см. в [18, § 6][1]). Мы должны сделать следующее: надо показать, что если окрестность U в M получена склеиванием координатных окрестностей U_1 и U_2, а окрестность V — склеиванием V_1 и V_2, то функции замены координат (функции типа φ_{ij} определения

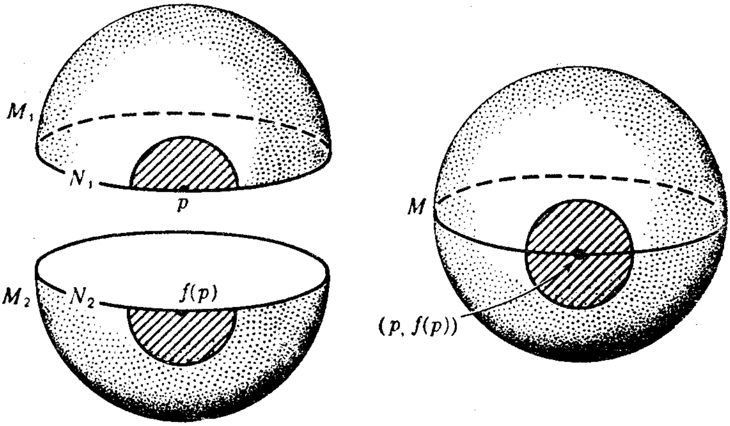

Рис. 2.4.

2.12) на $U_1 \cap V_1$ и на $U_2 \cap V_2$ можно согласовать так, чтобы получившиеся функции замены координат для M оказались гладкими.

§ 3. ПОДМНОГООБРАЗИЯ

3.1. Определение

При изучении гладких многообразий понятие подпространства является слишком общим. Хотелось бы, чтобы для двух многообразий, одно из которых содержится в другом, их локальные системы координат были связаны друг с другом каким-то простым образом. Вот соответствующее определение.

---

[1]) См. также Милнор [24*, теорема 1.4].

Определение 3.1. Пусть M — гладкое многообразие размерности m, и пусть N — подмножество в M, для которого выполнены следующие условия:

1) N — гладкое многообразие[1]) размерности n.

2) Если p — точка в N, то существует такая координатная окрестность U точки p в M с такой локальной системой координат φ: $U \to V$, где V — открытая клетка в m-мерном евклидовом пространстве, что $\varphi(N \cap U)$ есть подмножество точек клетки V, удовлетворяющих уравнениям $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_m = 0$, а ограничение отображения φ на $U \cap N$ дает локальную систему координат для N в окрестности точки p. Тогда N называется *подмногообразием многообразия* M.

Условие 2) можно выразить менее формально, сказав, что локальные координаты на M в окрестности точки p определены так, что N имеет локальные уравнения $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_m = 0$, в то время как $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются локальными координатами на N в окрестности точки p. Таким образом, локальные системы координат на N получаются из систем координат на M. Условие 2) также обеспечивает, что у N имеется окрестность в M, устроенная вроде «трубчатой» окрестности у гладкой кривой в трехмерном пространстве. Этот момент мы обсудим позднее, а сначала дадим несколько примеров.

Примеры. 3.1. Простейший пример получится, конечно, если взять в качестве M m-мерное евклидово пространство, а в качестве N — евклидово подпространство, заданное уравнениями $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_m = 0$.

3.2. Возьмем в качестве M трехмерное евклидово пространство. Координаты x, y, z в трехмерном пространстве можно принять за локальные координаты в окрестности любой точки. В качестве N возьмем двумерную сферу с уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Мы уже видели, что она является гладким многообразием (пример 2.6). Теперь мы покажем, что выполняется

[1]) То есть оно снабжено соответствующими U_i и φ_i. — *Прим. ред.*

условие 2) определения 3.1 [1]). Возьмем, например, точку p на полусфере $z > 0$ в N. Ясно, что координаты (x, y, z) нельзя принять за локальные координаты

[1]) Полезно иметь в виду, что в определении 3.1 главную роль играет условие 2), и в сущности только его выполнение и нужно проверять, когда мы хотим убедиться в том или ином примере, что имеем дело с подмногообразием. Так как Уоллес в дальнейшем фактически пользуется этим обстоятельством, то остановимся на нем подробнее.

