1.7. Пространства со счетной базой[1]

(При первом чтении этот раздел можно опустить.) Пусть E — топологическое пространство и $\{U_\alpha\}$ — совокупность некоторых его открытых подмножеств. Она называется *базой* пространства E, если любое открытое подмножество пространства E можно представить как объединение некоторых U_α. В дальнейшем встречаются исключительно топологические пространства *со счетной базой.*

Примеры. 1.23. n-мерное евклидово пространство имеет счетную базу, состоящую из шаров, у которых центры находятся в точках $(x_1, \ldots, x_n)$ с рациональными координатами и радиусы рациональны (докажите, что это база!).

1.24. Если E — топологическое пространство со счетной базой $\{U_n\}$ и F — его подпространство, то F тоже имеет счетную базу, а именно в качестве таковой годится $\{U_n \cap F\}$ (проверьте!).

Упражнение 1.12. В топологическом пространстве со счетной базой из всякого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие. (*Схема доказательства.* Пусть $\{U_n\}$ — счетная база, а $\{V_\alpha\}$ — открытое покрытие. Представив каждое V_α как объединение некоторых U_n, возьмем все U_n, которые при этом встретятся (при всевозможных α); пусть это будут U_{n_1}, $U_{n_2}, \ldots$. Докажите, что $\{U_{n_i}\}$ — счетное покрытие E, и вспомните, что каждое U_{n_i} содержится в некотором V_α.)

§ 2. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

2.1. Введение

Во многих из приведенных выше примеров топологические пространства обладают тем свойством, что на них можно ввести координаты, по крайней мере локально, в окрестности каждой точки. Для евклидова пространства это совершенно очевидно и вытекает прямо из определения. Действительно, каждая точка на самом деле является набором из n действи-

[1]) Добавлено редактором перевода. — *Прим. ред.*

тельных чисел — это и есть ее координаты. С другой стороны, рассмотрим двумерную сферу, например единичную сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в трехмерном пространстве. Возьмем точку на полусфере $z > 0$. Здесь $z = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$, так что в действительности точка определяется значениями координат x и y. Таким образом, пару (x, y) можно считать координатами точки на сфере. Но они являются лишь локальными координатами в том смысле, что они однозначно определяют точки только в некотором открытом множестве, а именно в полусфере $z > 0$. Заметим, что отображение, переводящее точку (x, y, z) на сфере в точку $(x, y, 0)$ на плоскости, есть гомеоморфизм полусферы $z > 0$ на открытый единичный круг, и в качестве координат мы на самом деле используем координаты образа точки при этом отображении (рис. 2.1).

С нашей точки зрения интересная особенность этого примера состоит в том, что сферу можно покрыть шестью полусферами с аналогичными свойствами, а именно полусферами $z > 0$, $z < 0$, $y > 0$, $y < 0$, $x > 0$, $x < 0$. Каждая из этих полусфер гомеоморфно отображается на открытый круг, и координаты точек на круге можно использовать как координаты точек на соответствующей полусфере. Например, в полусфере $x > 0$ можно взять за координаты (y, z) и т. д. В таком случае говорят, что сфера покрыта шестью координатными окрестностями (окрестностями, в которых можно ввести локальные координаты).

Можно произвести аналогичный разбор для тора (см. рис. 2.2), хотя сделать все это в явном виде уже несколько труднее. Возьмем тор [1]), который получен вращением вокруг оси y окружности $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, лежащей на плоскости (x, y). Тогда, например, в окрестности точки $(0, 0, 3)$ можно взять за локальные координаты (x, y).

Упражнение 2.1. Постройте полную систему координатных окрестностей, покрывающих тор.

---

[1]) Отметим для дальнейшего, что область, заключенную внутри тора, называют сплошным тором. — *Прим. ред.*

Заметим, что предыдущие примеры обладали следующим свойством: если (x_1, x_2) и (y_1, y_2) — локальные координаты точки в двух перекрывающихся ко-

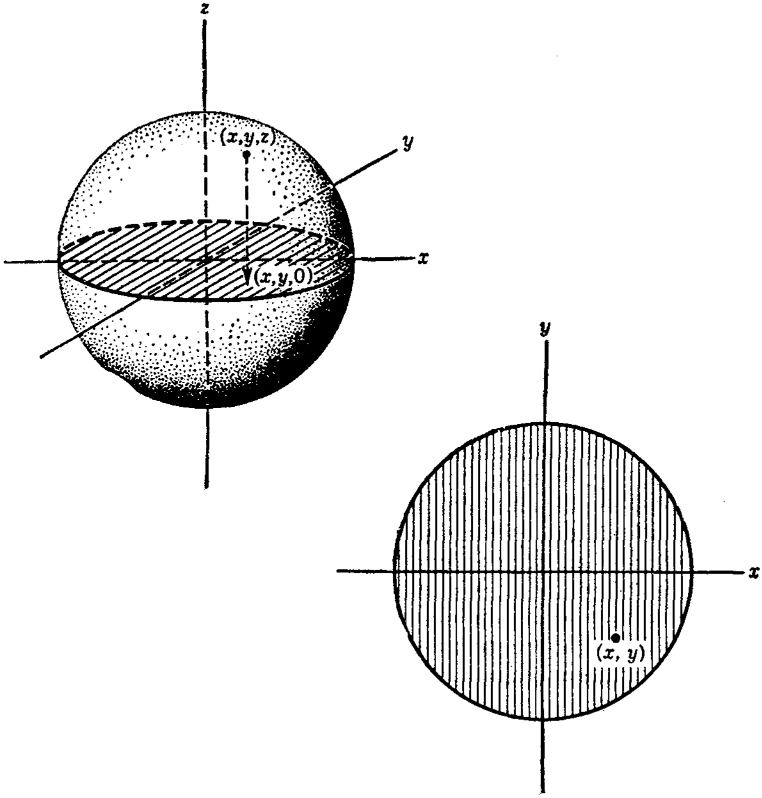

Рис. 2.1. Отождествление верхней полусферы с кругом в плоскости (x, y) посредством проекции.

