§ 1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1. Окрестности

Общую, или теоретико-множественную топологию, можно охарактеризовать как абстрактное изучение понятий близости и непрерывности. Для этого надо прежде всего отыскать в элементарной геометрии те свойства близости, которые представляются основными, и принять их за аксиомы. Пусть E есть n-мерное евклидово пространство, и пусть p — его точка. Окрестность точки p по идее должна была бы состоять из точек, близких к p, и целиком окружать p.

Уточняя это рассуждение, определим окрестность точки p как произвольное множество U, содержащее открытый шар [1]) с центром в точке p. Согласно этому определению, множество U на рис. 1.1 является окрестностью точки p на плоскости, поскольку оно содержит открытый круг с центром в этой точке. Но для множеств U, изображенных на рис. 1.2 и 1.3, любой круг с центром в точке p будет содержать точки, лежащие вне U, так что в этих случаях U не является окрестностью точки p. Определение окрестности формулируется так, чтобы по возможности освободиться от понятий размера и формы, не играющих никакой роли в топологии.

Используя данное определение окрестности точки в евклидовом пространстве, легко проверить следующие свойства:

---

[1]) Обратите внимание на различие между *шаром* и *сферой*: замкнутый (соответственно открытый) шар радиуса r состоит из тех точек, расстояние которых до центра не превосходит r (соответственно строго меньше r), а сфера — из точек, отстоящих от центра ровно на r. В некоторых разделах математики часто «шар» называют «сферой», но лучше этого избегать, особенно в геометрии, где нужны и шары, и сферы. Забегая вперед, замечу, что позднее под «сферой» часто будет пониматься любое многообразие, диффеоморфное сфере (смысл этого выяснится в § 2).— *Прим. ред.*

1) точка p принадлежит любой своей окрестности.

2) если U — окрестность точки p, а $V \supset U$, то V — тоже окрестность точки p;

3) если U и V — окрестности точки p, то их пересечение $U \cap V$ — тоже окрестность точки p;

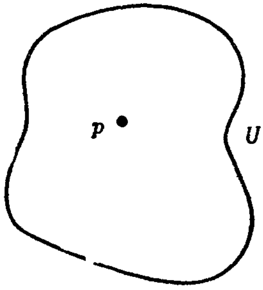

Рис. 1.1.

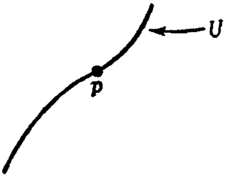

Рис. 1.2.

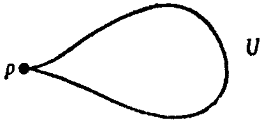

Рис. 1.3.

4) если U — окрестность точки p, то можно найти такую окрестность V точки p, что $V \subset U$ и V является окрестностью каждой из своих точек.

Упражнение 1.1. Докажите свойства 1—4.

Детальный разбор тех свойств окрестностей и непрерывности, которые встречаются, например, в курсе математического анализа, показывает, что все эти свойства можно вывести из четырех выписанных выше. Поэтому при абстрактном подходе разумно принять свойства 1—4 за аксиомы. Это приводит к следующему определению.

Определение 1.1. *Топологическое пространство* — это множество E, каждая точка p которого снабжена набором подмножеств E, называемых *окрестностями точки* p и удовлетворяющих четырем приведенным выше условиям.

Примеры. 1.1. Евклидово пространство с окрестностями, определенными выше, является топологическим пространством.

1.2. Пусть S — сфера (скажем, единичная сфера в трехмерном пространстве с центром в начале координат). Назовем множество U окрестностью точки p в S, если для некоторого ε оно содержит все точки S, удаленные от p на расстояние, меньшее ε. Следует проверить, что все аксиомы для окрестностей выполняются. Таким образом, S является топологическим пространством.