Пусть подмножество $N \subset M$ обладает следующим свойством:

3.1′. Для любой точки $p \in N$ существует такая карта (U, φ) многообразия M, что $p \in U$ и $\varphi(N \cap U)$ состоит из тех и только тех точек клетки $V = \varphi(U)$, для которых $x_{n+1} = \ldots = x_m = 0$.

Тогда можно ввести на N гладкую структуру, приняв всевозможные $U \cap N$ за координатные окрестности, а ограничения $\varphi | U \cap N$ — за локальные системы координат; будучи снабжено этой гладкостью, N будет подмногообразием многообразия M в смысле определения 3.1.

Проверим, что мы действительно получаем атлас для N. Если (U, φ) и (U', φ') — две такие карты на M, как в 3.1′, и $(U \cap N) \cap (U' \cap N) \neq \varnothing$, то мы должны проверить согласованность (в том смысле, как в прим. ред. на стр. 44) двух карт

$$(U \cap N, \varphi | U \cap N) \quad \text{и} \quad (U' \cap N, \varphi' | U' \cap N).$$

Эта согласованность означает, что функции

$$\varphi' \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \quad \text{и} \quad \varphi(\varphi')^{-1}(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$$

являются гладкими функциями от $(x_1, \ldots, x_n)$ при всех тех $(x_1, \ldots, x_n)$, при которых они определены. Но это очевидно, ибо $\varphi'\varphi^{-1}$ и $\varphi(\varphi')^{-1}$ гладко зависят от своих аргументов ввиду согласованности карт (U, φ) и (U', φ') многообразия M.

Остаются еще две несущественные детали. Во-первых, Уоллес упорно требует, чтобы координатные окрестности были гомеоморфны открытым шарам. Ясно, что мы достигли бы этого, если бы включили в 3.1′ дополнительное условие:

$V \cap \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_{n+1} = \ldots = x_m = 0\}$ — клетка в евклидовом пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$.

Но лучше никаких дополнительных условий не включать, а проверить, что при выполнении 3.1′ для любой точки $p \in N$ найдется такая карта (U_1, φ), что $p \in U_1$, $\varphi_1(U_1)$ — клетка,

$$\varphi(N \cap U_1) = \varphi(U_1) \cap \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_{n+1} = \ldots = x_m = 0\},$$

и это последнее множество — клетка. Такую карту можно получить, взяв сначала такую карту (U, φ), как в 3.1′, и при необходимости уменьшив U; детали предоставляются читателю.

Во-вторых, в определении 2.5 требовалось, чтобы существовал атлас, состоящий из *счетного* числа карт. У нас же пока каждой точки p в M так, чтобы выполнялось условие 2). Тем не менее можно ввести новые координаты посредством преобразования

$$X = x,$$
$$Y = y,$$
$$Z = z - (1 - x^2 - y^2)^{1/2}.$$

Функции, стоящие справа, — гладкие, так же как и функции, которыми выражается обратное преобразование, и якобиан $\left|\frac{\partial (X, Y, Z)}{\partial (x, y, z)}\right|$ отличен от нуля в окрестности любой точки на полусфере $z > 0$. Таким образом, (X, Y, Z) допускаются в качестве локальных координат в окрестности точки p (определение 2.7). В этих координатах N имеет уравнение $Z = 0$ в окрестности точки p. Кроме того, в примере 2.6 мы видели, что X и Y можно принять за локальные координаты на N в полусфере $z > 0$. Таким образом, условие 2) определения 3.1 в окрестности точки p выполняется. Аналогичное рассуждение показывает, что это условие выполняется в окрестности любой точки $p \in N$.

В этом примере важным моментом является иллюстрация следующего обстоятельства: в данной системе локальных координат может быть совсем неочевидно, что подмножество в гладком многообразии на самом деле является подмногообразием. Необходимо произвести некоторую подгонку локальных координат, прежде чем мы увидим, что условие 2) выполняется.

точке $p \in N$ сопоставлена некоторая карта (U, φ) многообразия M, а из нее получается карта $(U \cap N, \varphi | U \cap N)$ для N; вполне может оказаться, что различным p сопоставлены различные (U, φ), и различных $(U \cap N, \varphi | U \cap N)$ получится столько же, сколько и различных точек p, т. е. континуум. Мы должны, следовательно, из покрытия топологического пространства N его открытыми подмножествами $U \cap N$ выбрать счетное подпокрытие.