ординатных окрестностях, то y_1 и y_2 являются дифференцируемыми функциями от x_1, x_2, и наоборот. В случае сферы, например, рассмотрим, как и раньше, системы координат в полусферах $z > 0$ и $x > 0$. Пусть точка имеет в первой из этих окрестностей координаты (x_1, x_2), а во второй (y_1, y_2). Это

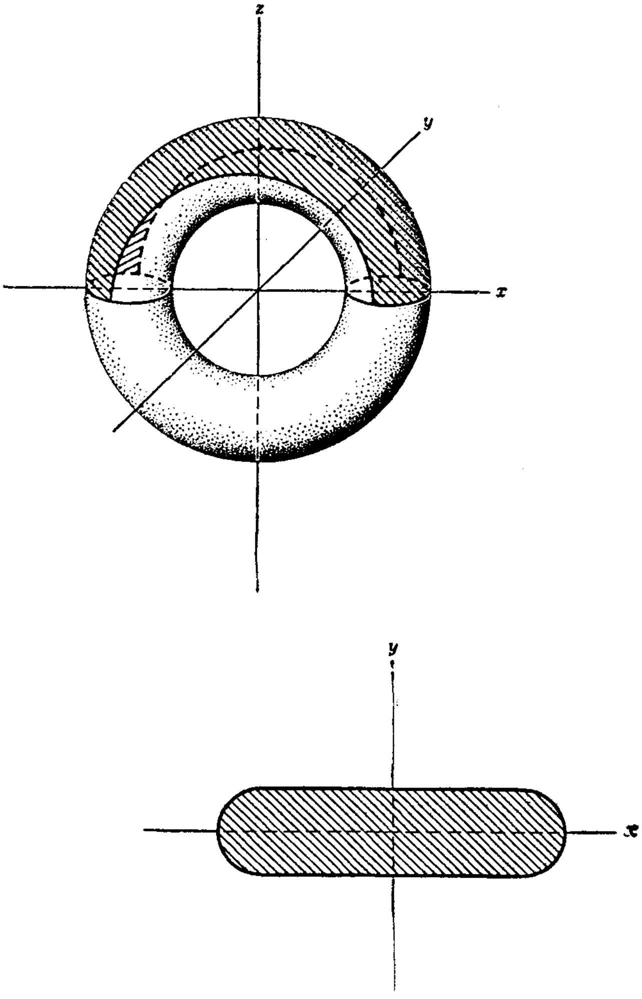

Рис. 2.2. Отождествление «верхней части» тора (заштрихована) с заштрихованной областью в плоскости (x, y).

означает, что если (x, y, z) — ее координаты в объемлющем евклидовом пространстве, то $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = y$, $y_2 = z$. Так как на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то

$$y_1 = x_2,$$
$$y_2 = \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2}.$$

Ясно, что функции, стоящие в правой части этих уравнений, обладают частными производными всюду в общей части обеих полусфер [1]. Аналогично

$$x_1 = \left(1 - y_1^2 - y_2^2\right)^{1/2},$$
$$x_2 = y_1,$$

и снова функции в правой части можно дифференцировать в любой точке множества $z > 0$, $x > 0$. Кроме того, легко проверить, что на этом множестве определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

не равен нулю.

Предыдущие примеры, особенно только что описанные свойства локальных систем координат на сфере, дают обоснование для определения того типа пространств, который нас интересует, — гладких многообразий. Сначала мы приведем несколько предварительных определений.

2.2. Гладкие функции и гладкие отображения

Определение 2.1. Пусть U — открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве E, и пусть f — функция, определенная в U и принимающая действительные значения. Будем называть функцию f *гладкой*, если в каждой точке из U она имеет

[1] Точнее, они имеют частные производные при всех тех (x_1, x_2), которые являются координатами точек из общей части этих полусфер. — *Прим. ред.*

непрерывные частные производные всех порядков, которые берутся по координатам в E[1]).

Примеры. 2.1. Многочлен от координат в E является гладким в любом открытом подмножестве пространства E. В этом случае, конечно, все производные достаточно большого порядка обращаются в нуль.

2.2. Функция $|1-x^2-y^2|^{1/2}$ (символ $|\ |$ обозначает абсолютную величину числа) на двумерном евклидовом пространстве не будет гладкой ни в каком открытом множестве, содержащем хоть одну точку окружности $x^2+y^2=1$, в любом же открытом множестве, не содержащем точек окружности, она будет гладкой.

2.3. Рассмотрим функцию на действительной прямой, определенную следующим образом:

$$f(x)=\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) \quad \text{при} \quad -1<x<1,$$
$$f(x)=0 \qquad\qquad \text{при} \quad 1\leqslant x \ \text{или} \ x\leqslant -1.$$

В качестве упражнения проверить, что эта функция имеет производные всех порядков во всех точках прямой. Таким образом, f — гладкая функция на всей прямой. (Напомним, что $\frac{1}{t^n}e^{-1/t}\to 0$, когда t стремится к 0, пробегая положительные значения.)

2.4. Последний пример можно использовать для построения других примеров в пространствах бóльших размерностей. Пусть $r^2=\sum x_i^2$ есть квадрат расстояния до нуля в евклидовом n-мерном пространстве. Определим тогда функцию f следующим образом:

$$f(p)=\exp\left(\frac{1}{r^2-1}\right) \quad \text{при} \quad r<1,$$
$$f(p)=0 \qquad\qquad \text{при} \quad r\geqslant 1.$$

[1]) Точнее, такие функции называются гладкими функциями *класса гладкости* C^∞. Если у f имеются непрерывные частные производные до порядка n включительно, то f — *класса гладкости* C^n. Функции класса C^0 — это просто непрерывные функции. Поскольку у Уоллеса встречаются только функции класса C^∞, он опускает упоминание о классе гладкости и говорит просто «гладкая функция». — *Прим. ред.*

Снова получается гладкая функция во всем n-мерном пространстве.

Заметим, что только что построенная функция обладает следующими свойствами: она гладкая во всем евклидовом пространстве, равна нулю вне некоторого открытого множества (единичного шара) и не обращается в нуль внутри этого множества. Функции с такими свойствами будут полезны нам в дальнейшем.

Упражнение 2.2. Методом, аналогичным использованному в последнем примере, постройте функцию, гладкую во всем n-мерном пространстве, равную 1 на замкнутом шаре $\sum x_i^2 \leqslant 1$ и нулю вне шара $\sum x_i^2 < 4$.

Иногда встречаются функции, заданные на множествах, которые не являются открытыми, и в таких случаях определение 2.1 необходимо дополнить.

Оределение 2.2. Пусть f — функция, заданная на множестве A в n-мерном евклидовом пространстве и принимающая действительные значения. Будем называть функцию f *гладкой на множестве* A, если ее можно так продолжить на открытое множество U, содержащее A, что она будет гладкой в U.

Вот естественное обобщение понятия гладкости на отображения евклидовых пространств друг в друга.

Определение 2.3. Пусть A — множество в евклидовом m-мерном пространстве, и пусть даны n гладких на A функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Определим отображение f множества A в n-мерное евклидово пространство, беря в качестве образа $f(x)$ точки $x \in A$ точку с координатами $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$. В этом случае f называется *гладким отображением множества A в n-мерное пространство.*

Заметим, что для $n = 1$ гладкое отображение превращается просто в гладкую функцию на A в смысле определения 2.2.

В изучении гладких отображений большую роль играет матрица, составленная из первых частных производных функций f_i (в обозначениях определения 2.3).

Определение 2.4. Матрица, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит $\partial f_i/\partial x_j$, называется *матрицей Якоби* гладкого отображения. Если $n = m$, то ее определитель называется *якобианом* отображения [1]).

Упражнения. 2.3. Пусть f — гладкое отображение открытого множества A, лежащего в m-мерном евклидовом пространстве, в n-мерное пространство, и пусть g — гладкое отображение открытого множества, содержащего $f(A)$, в p-мерное пространство. Докажите, что композиция gf есть гладкое отображение множества A в p-мерное пространство. Докажите также, что если F — значение матрицы Якоби отображения f в точке x, а G — значение матрицы Якоби для g в точке $f(x)$, то значение матрицы Якоби для gf в точке x равно GF.

