометрией и дифференциальными уравнениями — с другой». Этот материал Милнор и Уоллес излагают по-разному.

Милнор ограничивается гладкими многообразиями, расположенными в евклидовом пространстве, а у Уоллеса гладкое многообразие определяется как топологическое пространство с определенной дополнительной структурой (и a priori не предполагается куда-либо вложенным). Преимуществом первого подхода является простота и наглядность, а также резкое сокращение расхода времени на обсуждение оснований (последнее, вероятно, и определило выбор Милнора). Зато абстрактный подход является более гибким, ибо он избавляет от необходимости всякий раз, когда вводится то или иное многообразие, обсуждать, как его расположить в евклидовом пространстве и не зависят ли те или иные свойства от особенностей такого расположения. Другое различие состоит в том, что Милнор подробно останавливается на «приведении в общее положение посредством малых шевелений» (круг вопросов, связанный с теоремой Сарда), тогда как Уоллес этого не касается.

Параграфы 4, 5, 6 книги Милнора посвящены степени отображения и ее применениям. С точки зрения «высокой науки» степень отображения является простым приложением теории гомологий, которая сама является всего лишь самой простой частью алгебраической топологии. Однако несомненно, что многим хотелось бы ознакомиться только со степенью отображения, по возможности избегая всего остального. Книга Милнора предоставляет такую возможность[1]).

Во многом книга Милнора близка к первым двум главам и части третьей главы монографии Л. С. Понтрягина ([29] в списке литературы), по которой учились многие советские математики. За 15 лет эта монография, вышедшая небольшим тиражом, стала довольно редкой; к тому же она по своему характеру труднее для начинающего, ибо ее основная цель не была учебной, а состояла в том, чтобы дать изложение результатов Понтрягина о гомотопических группах сфер, полученных с использованием открытой им связи между задачами гомотопической и дифференциальной топологии. Милнор посвятил этой связи § 7. В конце он иллюстрирует ее на простейшем примере (теорема Хопфа) и сообщает, что теперь эти идеи, если можно так выразиться, работают в другую сторону — не от многообразий к гомотопиям, а наоборот. На этом книжка Милнора естественным образом заканчивается — чтобы идти дальше, требуется аппарат алгебраической топологии в изрядном объеме.

---

[1]) Не зависящее от теории гомологий определение степени отображения дает известные преимущества при преподавании, позволяя строить теорию гомологий сразу для клеточных разбиений.

В чисто логическом отношении более простым следовало бы признать не гладкое, а комбинаторное (но не опирающееся на гомологии) определение степени, ибо таковое можно дать, используя только элементы линейной алгебры и простейшие свойства непрерывных функций. (Непрерывные отображения при этом аппроксимируются не гладкими, а кусочно-линейными.) Однако, хотя формально эти «элементарные» средства и проще, чем анализ, практически последний уже с младших курсов становится не менее привычным; доказательства же при «гладкой» трактовке степени отображения получаются короче и изящнее (что, впрочем, зависит от вкуса).

Основная часть книги Уоллеса посвящена критическим точкам функций и связанным с ними геометрическим операциям (сферическим перестройкам, или перестройкам Морса), которые можно использовать для исследования структуры гладких многообразий. Представление о таком использовании дают приводимые Уоллесом теоремы о двумерных и трехмерных многообразиях. Последний § 8 содержит некоторые указания о том, как эти методы могут применяться в менее элементарной обстановке; подчеркивается, что при этом необходимо сочетать их с методами алгебраической топологии, и до некоторой степени разъясняется, почему необходимо такое сочетание.

При переводе было добавлено несколько литературных ссылок, а во всех случаях, когда та или иная работа имеется на русском языке, ссылка дается на русский перевод или на первоначальную русскую публикацию. Однако там, где авторы, говоря о вещах, входящих в обычные университетские курсы, ссылаются на американские учебники, мне казалось ненужным делать примечание об их русских аналогах. Естественно предполагать, что читатель достаточно хорошо знаком с подобными вещами, а при необходимости освежить свою память сам выберет из многочисленных пособий то, которое ему больше нравится.

Указания о дальнейшем изучении предмета, имеющиеся в конце обеих книг, при переводе были сведены в один (заключительный раздел с рекомендуемой литературой); естественно, что при этом слиянии их пришлось отредактировать и они были расширены.

Ссылки на книги, составляющие настоящее издание, делаются так: см. Милнор, стр. ... . Ссылки на другую литературу указываются номерами, заключенными в квадратные скобки. Номера относятся к общему списку, приведенному в конце.

Большим достоинством обеих книг является наличие в них упражнений. Я позволил себе добавить еще несколько упражнений к книге Милнора; как и добавленные литературные ссылки, они отмечены звездочкой.

Д. В. Аносов