1.3. Случай других поверхностей разбирается так же, как случай сферы. Например, можно превратить в топологическое пространство тор — поверхность, заметаемую окружностью радиуса 1 с центром в точке $(2, 0, 0)$ при вращении плоскости (x, y) вокруг оси y. Кроме того, сферы больших размерностей превращаются в топологические пространства тем же способом, что и двумерная сфера в примере 1.2.

Заметим, что в примерах 1.2 и 1.3 объемлющее евклидово пространство играет лишь вспомогательную роль. В обоих случаях рассматриваемое топологическое пространство является подмножеством, и для определения топологии существенны лишь точки этого подмножества. Любое подмножество евклидова пространства тем же способом можно превратить в топологическое пространство. На самом деле то же самое можно сделать с подмножеством любого топологического пространства. Точнее, пусть E — топологическое пространство, а F — его подмножество. Пусть p — точка множества F. Назовем подмножество U множества F *окрестностью точки p в F*, если $U = F \cap V$, где V — окрестность точки p в E. Проверьте в качестве упражнения, что определенные так окрестности в F удовлетворяют аксиомам окрестностей.

Определение 1.2. Множество F, превращенное в топологическое пространство таким способом, называется *подпространством* пространства E.

Пример 1.4. В примерах 1.2 и 1.3 сфера и тор являются подпространствами трехмерного евклидова пространства.

Заметим, что во всех построенных выше примерах топологические пространства появлялись как подпространства евклидова пространства. Тем не менее отнюдь не все топологические пространства обладают этим свойством. Например, пусть E — множество всех ограниченных функций, заданных на единичном интервале I и принимающих действительные значения. Объявим множество U окрестностью функции p в E, если оно содержит все функции q в E, для которых $\sup\limits_{x \in I} |p(x) - q(x)|$ меньше, чем некоторое ε. Легко видеть, что аксиомы окрестностей выполняются. Можно показать (но это не так уж просто), что E не может быть подпространством никакого евклидова пространства. Впрочем, после того как это замечание сделано, о нем можно забыть на время чтения данной книги, поскольку все пространства, с которыми нам придется иметь дело, будут подпространствами евклидовых пространств.

Заметим еще, что под *окрестностью подмножества* A в E понимают любое множество, являющееся окрестностью каждой точки из A.

1.2. Открытые и замкнутые множества

Два вида подмножеств в топологическом пространстве оказываются особенно важными.

Определение 1.3. Пусть E — топологическое пространство, а U — его подмножество. Множество U называется *открытым в* E (или просто *открытым*, когда нет опасности путаницы), если U является окрестностью для любой точки $p \in U$.

Определение 1.4. Пусть E — топологическое пространство, а F — его подмножество. Множество F

называется *замкнутым в* E (или просто *замкнутым*), если множество $E \setminus F$ открыто.

Примеры. 1.5. Пусть E — плоскость, а U — открытый круг в E. Тогда U — открытое множество. Докажите это в качестве упражнения.

1.6. Пусть E — плоскость, а F — замкнутый круг. Тогда F — замкнутое множество.

1.7. Аналогично в евклидовом пространстве любой размерности открытый шар той же размерности является открытым множеством, а замкнутый — замкнутым.

1.8. Множество точек $(x_1, \ldots, x_n)$ в n-мерном евклидовом пространстве, координаты которых при фиксированных a_i и b_i удовлетворяют неравенствам $a_i < x_i < b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, открыто. Множество точек, для которых $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, замкнуто.

Очень существенным является описываемое следующей теоремой поведение открытых и замкнутых множеств относительно операций объединения и пересечения:

Теорема 1.1.

1) *Объединение любой совокупности открытых множеств открыто.*

2) *Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

3) *Пересечение любой совокупности замкнутых множеств замкнуто.*

4) *Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. 1) Пусть дана совокупность открытых множеств пространства E, члены которой мы обозначим через U_i (i пробегает какое-то множество индексов). Положим $U = \bigcup U_i$ и возьмем точку p в U. Тогда для некоторого i точка p лежит в U_i, так что U_i есть окрестность точки p. Но $U \supset U_i$, откуда U — окрестность точки p (аксиома 2). Поэтому U является окрестностью каждой своей точки и, следовательно, открытым множеством (определение 1.3).