2.4. Пусть f — гладкое отображение открытого множества U, лежащего в n-мерном евклидовом пространстве, в n-мерное пространство, и пусть f имеет гладкое обратное отображение. Покажите, что якобиан отображения f отличен от нуля во всех точках множества U.

Справедливо утверждение, обратное к результату упражнения 2.4. Оно называется теоремой об обратной функции и формулируется следующим образом:

Теорема 2.1. *Пусть f — гладкое отображение открытого множества U, лежащего в n-мерном пространстве, в n-мерное пространство, и пусть p — точка множества U. Предположим, что якобиан отображения f не равен нулю в точке p. Тогда существует такая окрестность V точки p и такая окрестность W точки $f(p)$, что f гомеоморфно отображает V на W и что обратное к f отображение является гладким отображением окрестности W на V.*

---

[1]) Заметим, что если множество A не является открытым, то матрица Якоби гладкого отображения $f: A \to E$ (E есть n-мерное пространство), вообще говоря, может не определяться однозначно самим отображением f, а зависеть от конкретного выбора продолжений функций f_i на содержащее A открытое множество. — *Прим. ред.*

Доказательство этого результата можно найти в [16] или в [18].

Заметим, что эта теорема дает лишь локальное обращение отображения f. В общем случае больше ничего сказать нельзя. Например, пусть U — плоскость (x, y) с выкинутым началом координат. Используя комплексную переменную $z = x + iy$, определим отображение множества U на себя формулой $f(z) = e^z$. Если записать действительные координаты точки $f(z)$ как (u, v), то отображение f с помощью действительных функций можно выразить формулами:

$$u = e^x \cos y,$$
$$v = e^x \sin y.$$

Легко видеть, что это гладкое отображение множества U на себя и что якобиан не равен нулю ни в одной точке этого множества. Конечно, по теореме 2.1 отображение f можно обратить локально. И в самом деле, обратное отображение задается формулой $z = \log(u + iv)$ в любом множестве, не окружающем целиком начало координат. Но f не будет взаимно однозначным во всем U, ибо, если изменить y, добавив к нему целое кратное 2π, то значение $f(z)$ не изменится.

2.3. Гладкие многообразия

После всех приготовлений, сделанных в предыдущем параграфе, мы теперь в состоянии сформулировать определение того типа пространств, которые нас интересуют, — гладких многообразий.

Определение 2.5. *n-мерное гладкое многообразие M* есть хаусдорфово топологическое пространство, покрытое счетным числом открытых множеств $U_1, U_2, \ldots$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) Для каждого U_i имеется гомеоморфизм φ_i: $U_i \to V_i$, где V_i — открытая клетка[1]) в евклидовом пространстве.

---

[1]) *Замкнутая n-мерная клетка* — это множество W в евклидовом пространстве, гомеоморфное замкнутому шару $D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$, причем гомеоморфизмы

2) Если $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, то гомеоморфизм $\varphi_{ji} = \varphi_j\varphi_i^{-1}$ множества $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ на $\varphi_j(U_i \cap U_j)$, полученный композицией отображений φ_i^{-1} и φ_j, является гладким отображением [1]).

Число n называют *размерностью* многообразия M (обозначение: $\dim M$).

$f: D^n \longrightarrow W$ и $f^{-1}: W \longrightarrow D^n$ являются гладкими отображениями. (Позднее такие гомеоморфизмы получат название диффеоморфизмов. Они будут определены для многообразий, и тогда можно будет говорить о клетках не только в евклидовом пространстве, но и в гладком многообразии.) *Открытая клетка* — это часть некоторой замкнутой клетки, которая при указанном гомеоморфизме соответствует внутренности шара.

Обычно в определении гладкого многообразия требуется лишь, чтобы V_i было открытым множеством в евклидовом пространстве, но не обязательно клеткой. Оба варианта определения в действительности эквивалентны — при необходимости можно добиться, уменьшая U_i и увеличивая их число, чтобы все V_i стали клетками. — *Прим. ред.*

[1]) Говорят также, что покрытие U_i и гомеоморфизмы φ_i задают (определяют, вводят) *гладкость* (или *гладкую структуру*) на исходном топологическом пространстве.

Следует иметь в виду, что гладкое многообразие — это не просто хаусдорфово пространство, допускающее такое покрытие с такими гомеоморфизмами, как в определении 2.5, а хаусдорфово топологическое пространство *вместе* с таким покрытием и такими гомеоморфизмами. Ради краткости покрытие $\{U_i\}$ и набор гомеоморфизмов φ_i (удовлетворяющих приведенным условиям) часто называют *атласом*, а пару (U_i, φ_i) — *картой*.

Возникает вопрос: когда одно и то же хаусдорфово пространство с двумя различными атласами следует считать одним и тем же гладким многообразием (т. е. когда эти атласы определяют одну и ту же гладкую структуру), а когда — нет? (Чуть ниже, в примере 2.6 описан атлас на сфере S^2, состоящий из шести карт (U_i, φ_i). Но можно взять другой атлас, состоящий из двух карт (U_1', φ_1'), (U_2', φ_2'), где U_1' получается из сферы выбрасыванием северного полюса, U_2' — выбрасыванием южного полюса, а φ_i' определяются с помощью стереографической проекции (см. Милнор, рис. 3). Естественно считать, что хотя эти два атласа и разные, гладкое многообразие в данном случае одно и то же.) Следующие соображения подсказывают ответ.

Роль карты (U_i, φ_i) состоит в том, что при помощи гомеоморфизма φ_i вводится некоторая система координат в открытом множестве U_i: если $x \in U_i$, то $\varphi_i(x)$ — это точка евклидова пространства, т. е. набор чисел; их мы и принимаем за координаты точки x. Условие 2) в определении 2.5 означает, что карты одного

Заметим, что отображение φ_{ji} в условии 2) автоматически имеет обратное, а именно φ_{ij}. Поэтому его якобиан будет отличен от нуля во всех точках множества $\varphi_i(U_i \cap U_j)$. Условие счетности, включенное

и того же атласа согласуются друг с другом в том смысле, что координаты точки x в карте φ_j суть гладкие функции координат той же точки в карте φ_i. Но мы можем и для карт двух разных атласов говорить об их согласованности (или несогласованности) в том же самом смысле. Эти соображения мотивируют следующее определение.

Определение 2.5′. Два разных атласа $\{(U_i, \varphi_i)\}$ и $\{(U'_k, \varphi'_k)\}$, заданные на одном и том же топологическом пространстве, называются *согласованными или совместимыми друг с другом* при выполнении такого условия:

если $U_i \cap U'_k \neq \varnothing$, то, во-первых, гомеоморфизм $'\varphi_{ki} = \varphi'_k \varphi_i^{-1}$ множества $\varphi_i(U_i \cap U'_k)$ на $\varphi'_k(U_i \cap U'_k)$, полученный композицией φ_i^{-1} и φ'_k, является гладким отображением; во-вторых, гомеоморфизм $\varphi'_{ik} = \varphi_i (\varphi'_k)^{-1}\colon \varphi'_k(U_i \cap U'_k) \to \varphi_i(U_i \cap U'_k)$ тоже является гладким отображением. (Можно дать более сжатую формулировку: совокупность всех карт обоих атласов снова образует атлас.)