Основным для дальнейшего является тот случай, когда N — компактное множество в M. В этом случае можно выбрать не только счетное, но и конечное подпокрытие. В общем же случае см. прим. ред. на стр. 39 и разд. 1.7. — *Прим. ред.*

3.3. Возьмем в качестве M двумерную сферу $x^2+y^2+z^2=1$ в трехмерном пространстве, и пусть N — окружность, по которой эта сфера пересекает плоскость $z=0$. Так как z всегда можно взять за одну из локальных координат на сфере в окрестности любой точки из N, беря за другую координату либо x, либо y, то легко видеть, что N — подмногообразие в M. Ясно, что этот пример можно распространить на бо́льшие размерности.

3.4. Интересно рассмотреть пример, в котором условие 2) определения 3.1 не выполнено. В упражнении 2.22 был дан пример гладкого отображения φ плоскости E_2 на тор. Пусть L — прямая в E_2, проходящая через начало координат и имеющая иррациональный наклон. Тогда легко видеть, что φ отображает L в тор взаимно однозначно. Возьмем за M тор, а за N — множество $\varphi(L)$; прямая L есть одномерное евклидово пространство и, стало быть, многообразие. Тем не менее его образ $\varphi(L)$ бесконечное число раз «обвивает» тор M, и эта обмотка такова, что если $p\in N$ и U — любая окрестность точки p в M, то $U\cap N$ состоит из бесконечного числа непересекающихся отрезков. Поэтому ни при каком выборе локальных координат на M в окрестности точки p не может выполняться условие 2) определения 3.1. Таким образом, N не является подмногообразием в M[1].

---

[1] N называется *иррациональной обмоткой тора*. Стоит заметить, что в дифференциальной геометрии и теории дифференциальных уравнений бывает желательно называть подмногообразиями объекты, подобные N, поэтому часто дается более общее определение гладкого подмногообразия, учитывающее это пожелание ([38], стр. 51). Для целей настоящей книги в таком обобщении нет необходимости.

Вот еще один пример, когда условие 2) определения 3.1 не выполнено. В треугольнике Δ (имеется в виду замкнутая ломаная из трех звеньев, а не ограничиваемая ею часть плоскости) можно ввести гладкую структуру, ибо он гомеоморфен окружности S^1. (Действительно, если $\{(U_i,\varphi_i)\}$ — атлас для S^1, а $\psi\colon \Delta\to S^1$ — гомеоморфизм, то $\{(\psi^{-1}(U_i),\varphi_i\psi)\}$ — атлас для Δ.) Но гладким подмногообразием плоскости треугольник, конечно, не является: если точка p находится в углу треугольника и U — ее окрестность на плоскости, то ни при каком диффеоморфизме

3.2. Многообразия в евклидовом пространстве

Нам особенно интересен случай, когда объемлющее многообразие есть евклидово пространство. Итак, пусть M — гладкое многообразие размерности n, заданное как подмногообразие в N-мерном евклидовом пространстве E. В формулировке условия 2) определения 3.1 используется некоторая локальная система координат в окрестности точки p. С другой стороны, евклидовы координаты $x_1, \ldots, x_N$ сами могут быть приняты за локальные координаты в окрестности точки p в E, поэтому естественно спросить, во что превращается условие 2) определения 3.1, если его выразить в терминах евклидовых координат. Мы исследуем этот вопрос, делая необходимое преобразование координат в два шага. Результат будет сформулирован как теорема 3.1.

Начнем с локальной системы координат в окрестности точки p в M, для которой выполнено условие 2) определения 3.1. Эта система представляет собой гомеоморфизм φ: $U \to V$, где V — открытая клетка в другом N-мерном евклидовом пространстве E', с координатами $(y_1, y_2, \ldots, y_N)$. Из условия 2), в частности, следует, что ограничение φ на $U \cap M$ есть локальная система координат на M в окрестности точки p и что φ переводит это множество в часть клетки V, выделяемую уравнениями $y_{n+1} = y_{n+2} = \ldots$ $\ldots = y_N = 0$. С другой стороны, евклидовы координаты $x_1, \ldots, x_N$ в E годятся, в частности, и в U, поэтому отображение φ^{-1} можно записать формулами:

$$x_i = \psi_i(y_1, y_2, \ldots, y_N), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

где ψ_i — гладкие функции, а якобиан

$$\left| \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_N)} \right|$$

не обращается в нуль на V.