2) Пусть U_1 и U_2 — открытые множества, и пусть $p \in U_1 \cap U_2$. Так как U_1 и U_2 оба открыты и содержат точку p, они являются окрестностями точки p (определение 1.3). Следовательно, $U_1 \cap U_2$ есть окрестность точки p. Таким образом, множество $U_1 \cap U_2$ является окрестностью каждой своей точки и потому открыто (определение 1.3).

Утверждение пунктов 3) и 4) получается из утверждений 1) и 2) взятием дополнений.

Заметим, что доказательство пункта 2) не проходит для пересечения бесконечного числа открытых множеств. Например, если E — действительная прямая, а U_n — интервал $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, то каждое множество U_n открыто, но пересечение всех U_n состоит из одной точки 0 и не является открытым множеством.

Пусть теперь A — любое множество в топологическом пространстве E. По теореме 1 объединение $\operatorname{Int} A$ всех открытых множеств, содержащихся в A, открыто. Ясно, что это «наибольшее» открытое множество, содержащееся в A.

Определение 1.5. $\operatorname{Int} A$ называется *внутренностью множества* A (Int — сокращенное «interior»).

Двойственным образом пересечение $\bar{A}$ всех замкнутых подмножеств, содержащих A, замкнуто и является «наименьшим» замкнутым множеством, содержащим A.

Определение 1.6. $\bar{A}$ называется *замыканием множества* A.

Определение 1.7. $\operatorname{Fr} A = \bar{A} \cap \overline{CA}$ называется *границей множества* A (Fr — сокращенное «frontier»).

Пример 1.9. Пусть E — плоскость, а A — открытый круг, к которому добавлены точки верхней полуокружности. Тогда $\operatorname{Int} A$ есть открытый круг, $\bar{A}$ — замкнутый круг, а $\operatorname{Fr} A$ — окружность.

Упражнения. 1.2. Пусть A — множество в топологическом пространстве. Докажите, что точка p лежит в $\operatorname{Int} A$ тогда и только тогда, когда она имеет окрестность, целиком содержащуюся в A. Докажите также, что p лежит в $\bar{A}$ тогда и только тогда, когда каждая окрестность точки p пересекает A.

1.3. Покажите, что для любых двух множеств A и B в топологическом пространстве $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ и $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

1.4. Пусть E — топологическое пространство, а F — подпространство. Покажите, что множество U, лежащее в F, открыто в F тогда и только тогда, когда $U = V \cap F$, где V — открытое множество в E.

1.3. Непрерывные отображения

Пусть E и F — топологические пространства, и пусть f — отображение пространства E в F. Последнее обозначают так:

$$f: E \to F.$$

Идея непрерывности состоит просто в том, что точки, близкие друг к другу в E, отображаются в точки, близкие друг к другу в F. Это уточняется следующим образом:

Определение 1.8. Отображение f: $E \to F$ *непрерывно в точке* p, если для любой окрестности V точки $f(p)$ в F существует такая окрестность U точки p в E, что $f(U) \subset V$. Отображение f *непрерывно*, если оно непрерывно в каждой точке пространства E.

Упражнения. 1.5. Пусть в определении 1.8 как E, так и F является действительной прямой. В этом случае обычное определение непрерывности функции f в точке x состоит в следующем: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $|x' - x| < \delta$, то $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Докажите, что это эквивалентно определению 1.8.

1.6. Пусть дано отображение $f: E \to F$. Докажите, что f непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого в F множества открыт в E. Используйте это для доказательства того, что композиция непрерывных отображений непрерывна.

1.7. Пусть E является объединением двух замкнутых множеств A и B, и пусть дано отображение $f: E \to F$. Предположим, что ограничения отображения f на множества A и B являются непрерывными отображениями этих множеств в F. Покажите, что f также непрерывно. Постройте пример, показывающий, что если множества A и B не замкнуты, то отображение f не обязано быть непрерывным.