По определению считают, что два атласа тогда и только тогда задают одну и ту же гладкую структуру, когда они совместимы.

(Легко видеть, что в приведенном примере со сферой оба атласа действительно согласованы. А вот пример несовместимых атласов на прямой R. Оба атласа состоят всего из одной карты, так что $U_1 = U'_1 = R$. Гомеоморфизм $\varphi_1\colon R \to R$, как и в примере 2.5, тождественный, а гомеоморфизм $\varphi'_1\colon R \to R$ переводит x в x^3. Отображение φ'_{11} не будет гладким.)

В определении 2.5 от отображений φ_{ji} можно потребовать гладкости класса C^n (см. прим. ред. на стр. 33); тогда получится определение *гладкой структуры* или *гладкого многообразия класса* C^n. (Согласно этой терминологии, «гладкие многообразия» Уоллеса имеют класс C^∞. Многообразия класса C^0, естественно, называют уже не гладкими, а *топологическими*.) Аналогичные изменения можно сделать и в других определениях, например из определения 2.5′ получится определение «C^n-согласованности» атласов. В топологии существенным является только различие между C^0 и всеми остальными C^n, $1 \leqslant n \leqslant \infty$: сравнительно несложно доказать, что на многообразии класса C^n, $n \geqslant 1$, существует атлас, превращающий его в многообразие класса C^∞ и C^n-эквивалентный исходному атласу (см. [18]), в то же время недавно было доказано, что существуют топологические многообразия, на которых невозможно ввести гладкую структуру. — *Прим. ред.*

в это определение, для наших рассмотрений не будет играть никакой роли [1]). Вообще же оно налагается, чтобы исключить некоторые патологические случаи.

Примеры. 2.5. n-мерное евклидово пространство удовлетворяет условиям этого определения очевидным образом. Действительно, за открытое покрытие можно взять покрытие, которое состоит только из одного множества U_1 — всего пространства; за V_1 также можно взять все n-мерное пространство, а за φ_1 — тождественное отображение.

2.6. Возвращаясь к разд. 2.1, мы видим, что двумерная сфера S^2 удовлетворяет условиям определения 2.5. Действительно, шесть полусфер, которые там описаны, образуют открытое покрытие сферы и выполняют роль множеств U_i. Если за U_1 взять, например, полусферу $z > 0$, то φ_1 будет отображением, переводящим точку (x, y, z) множества U_1 в точку (x, y); за V_1 берется единичный круг с центром в начале координат. Аналогично если U_2 — полусфера $x > 0$, то $\varphi_2(x, y, z) = (y, z)$. Отображение φ_{12} задается формулой $\varphi_{12}(y, z) = ((1 - y^2 - z^2)^{1/2}, y)$ и является гладким. Случай других φ_{ij} разбирается аналогично.

Упражнения. 2.5. Действуя по аналогии с рассуждениями предыдущего примера, докажите, что n-мерная сфера S^n является гладким n-мерным многообразием.

2.6. *Проективная плоскость* P^2 получается из двумерной сферы S^2 отождествлением диаметрально противоположных точек. Таким образом, точка из P^2 — это пара диаметрально противоположных точек на сфере. Для точки из P^2, определяемой парой точек p_1, p_2 на сфере S^2, рассмотрим открытый круг U_1 на S^2 с центром в точке p_1 и открытый круг U_2 с центром в p_2, точки которого противоположны точкам круга U_1. Назовем совокупность пар точек, лежащих внутри пары окрестностей U_1 и U_2, окрестностью точки p в P^2. Определим топологию в P^2, объявив окрестностью точки p любое множество, содержащее окрестность

[1]) Точнее, оно не существенно для простейшего материала этого параграфа и начала следующего; в дальнейшем же многообразия обычно предполагаются компактными, что позволяет считать атласы не только счетными, но и конечными. Поэтому при первом чтении на условие счетности можно просто не обращать внимания. При более детальном изучении рекомендуется доказать самостоятельно, что это условие эквивалентно тому, что топологическое пространство M имеет счетную базу (см. разд. 1.7). — *Прим. ред.*

только что описанного вида. Докажите, что P^2 является двумерным гладким многообразием.

2.7. Обобщите предыдущее упражнение, определив *проективное пространство* P^n как пространство, полученное отождествлением диаметрально противоположных точек n-мерной сферы. Окрестности определяются так же, как в упражнении 2.6. Докажите, что P^n — гладкое многообразие.

2.8. Пусть X — множество наборов из $n+1$ действительных чисел, исключая набор из $n+1$ нулей. Определим отношение $\sim$, сказав, что $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \sim (cx_0, cx_1, \ldots, cx_n)$, где c — любое действительное число, отличное от нуля. Покажите, что $\sim$ является отношением эквивалентности [1] в X и что классы эквивалентности находятся во взаимно однозначном соответствии с точками проективного пространства P^n, построенного в упражнении 2.7. Пусть U_i — множество точек в P^n, представители которых в X имеют $x_i \neq 0$. Тогда каждая точка из U_i имеет представитель вида $(x_0, x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n)$ с 1 на i-м месте. Пусть φ_i — отображение множества U_i в n-мерное пространство, переводящее точку с представителем $(x_0, x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n)$ в точку $(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Покажите, что полученные таким образом множества U_i и отображения φ_i обладают теми свойствами, о которых говорится в определении 2.5, и превращают P^n в гладкое многообразие.

2.9. Упражнение 2.8 приводит к следующей конструкции: пусть Z — множество наборов $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ из $n+1$ комплексных чисел, исключая набор из $n+1$ нулей. Напишем $(z_0, z_1, \ldots$ $\ldots, z_n) \sim (cz_0, cz_1, \ldots, cz_n)$, где c — любое ненулевое комплексное число. Проверьте, что $\sim$ есть отношение эквивалентности в Z. Пусть CP^n — множество классов эквивалентности. Пусть U_i — множество элементов CP^n, имеющих представителей вида $(z_0, z_1, \ldots, 1, \ldots, z_n)$ с единицей на i-м месте, и пусть отображение φ_i переводит элемент такого вида в точку с координатами $(z_0, z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n)$ в n-мерном комплексном пространстве, которое топологически эквивалентно $2n$-мерному евклидову пространству. Покажите, что на CP^n можно ввести топологию так, чтобы все U_i стали открытыми множествами, а φ_i — гомеоморфизмами и чтобы после этого множества U_i и отображения φ_i превратили CP^n в $2n$-мерное гладкое многообразие. CP^n называется *n-мерным комплексным проективным пространством.*

2.10. Докажите, что тор (см. § 2.1) является двумерным гладким многообразием.