φ: $U \to R^2 = \{(x_1, x_2)\}$ множество $\Delta \cap U$ не может отображаться в прямую $x_2 = 0$. (В отличие от иррациональной обмотки тора треугольник не является гладким подмногообразием плоскости и в упомянутом выше более широком смысле.) — *Прим. ред.*

В частности, этот якобиан не равен нулю в точке $\varphi(p)$, и поэтому, после подходящей перенумеровки переменных x_i, определитель

$$\left|\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right|$$

будет отличен от нуля в точке $\varphi(p)$. Поэтому, если определить отображение θ окрестности точки $\varphi(p)$ в третье евклидово пространство E'' с координатами $z_1, z_2, \ldots, z_N$ посредством формул

$$\begin{aligned}
z_1 &= \psi_1(y_1, y_2, \ldots, y_N),\\
&\;\;\vdots\\
z_n &= \psi_n(y_1, y_2, \ldots, y_N),\\
z_{n+1} &= y_{n+1},\\
&\;\;\vdots\\
z_N &= y_N,
\end{aligned} \tag{2}$$

то якобиан функций в правой части будет отличным от нуля в точке $\varphi(p)$, а стало быть, и в некоторой ее окрестности. По теореме 2.1 отсюда следует, что θ гомеоморфно отображает некоторую окрестность V' точки $\varphi(p)$ на открытую клетку W в пространстве E'', причем отображение θ^{-1}, определенное на W, будет гладким.

Положим теперь $U' = \varphi^{-1}(V')$ и $\chi = \theta\varphi$. Тогда χ есть гомеоморфизм множества U' на W, который с учетом формул (1) и (2) для φ^{-1} и θ должен записываться в следующем виде:

$$\begin{aligned}
z_1 &= x_1,\\
&\;\;\vdots\\
z_n &= x_n,\\
z_{n+1} &= \chi_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_N),\\
&\;\;\vdots\\
z_N &= \chi_N(x_1, x_2, \ldots, x_N).
\end{aligned} \tag{3}$$

Так как χ есть композиция отображений θ и φ, функции в правой части имеют якобиан, отличный от нуля в U' (см. упражнение 2.3), так что χ тоже является локальной системой координат. Обратное отображение χ^{-1} записывается формулами вида

$$
\begin{aligned}
x_1 &= z_1, \\
&\vdots \\
x_n &= z_n, \\
x_{n+1} &= \lambda_{n+1}(z_1, z_2, \ldots, z_N), \\
&\vdots \\
x_N &= \lambda_N(z_1, z_2, \ldots, z_N).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Теперь мы пришли к следующему. Во-первых, $\chi(U' \cap M)$ есть в точности множество, выделяемое в W уравнениями $z_{n+1} = z_{n+2} = \ldots = z_N = 0$, поэтому из формул (4) следует, что $U' \cap M$ есть множество точек в U', удовлетворяющих уравнениям

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \lambda_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, 0), \\
&\vdots \\
x_N &= \lambda_N(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, 0).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Во-вторых, ограничение отображения φ на $U' \cap M$ дает локальную систему координат на M в окрестности $U' \cap M$. Но легко видеть, что отображение χ переводит точку $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ из $U' \cap M$ в точку $(z_1, z_2, \ldots, z_n, 0, 0, \ldots, 0)$, у которой $x_i = z_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, отображение проектирования множества $U' \cap M$ в подпространство $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_N = 0$ само является локальной системой координат на $U' \cap M$.

Итоги наших обсуждений подводятся в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пусть M есть n-мерное подмногообразие N-мерного евклидова пространства E, и пусть p — точка на M. Тогда при подходящей нумерации* *евклидовых координат $x_1, x_2, \ldots, x_N$ в E проекция на пространство $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_N = 0$ является локальной системой координат на M в окрестности точки p, причем M в этой окрестности есть множество точек, удовлетворяющих уравнениям (полученным из (5) переменой обозначений)*

$$
\begin{array}{ll}
& x_{n+1} = f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\
(6) & \vdots \\
& x_N = f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n),
\end{array}
$$

в которых f_i — гладкие функции.