Особое значение имеют те непрерывные отображения, у которых существуют непрерывные обратные отображения.

Определение 1.9. Пусть f — взаимно однозначное отображение пространства E в F. Таким образом, существует обратное отображение g пространства F в E. Если и f, и обратное к нему отображение непрерывны, то f называется *гомеоморфизмом*, и тогда говорят, что пространства E и F *гомеоморфны*.

С точки зрения общей топологии гомеоморфные пространства не отличаются друг от друга. Таким образом, можно сказать, что нас интересуют те свойства, которые, будучи верными для одного пространства, верны и для всех гомеоморфных ему пространств. Сформулируем это иначе. Заметим, что гомеоморфизм между E и F устанавливает взаимно однозначное соответствие между окрестностями в E и окрестностями в F, а также между открытыми множествами в E и открытыми множествами в F. Следовательно, любое свойство, формулируемое только с помощью окрестностей и открытых множеств, является топологическим свойством. Вскоре у нас появятся примеры таких свойств.

1.4. Топологические произведения

В этом разделе описывается метод, который часто используется для получения новых пространств из уже имеющихся.

Пусть E и F — топологические пространства. Множество $E \times F$ определяется как множество пар (p, q), где $p \in E$, а $q \in F$. Оно превращается в топологическое пространство следующим образом: если $(p, q) \in E \times F$, то окрестность точки (p, q) — это любое множество, содержащее множество вида $U \times V$, где U — окрестность точки p в E, а V — окрестность q в F. Нетрудно видеть, что аксиомы 1—4 для таких окрестностей выполняются.

Определение 1.10. Множество $E \times F$, превращенное в топологическое пространство только что описанным способом, называется *топологическим произведением пространств E и F*.

Примеры. 1.10. Если $E = F =$ действительная прямая, то $E \times F$ — плоскость с обычной топологией двумерного евклидова пространства.

1.11. Если E — двумерное евклидово пространство, а F — действительная прямая, то $E \times F$ — трехмерное евклидово пространство. Этот факт обобщается очевидным образом: топологическое произведение евклидовых пространств размерностей m и n есть евклидово пространство размерности $m + n$.

1.12. Если E — интервал на действительной прямой, а F — окружность, то $E \times F$ — цилиндр.

1.13. Позже мы увидим со всеми подробностями, что тор является топологическим произведением окружности на себя.

1.5. Связность

В этом и следующем разделе мы опишем два важных топологических свойства. Первое из них, связность, есть, так сказать, свойство состоять из одного куска.

Определение 1.11. Пространство E *связно*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся множеств, открытых в E. Множество в топологическом пространстве *связно*, если оно связно как подпространство.

Примеры. 1.14. Пусть E — пространство, которое состоит из двух точек — a и b и в котором окрестностями точки a являются множества $\{a\}$ и $\{a, b\}$, а окрестности точки b — это $\{b\}$ и $\{a, b\}$. Легко видеть, что аксиомы окрестностей выполняются. Кроме того, множества $\{a\}$ и $\{b\}$ открыты; таким образом, E является объединением двух открытых непересекающихся множеств. Следовательно, пространство E не связно.

1.15. Пусть A — объединение двух открытых непересекающихся кругов на плоскости. Тогда A не связно.

Намного труднее дать пример связного пространства [1]) (за исключением некоторых тривиальных случаев, вроде пространства, состоящего из одной точки). Один из наиболее важных примеров — это интервал на прямой. Интуитивно совершенно ясно, что он состоит из одного куска и должен быть связным, но это, конечно, нужно доказать.