2.4. Локальные координаты и гладкие функции

Идея вводимого ниже понятия неявно содержится уже в определении 2.5. А именно, гомеоморфизм φ_i отождествляет множество U_i с V_i, так что евклидовы

[1]) Определение см. в книге: Р. Фор, А. Кофман, М. Дени-Папен, Современная математика, «Мир», М., 1966, стр. 34. — *Прим. ред.*

координаты на V_i можно использовать для того, чтобы задавать («нумеровать») ими соответствующие точки в U_i. Таким образом, можно считать, что отображение φ_i вводит в множестве U_i систему координат или, по крайней мере, локальную систему координат. Слово «локальная» означает, что координаты введены только в открытом множестве U_i, а не на всем многообразии. Это приводит к мысли, что можно было бы определить понятие гладкой функции на многообразии, используя дифференцирование по координатам, определяемым отображениями φ_i. Основной момент — проверить, что, определяя это понятие при помощи различных φ_i, мы не придем к противоречию.

Для проверки этого рассмотрим функцию f с действительными значениями, определенную на открытом множестве U гладкого многообразия M. Возьмем точку p из U и предположим, что она попадает в множество U_i того открытого покрытия, которое участвует в определении M. Рассмотрим функцию $f\varphi_i^{-1}$, определенную на множестве $\varphi_i(U \cap U_i)$. Эту функцию можно представлять себе как функцию f, выраженную через локальные координаты в U_i, определяемые отображением φ_i. Если точка p попадет также в другое открытое множество покрытия, скажем U_j, то точно так же функция $f\varphi_j^{-1}$ определена в окрестности точки $\varphi_j(p)$.

Лемма 2.1. *Функция $f\varphi_i^{-1}$ будет гладкой в окрестности точки $\varphi_i(p)$ тогда и только тогда, когда $f\varphi_j^{-1}$ будет гладкой в окрестности точки $\varphi_j(p)$.*

Доказательство. Это устанавливается мгновенно, поскольку $f\varphi_i^{-1}$ можно записать как $f\varphi_j^{-1}\varphi_j\varphi_i^{-1} = f\varphi_j^{-1}\varphi_{ji}$. Если функция $f\varphi_j^{-1}$ гладкая, то такой же будет и $f\varphi_i^{-1} = f\varphi_j^{-1}\varphi_{ji}$ как композиция гладких функций (упражнение 2.3).

Лемма, таким образом, утверждает, что если функция f, будучи выражена через координаты, определенные при помощи отображения φ_i, окажется гладкой, то гладкой она будет и при выражении через координаты, определяемые отображением φ_j (и наоборот).

Определение 2.6. Будем называть функцию f *гладкой в окрестности точки* p в том и только в том случае, когда в предыдущих обозначениях функция $f\varphi_i^{-1}$ будет гладкой в некоторой окрестности точки $\varphi_i(p)$.

Лемма утверждает, что сформулированное здесь условие не зависит от того, какое из отображений φ_i используется для проверки гладкости.

Назовем функцию f *гладкой в открытом множестве* U, если она является гладкой в окрестности каждой точки из U. Назовем ее *гладкой в произвольном множестве* A, если она гладкая в некотором открытом множестве, содержащем A.

Упражнения. 2.11. Пусть M — сфера $x^2+y^2+z^2=1$ в трехмерном пространстве. Докажите, что каждая из евклидовых координат x, y, z является гладкой функцией на M.

2.12. Докажите то же, что и в упражнении 2.11, для тора из § 2.1.

2.13. Пусть M — гладкое многообразие и p — точка на M. Покажите, что существует окрестность U точки p и гладкая функция f на M, которая положительна на U и равна нулю в каждой точке вне U. (*Указание*: возьмите за U окрестность с локальными координатами, которая отображается на открытое множество V в евклидовом пространстве. Затем надо уменьшить U до некоторой окрестности U', которой соответствует шар V' в евклидовом пространстве с замыканием $\overline{V'} \subset V$. Выберите масштаб и начало координат так, чтобы V' стал шаром единичного радиуса с центром в начале координат. После этого воспользуйтесь примером 2.4.)

2.14. Пусть A — компактное множество в гладком многообразии M, а U — открытое множество, содержащее A. Используя подходящее конечное покрытие множества A окрестностями такого типа, как в предыдущем упражнении, постройте гладкую на M функцию f, которая положительна на A и равна 0 вне U.

Добавив к имеющемуся покрытию множества A новые координатные окрестности, получите вторую функцию g, которая равна f на A и не обращается в нуль в окрестности замыкания множества тех точек, где $f \neq 0$. Рассматривая частное f/g, постройте гладкую на M функцию, которая равна 1 на множестве A, нулю вне U и принимает значения, заключенные между 0 и 1.

Заметим, что если V_i — одна из открытых клеток в определении 2.5, то каждая евклидова координата на V_i является гладкой функцией на соответствующем множестве U_i в M. Другими словами, в каждом множестве U_i имеется набор из n гладких функций, значения которых в точке можно взять за координаты этой точки (локально в U_i). Это наводит на мысль расширить понятие локальной системы координат, беря в качестве координат в некоторой окрестности (не обязательно в одной из U_i) значения n функций, гладких в этой окрестности. Конечно, для того чтобы эти координаты соответствовали гомеоморфизму окрестности на евклидову клетку, на них необходимо наложить некоторые условия.

Итак, пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — функции, гладкие в некоторой окрестности точки p на M, и пусть p лежит в U_i (в обозначениях определения 2.5). Тогда $f_1\varphi_i^{-1}, f_2\varphi_i^{-1}, \ldots, f_n\varphi_i^{-1}$ — функции, гладкие в смысле определения 2.2 в окрестности точки $\varphi_i(p) \in V_i$. Предположим, что якобиан этих функций, вычисленный в евклидовых координатах на V_i, отличен от нуля в точке $\varphi_i(p)$. Отобразим тогда окрестность точки $\varphi_i(p)$ в n-мерное евклидово пространство, переводя точку x в точку с координатами $(f_1\varphi_i^{-1}(x), f_2\varphi_i^{-1}(x), \ldots, f_n\varphi_i^{-1}(x))$. Обозначим полученное отображение через f. По теореме 2.1 найдется такая окрестность V точки $f\varphi_i(p)$ (которую всегда можно сделать клеткой) и такая окрестность U' точки $\varphi_i(p)$, что f гомеоморфно отображает окрестность U' на V, причем обратное отображение тоже гладкое. Наконец, положим $U = \varphi_i^{-1}(U')$ и $\varphi = f\varphi_i$. Таким образом, φ отображает точку $q \in U$ в точку с координатами $(f_1(q), f_2(q), \ldots, f_n(q))$. Ясно, что φ является гомеоморфизмом окрестности U на V.

Определение 2.7. Гомеоморфизм φ мы будем называть *локальной системой координат в окрестности U точки p*.

Множество U называется *координатной окрестностью*, соответствующей этой системе [1]).

Это определение мотивировано тем, что точки из U определяются координатами их образов при отображении φ. Заметим, что множества U_i с отображениями φ_i автоматически являются локальными системами координат в смысле этого определения.

