ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Список литературы к этой книге имеет смешанный характер; он содержит как оригинальные работы (и недавние, и такие, результаты которых давно стали классическими, а изложение сильно устарело), так и рекомендуемые учебники. Для ориентации читателя, который пожелает глубже ознакомиться с предметом, здесь собрано несколько замечаний о достижениях дифференциальной топологии и о литературе.

Прежде всего об основах предмета. Было бы весьма стеснительно ограничиваться тем минимумом, которого хватало в пределах этой книги [1]). «Ничьей земле» (выражение Ленга, уже использованное в предисловии редактора перевода) посвящены [17] и первые три главы из [38], тогда как [18] относится специально к основаниям дифференциальной топологии (аппроксимация и триангулируемость; в упражнениях затронуты и другие вопросы).

Теперь о некоторых результатах дифференциальной топологии. Основное понятие этого предмета — понятие гладкой структуры на многообразии. В случае такого пространства, как n-мерная сфера, мы

---

[1]) Так, касательные пространства и касательные расслоения здесь были определены лишь для подмногообразий евклидова пространства (касательные расслоения — только в задачах), а между тем для «абстрактных» многообразий (топологических пространств, снабженных гладкой структурой) также имеются соответствующие понятия. Преимущество абстрактной трактовки — в ее гибкости: многообразие часто строится именно как «абстрактное» многообразие (пример — действительное и комплексное проективные пространства, упражнения 2.7 и 2.9 из Уоллеса) и многие вопросы, где касательные пространства несомненно должны играть существенную роль, тоже никак не связаны с вложением в евклидово пространство. Касательное расслоение — частный случай более общего понятия векторного расслоения, важного не только для топологии, но и для дифференциальной геометрии и теории дифференциальных уравнений.

имеем, так сказать, в готовом виде локальные системы координат, согласованные друг с другом так, что переход от одной такой системы к другой происходит при помощи гладких функций. Но можно ли ввести системы координат на сфере другим способом, так, чтобы полученное многообразие было бы не диффеоморфно исходному? И может ли быть так, что пространство является топологическим многообразием (т. е. покрывается окрестностями, каждая из которых есть клетка), но не может быть превращено в гладкое многообразие? Недавно было доказано, что ответ на оба этих вопроса положительный. Собственно, выделение дифференциальной топологии в самостоятельную область математики естественно как раз и датировать открытием Милнором [20] существования различных гладких структур на семимерной сфере. Обзор Милнора [23] в основном посвящен популярному изложению вопроса о гладких структурах на сферах. Для его понимания, так же как и для чтения других топологических работ, цитируемых далее в основном тексте данного раздела, требуется знакомство с основными понятиями алгебраической топологии.

Мы познакомились с классификацией одномерных гладких многообразий (приложение к Милнору) и двумерных компактных гладких многообразий без края (§ 7 Уоллеса) [1]. Изучение трехмерных многообразий в значительной степени представляет собой предмет современных научных исследований (см. обзор Папакирьякопулоса [26], [27*]). Для компактных многообразий размерности $\geqslant 4$ проблема классификации в действительности неразрешима (см. Марков [19], а также Бун, Хакен и Поенару [9]). Однако достигнут большой прогресс для *односвязных* многообразий большой размерности.

[1]) В связи с двумерными многообразиями Милнор ссылается на старую книгу Керекьярто [15], специально им посвященную. Вообще же классическая трактовка этого вопроса, упоминаемая Уоллесом в начале § 7, содержится в многих учебниках топологии (особенно старых — в новых не хватает места), а также в книгах по римановым поверхностям (где, правда, обычно ограничиваются ориентируемым случаем).