Теорема 1.2. *Пусть A — открытый интервал на прямой, скажем, множество таких действительных чисел x, что $0 < x < 1$. Тогда A связно.*

Доказательство. Предположим, что A не связно. Тогда по определению $A = B \cup C$, где B и C — некоторые непустые непересекающиеся множества, открытые в A и, следовательно, на прямой. Поскольку B и C непусты, найдется точка $b \in B$ и точка $c \in C$. Предположим для определенности, что $b < c$. Теперь определим D как множество тех точек x в B, для которых $x < c$. Множество D непусто, поскольку оно содержит точку b. Пусть d — наименьшая верхняя грань чисел из D. Покажем, что d не может лежать ни в B, ни в C. Поскольку тем не менее d заключено между b и c, оно заведомо лежит в A, а значит, либо в B, либо в C. Это противоречие покажет, что A на самом деле связно.

Итак, предположим, что $d \in B$. Так как все x из D удовлетворяют неравенству $x < c$, то $d \leqslant c$, а раз d лежит в B, то в действительности $d < c$. Множество B открыто, и поэтому существует открытый интервал U, содержащий d и лежащий в B. Если взять длину U меньше, чем $c - d$, то U будет содержаться в D. Но тогда и правый конец U лежал бы в D и был бы больше, чем d, что невозможно, ибо d — верхняя грань чисел из D. Поэтому d не может лежать в B.

[1]) Точнее связность приходится доказывать — нельзя же перебрать в уме одно за другим все возможные представления E в виде объединения двух открытых подмножеств и убедиться, что эти два подмножества всегда пересекаются. — *Прим. ред.*

Предположим теперь, что $d \in C$. Тогда, поскольку C открыто, найдется интервал U, содержащий точку d и лежащий в C. Но это означает, что для некоторого $\varepsilon < 0$ не существует точек множества B (а стало быть, и D), заключенных между $d - \varepsilon$ и d. Это противоречит тому факту, что d есть точная верхняя грань чисел из D. Следовательно, $d \notin C$.

Таким образом, d не лежит ни в B, ни в C, что и приводит к требуемому противоречию, как это уже объяснялось выше. Доказательство окончено.

Ясно, что тем же способом с небольшими изменениями можно доказать связность интервалов, содержащих один или оба конца, а также интервалов, бесконечных в одном или обоих направлениях.

Теорема 1.2 допускает обращение, которое довольно тривиально.

Теорема 1.3. *Если множество действительных чисел A связно, то A есть интервал (конечный или бесконечный, с включенными или не включенными концами).*

Доказательство. Пусть a и b — две точки из A, причем $a < b$. Надо показать, что A содержит все числа c, лежащие между a и b. Предположим, что существует число c, заключенное между a и b, но не принадлежащее A. Пусть B — множество всех чисел из A, меньших c, а C — множество всех чисел из A, больших c. Тогда $A = B \cup C$, причем B и C оба открыты в A, не пересекаются и непусты. Это противоречит предположению о связности A, и поэтому такого числа c не существует. Следовательно, A — интервал.

Теперь уже довольно легко строить другие примеры связных пространств. Следующая теорема дает общий метод получения новых связных пространств из уже имеющихся.

Теорема 1.4. *Пусть f: $E \to F$ — непрерывное отображение связного пространства E на пространство F. Тогда F связно.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна. Тогда $F = A \cup B$, где A и B непусты, не пересекаются и открыты. Но при этом $E = f^{-1}(A) \cup \cup f^{-1}(B)$, причем $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$ непусты, не пересекаются и, согласно упражнению 1.6, открыты. Это противоречит связности E, так что F обязано быть связным.

Из этой теоремы, в частности, следует, что если пространство E связно, а F гомеоморфно E, то F связно, так что связность является топологическим свойством. Вот другой пример использования теоремы 1.4. Существует непрерывное отображение единичного отрезка действительных чисел $0 \leqslant x \leqslant 1$ на окружность, а именно отображение, переводящее точку x в точку $(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ на плоскости. Поэтому окружность связна.