Упражнения. 2.15. Покажите, что определение локальных координат в окрестности точки не зависит от выбора отображения φ_i, участвующего в построении.

2.16. Пусть φ и ψ — произвольные локальные системы координат в точке p, отображающие окрестности точки p на открытые клетки V и W соответственно и лежащие в n-мерных евклидовых пространствах. Покажите, что $\varphi\psi^{-1}$ является гладким отображением открытого множества в W на открытое множество в V и что якобиан этого отображения отличен от нуля.

Результат упражнения 2.16 означает, что можно добавлять к координатным окрестностям U_i, участвующим в определении гладкого многообразия, любые координатные окрестности в смысле определения 2.7, и расширенный таким образом набор локальных систем координат по-прежнему будет удовлетворять условию (2) определения 2.5.

2.17. Пусть p — точка на гладком многообразии M, и пусть φ — локальная система координат в окрестности U точки p в

---

[1]) Уоллес заинтересован главным образом в координатах, введенных возле точки p, т. е. в некоторой ее окрестности — безразлично, насколько малой. Поэтому он дает определение применительно к рассмотренному в предыдущем абзаце случаю, в котором, напомним, $U \subset U_i$. Общее же определение таково: Пусть $U \subset M$ — открытое множество и $\varphi\colon U \to V$ — гомеоморфизм множества U на открытое подмножество V евклидова пространства, и пусть выполняется условие: если $U \cup U_i \neq \varnothing$, то отображения

$$\varphi\varphi_i^{-1}\colon \varphi_i(U \cap U_i) \to \varphi(U \cap U_i), \quad \varphi_i\varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap U_i) \to \varphi_i(U \cap U_i)$$

гладкие. Тогда φ будем называть *(локальной) системой координат в координатной окрестности* U (а пару (U, φ) — *картой*).

Читатель легко проверит, что если (U, φ) и (U', φ') — две карты в этом общем смысле и $U \cap U' \neq \varnothing$, то для них выполняется условие согласованности (аналогичное уже встречавшимся в определениях 2.5 и 2.5′, а также в предыдущем абзаце): отображения

$$\varphi'\varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U'), \quad \varphi(\varphi')^{-1}\colon \varphi'(U \cap U') \to \varphi(U \cap U')$$

гладкие. — *Прим. ред.*

смысле определения 2.7. Пусть f — гладкая функция в окрестности точки p (определение 2.6). Покажите, что $f\varphi^{-1}$ является гладкой функцией в окрестности точки $\varphi(p)$ в V (обозначения взяты из определения 2.7).

Смысл этого результата состоит в том, что хотя понятие гладкой функции определяется только при помощи координатных окрестностей U_i, участвующих в определении многообразия, однако оно допускает точно такое же описание в терминах дополнительных локальных систем координат, введенных в определении 2.7.

2.18. Рассмотрим плоскость (x, y) как гладкое многообразие. Покажите, что полярные координаты (r, θ), определенные равенствами $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, можно взять за локальные координаты в любом открытом круге, не содержащем начало координат.

2.19. Аналогично покажите, что сферические координаты, определенные равенствами $x = r\sin\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\varphi$, можно взять за локальные координаты трехмерного пространства в любом открытом шаре, не пересекающем оси z.

2.20. Сферические координаты в предыдущем упражнении можно ограничить на единичную сферу, положив $r = 1$. Покажите, что (θ, φ) можно взять в качестве локальных координат на сфере в любом круге, не содержащем точку с евклидовыми координатами $(0, 0, \pm 1)$.

2.5. Гладкие отображения

В разделе 2.2 мы видели, что, рассматривая наборы гладких функций на открытом множестве в евклидовом пространстве, можно определить понятие гладкого отображения. Сейчас нам предстоит сделать то же самое в более общей ситуации, чтобы определить гладкое отображение одного многообразия в другое. В теории гладких многообразий гладкие отображения играют ту же роль, какую играют непрерывные отображения в общей теории топологических пространств. Идея приводимого ниже определения — использовать локальные системы координат для того, чтобы перенести уже знакомое нам определение 2.3 на гладкие многообразия.

Определение 2.8. Пусть M, N — гладкие многообразия размерностей m и n соответственно, U — открытое множество в M, а f — отображение многообразия U в многообразие N. Пусть p — точка из U, и пусть φ — локальная система координат на N в окрестности W точки $f(p)$; таким образом, φ является гомеоморфизмом множества W на открытую клетку V в некотором евклидовом пространстве размерности n. Тогда композиция φf является отображением окрестности точки p в клетку V, которое можно описать с помощью функций, рассматривая каждую координату на V как функцию, определенную в окрестности точки p. Если все эти функции гладкие, то мы будем говорить, что отображение f *гладкое в окрестности точки* p. Отображение f будем называть *гладким в* U, если оно гладкое в окрестности каждой точки из U.

Заметим, что определение 2.8 можно также сформулировать следующим образом. Пусть ψ — локальная система координат в окрестности U_0 точки p, про которую мы предполагаем, что $U_0 \subset U$. Таким образом, отображение ψ есть гомеоморфизм окрестности U_0 на открытую клетку V_0 в n-мерном евклидовом пространстве. В этом случае композиция $\varphi f \psi^{-1}$ является отображением множества V_0 в V. В определении 2.8 говорится, что если это отображение гладкое, то f — гладкое отображение в окрестности точки p. Другой момент, который следовало бы отметить (и проверить в качестве упражнения!), — то, что определение гладкости отображения не зависит от того, какая система координат выбирается в окрестности точки $f(p)$. Другими словами, если сформулированное условие выполняется для одной локальной системы координат, то оно выполняется и для любой другой системы.

Определение 2.8 следующим образом обобщается на отображения, заданные на произвольных множествах.

Определение 2.9. Пусть M и N — два гладких многообразия, A — подмножество в M, а f — отображение A в многообразие N. Будем называть f *гладким*, если его можно продолжить до гладкого отображения $U \to N$, где U — открытое множество, содержащее A.

Примеры. 2.7. Заметим, что если взять в качестве M и N евклидовы пространства, то определения 2.8 и 2.9 сводятся к определению 2.3.

2.8. Любая гладкая функция на подмножестве U гладкого многообразия M (определение 2.6) является гладким отображением в одномерное евклидово пространство. Более общо, если $f_1, f_2, \ldots, f_r$ — гладкие функции на U, то отображение, переводящее точку p в точку с координатами $(f_1(p), f_2(p), \ldots, f_r(p))$, есть гладкое отображение множества U в r-мерное евклидово пространство.

Упражнения. 2.21. Пусть M — тор в трехмерном пространстве, и пусть (l, m, n) — направляющие косинусы внешней нормали к M в точке p. Тогда, поскольку $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, тройку (l, m, n) можно рассматривать как координаты точки на двумерной единичной сфере в трехмерном пространстве. Возьмем эту точку за $f(p)$. Докажите, что f есть гладкое отображение многообразия M в сферу S^2.