Важным результатом в этом направлении было доказательство *обобщенной гипотезы Пуанкаре* для размерностей $n \geqslant 5$: если компактное гладкое n-мерное многообразие M^n таково, что при всех $k < n$ любое отображение k-мерной сферы $S^k \to M^n$ гомотопно отображению в точку, то M^n гомеоморфно n-мерной сфере. Эта теорема была сперва доказана Смейлом [33], Столлингсом и Уоллесом [47] для $n \geqslant 7$, а затем Смейлом [34], Столлингсом и Зиманом — для $n \geqslant 5$. Подробное изложение этого результата и его обобщения — теоремы Смейла об h-бордизме — имеется у Милнора [24*], сводка результатов и первые применения — в обзоре Смейла [35]. Доказательства основаны на исследовании критических точек и сферических перестроек (важную роль играет описанное у Уоллеса в разделе 8.2 сокращение перестроек).

В формулировке обобщенной гипотезы Пуанкаре налагаются определенные условия на гомотопические свойства многообразия M^n и делается заключение, что классификация таких многообразий с точностью до гомеоморфизма тривиальна. (Теперь можно сказать, что теория Милнора гладких структур на сферах — это классификация таких многообразий с точностью до диффеоморфизма, т. е. до более тонкого отношения эквивалентности.) Сразу же стали предприниматься попытки более или менее непосредственного применения тех же методов для классификации многообразий с другими гомотопическими свойствами и кое-что удалось сделать [42], однако следующее существенное продвижение было достигнуто при комбинации этих методов с методом Понтрягина — Тома. Этот шаг (сопровождавшийся резким усложнением используемого аппарата алгебраической топологии) сделали Новиков и Браудер, которым удалось почти полностью осуществить редукцию классификации односвязных многообразий к задачам алгебраической топологии [1]). См. об этом в обзоре Уолла [43*].

[1]) Уоллес дает ссылку на изложение Уолла [44], содержащее некоторые усовершенствования. Теперь естественно сослаться на вышедшую недавно книгу Уолла [45*].

Неразрешимость проблемы классификации в общем неодносвязном случае еще не исключает возможности ее решения для многообразий с достаточно простой фундаментальной группой — например, циклической; и действительно, за последние годы в этом направлении достигнуто значительное продвижение[1]).

Одна из задач дифференциальной топологии относится к вложениям многообразий в евклидово пространство. Мы знаем, что n-мерное многообразие можно вложить в $(2n+1)$-мерное евклидово пространство (задача 22*); нельзя ли вложить его в евклидово пространство меньшей размерности? Такой же вопрос можно ставить и для *погружений*, или *иммерсий*; так называются гладкие отображения ранга n (Уоллес, определение 2.11). См. об этом в обзоре Смейла [35].

В целом обзоры [23], [35], [43*] (последний охватывает более широкий круг вопросов, но написан более сжато), не требуя значительных предварительных сведений, дают хорошее представление о состоянии дифференциальной топологии к моменту их написания. С тех пор в ней были достигнуты весьма значительные дальнейшие успехи, но, насколько известно, им пока не посвящено обзоров такого же характера.

В заключение упомянем литературу по смежным областям математики.

Учебники по алгебраической топологии: [36*], [49*], [50], [56]. К сожалению, в учебниках еще не нашли отражения новые направления в алгебраической топологии (обобщенные теории гомологий), в известной мере потеснившие прежние, особенно в приложениях к дифференцальной топологии.

Эпизодические упоминания о расслоениях в этой книге не дают представления об их значении для топологии. По-видимому, лучшим введением в теорию расслоенных пространств остается первая половина книги Стинрода [39] (расслоения в ней называются «косыми произведениями»), хотя кое-что теперь стоило бы изложить иначе. (Вторая половина, начи-

[1]) См. [45*].

ная с § 20, теперь безнадежно устарела.) Представление об использовании расслоений и дифференциальных форм в геометрии дает [38]. Теория дифференциальных форм находится на грани между топологией, геометрией и анализом и по-разному используется в каждой из этих дисциплин. Элементарное введение — [37]. Изложение, ориентированное в сторону топологии — [30].

Понятие критической точки имеет важные приложения в дифференциальной геометрии [22], [14], [3*]. Полученные таким образом геометрические результаты в свою очередь полезны для топологии [22].