Пример 3.5. В случае сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в трехмерном пространстве мы видели, что в окрестности любой точки две из трех координат x, y, z можно принять за локальные координаты, так что соответствующие проектирования будут отображениями, определяющими локальные системы координат, а третья координата выражается как гладкая функция от этих двух (см. пример 2.6).

Упражнения. 3.1. Докажите следующее обращение теоремы 3.1. Пусть E есть N-мерное евклидово пространство, и пусть M — такое подмножество в E, что каждая точка $p \in E$ имеет окрестность U, для которой пересечение $U \cap M$ либо пусто, либо является множеством точек в U, удовлетворяющих уравнениям, которые при подходящей нумерации координат можно записать в виде

$$
\begin{array}{l}
x_{n+1} = f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\
\vdots \\
x_N = f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n),
\end{array}
$$

где f_i — гладкие функции. Докажите, что в этом случае M является подмногообразием в пространстве E.

3.2. Обобщите упражнение 3.1 следующим образом. Сохраняя в предыдущем упражнении остальные условия неизменными, предположим, что каждая точка пространства E имеет такую окрестность U, что $U \cap M$ либо пусто, либо является множеством точек в U, удовлетворяющих уравнениям

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где g_i — гладкие функции, матрица Якоби которых по переменным x_j имеет ранг n в каждой точке из U. Докажите, что M является подмногообразием в E.

В двух последних упражнениях описаны ситуации, в которых подмножество M в N-мерном евклидовом пространстве оказывается подмногообразием. Сейчас мы разберем еще одну такую ситуацию. Проверка условия 2) определения 3.1 будет уже немного труднее. Ее идея состоит в том, чтобы взять в качестве подмножества E образ гладкого многообразия при гладком взаимно однозначном отображении.

В примере 3.4 мы видели, что такой образ, вообще говоря, не обязан быть подмногообразием. Однако сейчас мы покажем, что компактности вместе с условием на ранг отображения[1]) уже достаточно для того, чтобы образ являлся подмногообразием в E.

Теорема 3.2. *Пусть M — компактное гладкое многообразие размерности n, и пусть E есть N-мерное евклидово пространство. Пусть f: $M \to E$ — взаимно однозначное гладкое отображение многообразия M в пространство E, и пусть ранг f равен n в каждой точке M. Тогда $f(M)$ — подмногообразие в E.*

Доказательство. Применим к отображению f результат упражнения 2.28 и получим, что для каждой точки $p \in M$ существует такая координатная окрестность $U \ni p$ с локальной системой координат φ, отображающей U на открытую клетку V в n-мерном евклидовом пространстве с координатами $y_1, y_2, \ldots, y_n$, в которой отображение $f\varphi^{-1}$ задается

[1]) Условие на ранг также является существенным: легко построить гладкое взаимно однозначное отображение окружности в плоскость, при котором ее образом будет треугольник. В точках окружности, отображающихся в вершины треугольника, ранг падает до нуля. — *Прим. ред.*

формулами

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= y_1,\\
&\;\vdots\\
x_n &= y_n,\\
x_{n+1} &= f_{n+1}(y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
&\;\vdots\\
x_N &= f_N(y_1, y_2, \ldots, y_n),
\end{aligned}
$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — координаты в E, а f_i — гладкие функции.

Заметим, что первые n формул отождествляют V с открытой клеткой W в подпространстве $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_N = 0$ пространства E. Поэтому образ $f(U)$ есть множество точек, удовлетворяющих уравнениям

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
x_{n+1} &= f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
&\;\vdots\\
x_N &= f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n),
\end{aligned}
$$

где $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W$, а f_i — гладкие функции.