2.22. Положение точки q на торе в трехмерном пространстве можно задавать следующим образом. Пусть тор задан тем же способом, что и в разд. 2.1. Возьмем точку на окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$ в плоскости (x, y), для которой луч, направленный к ней из центра окружности, образует угол θ с положительным направлением оси x. Проведем через эту точку окружность, параллельную плоскости (x, z) и лежащую на торе, а затем возьмем точку, смещенную на угловое расстояние φ по этой окружности (рис. 2.3). Тогда положение точки q можно задавать парой (θ, φ). Заметим, что это не есть система координат на всем торе, так как для данной точки q углы θ и φ определены только с точностью до целого кратного 2π. Покажите, что (θ, φ) тем не менее можно принять за локальные координаты в подходящих открытых подмножествах тора. Возьмем теперь точку p с координатами (x, y) на плоскости, и пусть $f(p)$ — точка на торе с угловыми координатами (в только что указанном смысле) $\theta = x$, $\varphi = y$. Докажите, что f — гладкое отображение двумерного евклидова пространства на тор.

Заметим, что если отображение f ограничить на квадрат $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$, то оно будет взаимно однозначным внутри этого квадрата, а точки на сторонах, лежащие друг против друга, отобразятся в одну точку. Для наглядности говорят, что тор получается из квадрата отождествлением пар противоположных сторон.

Другая интерпретация этого упражнения получится, если принять каждый из углов θ, φ за угловую координату на окружности. Тогда тор представится в виде топологического произведения двух окружностей.

2.23. Пусть M, N и P — гладкие многообразия, и пусть $f: M \to N$ и $g: N \to P$ — гладкие отображения. Покажите, что композиция gf является гладким отображением.

2.24. Пусть p — точка на двумерной сфере S^2, а $f(p)$ — точка на проективной плоскости P^2, полученная отождествлением p

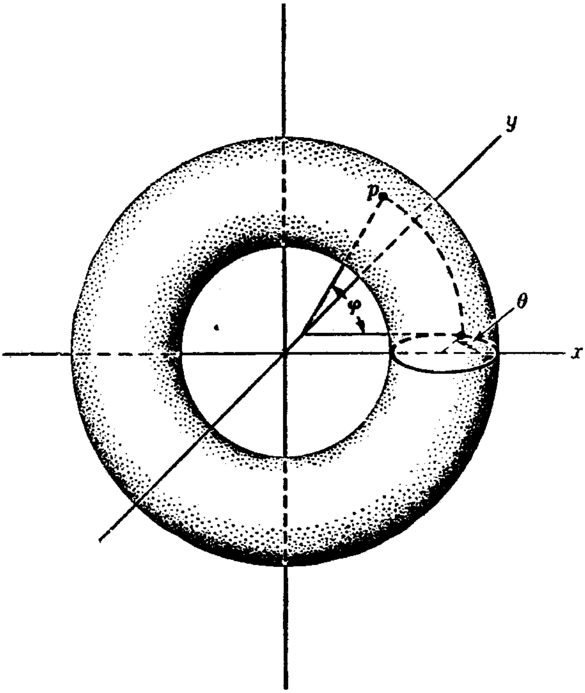

Рис. 2.3. Точки тора «задаются» с помощью углов θ, φ.

с диаметрально противоположной точкой (см. упражнение 2.6). Покажите, что f — гладкое отображение сферы S^2 на P^2.

В общей топологии мы рассматриваем гомеоморфные пространства как одинаковые. В нашем случае, для того чтобы два гладких многообразия считались одинаковыми, должно выполняться более сильное условие диффеоморфности.

Определение 2.10. Пусть M и N — гладкие многообразия, а f — такое взаимно однозначное отображение многообразия M на N, что обратное отображение тоже является гладким. Тогда f называется *диффеоморфизмом*, а многообразия M и N — *диффеоморфными* [1]).

Упражнение. 2.25. Пусть f — взаимно однозначное отображение гладкого многообразия M на N. Пусть φ — локальная система координат в окрестности точки p на M, а ψ — локальная система координат в окрестности $f(p)$ на N, так что $\psi f \varphi^{-1}$ есть гладкое отображение одной n-мерной клетки на другую. Предположим, что якобиан этого отображения, записанного в евклидовых координатах, не равен нулю в окрестности точки $\varphi(p)$. Пусть это условие выполнено для любой точки p. Докажите, что f — диффеоморфизм.

Заметим, что это упражнение дает другой способ формулировать определение 2.10. Отметим также, что диффеоморфные многообразия автоматически имеют одну и ту же размерность (почему?).

2.6. Ранг гладкого отображения

Естественность определения, которое мы здесь введем, вытекает из следующего наблюдения: гладкое отображение, определенное на многообразии, может привести к падению размерности. Рассмотрим,

---

[1]) Говорят также, что диффеоморфны гладкие структуры, заданные на M и N. Допуская вольность речи, о двух диффеоморфных многообразиях часто говорят как об одном и том же многообразии.

В примечании на стр. 38 указаны два несовместимых атласа (U_1, φ_1) и (U_1', φ_1') на прямой линии R. Прямая с атласом (U_1, φ_1) и она же с атласом (U_1', φ_1') — это, строго говоря, две разные гладкие структуры на R, два разных гладких многообразия. Но ясно, что они диффеоморфны (отображение $\psi\colon x \to x^3$ является диффеоморфизмом второго из них на первое). Легко видеть, что на самом деле на R можно ввести континуум различных гладких структур, однако можно доказать, что все они диффеоморфны друг другу. Последнее часто выражают словами: «на прямой существует только одна гладкая структура», опуская оговорку: «с точностью до диффеоморфизма».

Часто можно прочитать примерно следующее: «Выделение дифференциальной топологии в самостоятельный раздел науки можно датировать моментом открытия Милнором различных гладких структур на семимерной сфере [20]». С учетом некоторой патетики этой фразы, как вам кажется — подразумевается ли в ней вышеупомянутая оговорка? — *Прим. ред.*

например, отображение f плоскости в себя, переводящее точку (x, y) в точку $(x, 0)$. Здесь отображение f задано на чем-то двумерном, а его образ имеет размерность 1. Хотя это понадобится нам лишь в следующей главе, отметим, что в только что приведенном примере якобиан отображения всюду равен нулю. С другой стороны, если бы этот якобиан был всюду ненулевым, то отображение f имело бы локальное обратное и потому следовало бы ожидать, что его образ будет двумерным. Тем самым падение размерности должно быть как-то связано с рангом матрицы Якоби отображения f.

Определение 2.11. Пусть M и N — гладкие многообразия, и пусть f: $M \to N$ — гладкое отображение. Пусть $p \in M$, и пусть φ: $U \to V$ и ψ: $U' \to V'$ — локальные системы координат в окрестностях точек p и $f(p)$ соответственно. Таким образом, $\psi f \varphi^{-1}$ есть гладкое отображение евклидова открытого множества V в множество V'. В этом случае *ранг отображения f в точке p* определяется как ранг матрицы Якоби отображения $\psi f \varphi^{-1}$ в точке $\varphi(p)$. Если во всех точках ранг равен r, то говорят, что f *имеет ранг r*.