Теорема 1.5. *Если E и F — связные пространства, то произведение $E \times F$ также связно.*

Доказательство. Как обычно, проводим доказательство от противного. Предположим, что $E \times F$ не связно. Тогда $E \times F = A \cup B$, где множества A и B открыты, не пересекаются и непусты. Возьмем точку (x, y) в A. Множество $E \times \{y\}$ гомеоморфно пространству E и потому связно. Отсюда следует, что $E \times \{y\}$ содержится в A. В противном случае его пересечения с A и B давали бы разложение на открытые и не пересекающиеся непустые множества. Но теперь аналогичное рассуждение показывает, что для любого x' из E слой $\{x'\} \times F$ должен содержаться в A. Выходит, что всё $E \times F$ содержится в A, значит, B должно быть пусто. Это и дает требуемое противоречие, поскольку B предполагалось непустым. Поэтому $E \times F$ связно.

Пример 1.16. Мы уже видели, что открытый интервал I на прямой связен. Отсюда следует, что квадрат $I^2 = I \times I$ связен. По индукции заключаем, что n-мерный куб I^n связен. Аналогично, поскольку действительная прямая связна, n-мерное евклидово пространство также связно.

Упражнения. 1.8. Пусть A — связное множество в топологическом пространстве E. Пусть множество B таково, что $A \subset B \subset \bar{A}$. Докажите, что тогда B связно.

1.9. Пусть A и B — связные множества в пространстве E, и пусть $A \cap \bar{B}$ непусто. Докажите, что $A \cup B$ связно.

Примеры. 1.17. Пример 1.16 показывает, что открытый круг (гомеоморфный квадрату I^2) связен. Теперь из упражнения 1.8 следует, что связным будет и множество, полученное добавлением к кругу всех или только некоторых точек на окружности. Аналогичный пример можно построить для бо́льших размерностей.

1.18. Обыкновенную сферу можно представить в виде объединения двух замкнутых кругов с непустым пересечением. Поэтому, согласно упражнению 1.9, эта поверхность связна. Аналогично n-мерная сфера будет связной при любом $n \geqslant 1$.

1.6. Компактность

Понятие компактности обобщает свойство быть замкнутым и ограниченным множеством в евклидовом пространстве. Сначала мы наложим на рассматриваемые пространства аксиому отделимости Хаусдорфа. В общей топологии ее выполнение предполагается не всегда, однако нас эта аксиома устраивает, поскольку для всех пространств, которыми мы интересуемся, она так или иначе выполняется.

Определение 1.12. Будем называть топологическое пространство *хаусдорфовым*, если оно обладает следующим свойством: каковы бы ни были две различные точки p и q, существует такая окрестность U точки p и такая окрестность V точки q, что $U \cap V = \varnothing$.

Примеры. 1.19. Любое евклидово пространство является хаусдорфовым.

1.20. Любое подпространство евклидова пространства хаусдорфово. На самом деле любое подпространство любого хаусдорфова пространства хаусдорфово.

Прежде чем определять компактность, нужно дать несколько предварительных определений.

Определение 1.13. *Покрытие* топологического пространства E — это набор множеств из E, объединение которых дает все пространство E. Оно называется *открытым покрытием*, если каждое множество в наборе открыто.

Определение 1.14. Пусть дано покрытие топологического пространства. *Подпокрытие* — это покрытие, все множества которого принадлежат данному покрытию.

Определение 1.15. *Компактное пространство* (или *компакт*) — это хаусдорфово пространство, обладающее тем свойством, что каждое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие, т. е. подпокрытие, состоящее из конечного числа множеств. Множество в топологическом пространстве называется *компактным*, если оно является компактным подпространством.

Примеры. 1.21. Теорема Бореля — Лебега из анализа показывает, что замкнутое ограниченное множество в евклидовом пространстве является компактным (см. [16]).

1.22. Действительная прямая не компактна. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим набор открытых интервалов вида $(n-1, n+1)$ с целыми n. Это открытое покрытие действительной прямой, однако никакой конечный набор этих интервалов, очевидно, не может покрыть всей прямой. Аналогичное рассуждение показывает, что n-мерное евклидово пространство не компактно и что на самом деле не компактно любое неограниченное подмножество евклидова пространства.