Теперь, чтобы завершить доказательство, надо убедиться в том, что точка $f(p)$ имеет окрестность, в которой уравнениям (8) удовлетворяют только точки $f(M)$. Для этого рассмотрим меньшую окрестность U' точки p, такую, что $\bar{U}' \subset U$, и положим $V' = \varphi(U')$; пусть, далее, W' — соответствующее подмножество из W. Для любого положительного ε множество $W'(\varepsilon)$, определенное неравенствами

$$
f_{n+i}(x_1, \ldots, x_n) - \varepsilon < x_{n+i} < f_{n+i}(x_1, \ldots, x_n) + \varepsilon,
$$
$$
(x_1, \ldots, x_n) \in W',
$$

является открытой окрестностью точки $f(p)$. Теперь следует показать, что если ε достаточно мало, то в $W'(\varepsilon)$ лежат только те точки из $f(M)$, которые удовлетворяют уравнениям (8) с $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W'$. С первого взгляда использование двух окрестностей U и U' может показаться ненужным усложнением;

однако на самом деле удобно, работая с U', знать, что уравнения (8) справедливы в бо́льшем множестве U.

Допустим, что доказываемое утверждение неверно. Тогда для заданной убывающей последовательности значений ε мы смогли бы выбрать последовательность точек в M, не лежащих в U', каждая из которых отображалась бы в соответствующее множество $W'(\varepsilon)$. Так как M компактно, из этой последовательности можно было бы выбрать сходящуюся подпоследовательность. Таким образом, перенумеровав члены подпоследовательности и соответствующие значения ε, мы получили бы такую последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, сходящуюся к нулю, и такую последовательность точек $q_1, q_2, \ldots$, сходящуюся к точке q, что все q_i лежат вне U', но $f(q_i) \in W'(\varepsilon_i)$ при каждом i. На самом деле все точки q_i должны лежать даже вне множества U. Действительно, ни одна точка множества $f(U \setminus U')$ не попадет в $W'(\varepsilon)$ ни для какого ε, потому что все такие точки удовлетворяют уравнениям (8) с $(x_1, \ldots, x_n) \notin W'$. Отсюда следует, что и предельная точка q лежит вне U. Но в силу непрерывности отображения f имеем $f(\lim q_i) = \lim f(q_i)$ и так как ε_i стремится к нулю, $\lim f(q_i)$ лежит в $\overline{f(U')} = f(\overline{U'})$. Иными словами, $f(q)$ лежит в $f(\overline{U'})$. Но так как f взаимно однозначно, это означает, что q лежит в $\overline{U'}$; таким образом, мы пришли к противоречию.

Отсюда следует, что при некотором ε окрестность $W'(\varepsilon)$ точки $f(p)$ удовлетворяет[1]) условию 2) определения 3.1. Такую окрестность можно найти для любой точки из $f(M)$. Поэтому наша теорема полностью доказана[2]).

---

[1]) Вместе с введенными в ней локальными координатами

$$z_1 = x_1, \ldots, z_n = x_n,$$

$$z_{n+1} = x_{n+1} - f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, z_N = x_N - f_N(x_1, \ldots, x_n).$$

— *Прим. ред.*

[2]) Читателю предоставляется самостоятельно доказать, что в теореме 3.2 f диффеоморфно отображает M на $f(M)$, т. е. f является вложением (см. начало следующего раздела) многообразия M в евклидово пространство E. — *Прим. ред.*

3.3. Теорема о вложении

В предыдущем разделе мы рассматривали гладкие многообразия, которые являются подмногообразиями некоторого евклидова пространства. В действительности мы не налагали при этом существенных ограничений, так как любое гладкое многообразие диффеоморфно некоторому подмногообразию евклидова пространства. Здесь мы докажем это только для компактных многообразий; для случая некомпактных многообразий доказать этот факт уже труднее [1]).

Уточним сначала терминологию. Когда говорят о вложении множества A в множество B, то это означает, что A является подмножеством B и что рассматривается отображение $A \to B$, сопоставляющее точке $a \in A$ ту же самую точку, рассматриваемую уже как точка в B. Но применительно к гладким многообразиям этот термин имеет несколько иной смысл.

Определение 3.2. Пусть M, N — гладкие многообразия. (*Гладким*) *вложением* M *в* N называется любое отображение f: $M \to N$, образ $f(M)$ которого является гладким подмногообразием в N и которое является диффеоморфизмом многообразия M на $f(M)$.