Упражнения. 2.26. Проверьте, что определение 2.11 не зависит от выбора локальных координат в окрестностях точек p и $f(p)$.

2.27. Проверьте, что отображение f плоскости в себя, определенное формулой $f(x, y) = (x, 0)$, имеет всюду ранг 1.

2.28. Пусть $f: M \to N$ — гладкое отображение ранга $m = \dim M \leqslant n = \dim N$. Покажите, что в подходящих локальных координатах $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в окрестности точки p и $(y_1, \ldots, y_n)$ в окрестности $f(p)$ отображение f локально записывается формулами

$$y_i = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$
$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m) \quad (i = m+1, \ldots, n),$$

где f_i — гладкие функции своих аргументов.

2.7. Многообразия с краем

Существует важное обобщение понятия гладкого многообразия, определенного в разд. 2.3. Пример замкнутого круга D показывает естественность этого обобщения. Внутренняя точка круга p имеет окрестность, представляющую собой открытый круг, однако точка q на границе имеет окрестность (в круге), которая является полукругом. Таким образом, если считать D гладким многообразием, то необходимо рассматривать два типа координатных окрестностей в соответствии с тем, является ли рассматриваемая точка внутренней или нет.

Определение 2.12. *n-мерное гладкое многообразие с краем* — это топологическое пространство M с подпространством N и счетным открытым покрытием $U_1, U_2, \ldots$ с гомеоморфизмами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) Если множество U_i данного покрытия содержится в $M \setminus N$, то соответствующий гомеоморфизм φ_i: $U_i \to V_i$ отображает U_i на открытый шар V_i в n-мерном пространстве; в противном случае задан гомеоморфизм φ_i: $U_i \to V_i$, где V_i — полушарие вида $\sum_1^n x_i^2 < 1$, $x_n \geqslant 0$, причем множество $U_i \cap N$ отображается на подмножество в V_i, состоящее из точек, для которых $x_n = 0$.

2) Если U_i и U_j — два множества из данного покрытия, причем $U_i \cap U_j = \varnothing$, а φ_i и φ_j — только что описанные гомеоморфизмы, то $\varphi_i \varphi_j^{-1} = \varphi_{ij}$ есть гладкое отображение множества $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ на $\varphi_i(U_i \cap U_j)$.

Поскольку гомеоморфизмы φ_{ij} должны переводить внутренние точки во внутренние, а граничные в граничные, очевидно, что если ограничить на подмножество N те U_i, которые его пересекают, то они (т. е. множества $U_i \cap N$) образуют покрытие множества N, определяющее на нем структуру гладкого многообразия; оно называется *краем* многообразия M.

Пример 2.9. Шар и сплошной тор есть трехмерные многообразия с краем, причем краями, конечно, являются сфера и тор соответственно.

Легко видеть, что определения, приведенные в предыдущих разделах этого параграфа, переносятся на гладкие многообразия с краем с незначительными изменениями, учитывающими точки края.

Кроме того, можно показать (но доказательство этого факта трудно и не будет приведено здесь), что если два гладких многообразия с краем имеют диффеоморфные края, то их можно «склеить», отождествив края, и получится новое гладкое многообразие. Этим способом можно, например, склеить два круга так, чтобы получилась сфера. Один круг станет при этом верхней полусферой, другой — нижней, а края отождествятся, образовав экватор.

Более подробно этот процесс можно описать следующим образом. Пусть M_1 и M_2 — гладкие многообразия с краем, N_1 и N_2 — края многообразий M_1 и M_2 соответственно, и пусть $f\colon N_1 \to N_2$ — заданный диффеоморфизм. Построим множество, элементы которого — это точки $M_1 \setminus N_1$, точки $M_2 \setminus N_2$ и пары точек $(p, f(p))$, где $p \in N_1$. Таким образом, M является объединением множеств M_1 и M_2, в котором каждая пара $(p, f(p))$ считается за одну точку, так что пару $(p, f(p))$ можно, не опасаясь двусмысленности, обозначать буквой p. Чтобы превратить M в топологическое пространство, необходимо определить окрестности его точек. Если точка p лежит в $M_1 \setminus N_1$ или в $M_2 \setminus N_2$, то в качестве ее окрестностей в M берутся окрестности этой точки в M_1 или в M_2 соответственно[1]). Если же $p = (p, f(p))$ есть пара отождествленных точек, где точка p лежит в N_1 и $f(p)$ — в N_2, то каждая окрестность точки p в M определяется как объединение некоторой окрестности точки p в M_1 и некоторой окрестности точки $f(p)$ в M_2 с соответствующими отождествлениями точек из N_1 и N_2.

Так, например, на рис. 2.4 две полукруговые окрестности U_1 и U_2 точек p и $f(p)$ склеиваются, образуя окрестность U точки $(p, f(p))$ в M.

Трудный шаг — показать, что M является гладким многообразием. Подробное доказательство этого

[1]) А также, конечно, и любые множества в M, содержащие такие окрестности. (О последнем при описании того или иного примера часто даже не упоминают, считая это само собою разумеющимся.) — *Прим. ред.*

см. в [18, § 6] [1]). Мы должны сделать следующее: надо показать, что если окрестность U в M получена склеиванием координатных окрестностей U_1 и U_2, а окрестность V — склеиванием V_1 и V_2, то функции замены координат (функции типа φ_{ij} определения

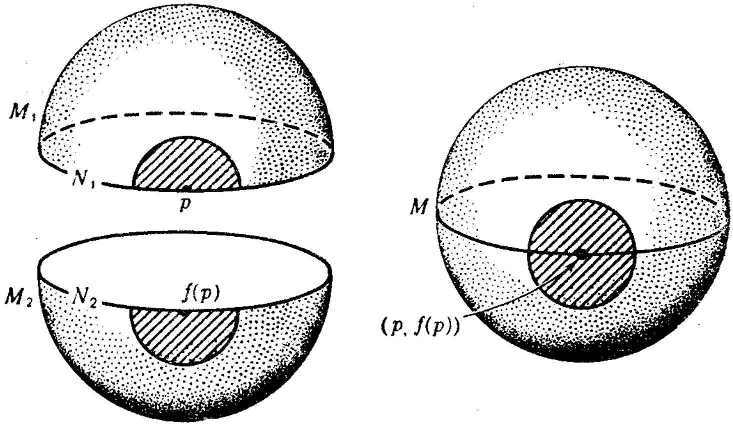

Рис. 2.4.

2.12) на $U_1 \cap V_1$ и на $U_2 \cap V_2$ можно согласовать так, чтобы получившиеся функции замены координат для M оказались гладкими.

§ 3. ПОДМНОГООБРАЗИЯ

3.1. Определение

При изучении гладких многообразий понятие подпространства является слишком общим. Хотелось бы, чтобы для двух многообразий, одно из которых содержится в другом, их локальные системы координат были связаны друг с другом каким-то простым образом. Вот соответствующее определение.

[1]) См. также Милнор [24*, теорема 1.4].