Упражнения. 1.10. Покажите, что n-мерная сфера компактна при любом n.

1.11. Докажите, что замкнутое подмножество компакта компактно и что компактное множество в любом хаусдорфовом пространстве замкнуто.

Заметим теперь, что компактное подмножество евклидова пространства должно быть замкнутым (упр. 1.11) и ограниченным (пример 1.22). Мы получаем теорему, обратную к теореме Бореля — Лебега. Существует общая теорема, утверждающая, что топологическое произведение компактных пространств компактно (см. [10]). Здесь мы не будем доказывать ее. Однако нам понадобится один ее частный случай, а именно когда перемножаемые компактные пространства A и B лежат в евклидовых пространствах размерностей m и n. Тогда их произведение есть подпространство в $(n+m)$-мерном пространстве. Так как пространства A и B компактны, они замкнуты и ограничены, согласно только что сделанному замечанию. Поэтому их произведение является замкнутым и ограниченным подмножеством евклидова пространства (проверьте это!). Следовательно, $A \times B$ компактно по теореме Бореля — Лебега.

Компактность является топологическим свойством, поскольку она определяется в терминах открытых множеств. В действительности она сохраняется при любом непрерывном отображении.

Теорема 1.6. *Пусть f: $E \to F$ — непрерывное отображение компактного пространства E на хаусдорфово пространство F. Тогда пространство F является компактным.*

Доказательство. Пусть дано открытое покрытие пространства F, открытые множества которого обозначены через U_i, где i пробегает некоторое множество индексов. Тогда множества $f^{-1}(U_i)$ образуют покрытие пространства E, причем, согласно упражнению 1.6, это открытое покрытие. Так как E компактно, найдется конечный набор, скажем $f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_n)$, его покрывающий. Но в таком случае множества $U_1, \ldots, U_n$ образуют конечное подпокрытие данного покрытия пространства F. Поскольку F, кроме того, предполагается хаусдорфовым, то F является компактным.

1.7. Пространства со счетной базой[1]

(При первом чтении этот раздел можно опустить.) Пусть E — топологическое пространство и $\{U_\alpha\}$ — совокупность некоторых его открытых подмножеств. Она называется *базой* пространства E, если любое открытое подмножество пространства E можно представить как объединение некоторых U_α. В дальнейшем встречаются исключительно топологические пространства *со счетной базой.*

Примеры. 1.23. n-мерное евклидово пространство имеет счетную базу, состоящую из шаров, у которых центры находятся в точках $(x_1, \ldots, x_n)$ с рациональными координатами и радиусы рациональны (докажите, что это база!).

1.24. Если E — топологическое пространство со счетной базой $\{U_n\}$ и F — его подпространство, то F тоже имеет счетную базу, а именно в качестве таковой годится $\{U_n \cap F\}$ (проверьте!).

Упражнение 1.12. В топологическом пространстве со счетной базой из всякого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие. (*Схема доказательства.* Пусть $\{U_n\}$ — счетная база, а $\{V_\alpha\}$ — открытое покрытие. Представив каждое V_α как объединение некоторых U_n, возьмем все U_n, которые при этом встретятся (при всевозможных α); пусть это будут U_{n_1}, $U_{n_2}, \ldots$. Докажите, что $\{U_{n_i}\}$ — счетное покрытие E, и вспомните, что каждое U_{n_i} содержится в некотором V_α.)

§ 2. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

2.1. Введение

Во многих из приведенных выше примеров топологические пространства обладают тем свойством, что на них можно ввести координаты, по крайней мере локально, в окрестности каждой точки. Для евклидова пространства это совершенно очевидно и вытекает прямо из определения. Действительно, каждая точка на самом деле является набором из n действи-

[1] Добавлено редактором перевода. — *Прим. ред.*