Если гладкое многообразие M вложено как подмногообразие в евклидово пространство E, то каждую координату x_i пространства E можно рассматривать как гладкую функцию на многообразии M. Поэтому для доказательства того, что многообразие можно вложить в евклидово пространство, естественно попытаться построить набор гладких функций $f_1, f_2, \ldots f_N$ и потом рассмотреть отображение многообразия M в пространство E, переводящее точку $p \in M$ в точку с координатами $(f_1(p), f_2(p), \ldots$ $\ldots, f_N(p))$. Если мы хотим, чтобы это отображение было взаимно однозначным, то наш набор функций

[1]) См. [30], стр. 32, теорема 5, или [38], стр. 73, теорема 44. Между прочим, наложенное в определении 2.5 условие счетности необходимо для существования вложения в евклидово пространство. — *Прим. ред.*

должен обладать тем свойством, что для любых двух точек $p \neq q$ найдется по крайней мере одна функция f_i, принимающая различные значения в этих точках. В таком случае говорят, что функции f_i *разделяют точки* M. В любой координатной окрестности на M локальные координаты, очевидно, разделяют точки этой окрестности. Наша ближайшая цель теперь состоит в том, чтобы продолжить локальные координаты, заданные пока что в координатных окрестностях, до гладких функций на всем многообразии, с тем чтобы продолженные функции разделяли точки уже на всем многообразии.

Для компактного многообразия M это можно сделать с помощью функций, которые строятся в упражнении 2.13. Итак, построим для каждой точки $p \in M$ окрестность U, лежащую внутри координатной окрестности, и гладкую функцию f на M, которая положительна на U и равна нулю вне U. Так как многообразие M компактно, его можно покрыть конечным множеством $U_1, U_2, \ldots, U_m$ подобных окрестностей, причем каждой U_i соответствует функция f_i. Любое из множеств U_i само, конечно, является координатной окрестностью и имеет координатное отображение φ_i на открытую клетку V_i. Если $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ — координаты точки клетки V_i, рассматриваемые как гладкие функции на множестве U_i, то функции[1]) $y_j^{(i)} = x_j^{(i)} \cdot f_i$ являются гладкими

---

[1]) Если быть педантичными, то следовало бы сказать: $y_j^{(i)} = x_j^{(i)} \cdot f_i$ в U_i и $y_j^{(i)} = 0$ на $M \diagdown U_i$ (ведь $x_j^{(i)}$ не определены вне U_i, так что выражение $x_j^{(i)} \cdot f_i$ вне U_i, строго говоря, тоже не имеет смысла). Но подобного педантизма никогда не проявляют.

Следующее замечание чуть-чуть существеннее. Коль скоро мы хотим, чтобы функция $y_j^{(i)} = x_j^{(i)} \cdot f_i$ была гладкой функцией на всем M, недостаточно, чтобы функция $x_j^{(i)}$ была гладкой на U_i, а f_i была гладкой на всем M и тождественно равнялась нулю вне U_i. Для гладкости (даже для непрерывности) $y_j^{(i)}$ в точках границы $\mathrm{Fr}\, U_i$ нужно, чтобы $x_j^{(i)}$, так сказать, «хорошо себя вела» возле $\mathrm{Fr}\, U_i$. Проще всего потребовать, чтобы $x_j^{(i)}$ была гладкой функцией не только в U_i, но и в чуть бóльшем открытом мнофункциями на всем многообразии M. Рассмотрим теперь набор функций

$$(9)\qquad f_1,\ y_1^{(1)},\ y_2^{(1)},\ \ldots,\ y_n^{(1)},\ f_2,\ y_1^{(2)},\ y_2^{(2)},\ \ldots,\ y_n^{(2)},\ f_3,\ \ldots \\ \ldots,\ f_m,\ y_1^{(m)},\ \ldots,\ y_n^{(m)}.$$

Мы проверим, что это множество функций разделяет точки M.

Возьмем две точки p и q на M. Если, например, p попадает в U_i, а q — нет, то функция f_i равна нулю в точке q и отлична от нуля в точке p. Поэтому функция f_i разделяет точки p и q. Предположим теперь, что точки p и q попали в одно множество U_i. Если $f_i(p) \neq f_i(q)$, то функция f_i разделяет точки p и q. Если же $f_i(p) = f_i(q)$, то, поскольку одна из локальных координат $x_j^{(i)}$ обязательно разделяет p и q, соответствующая ей функция $y_j^{(i)} = f_i \cdot x_j^{(i)}$ тоже разделит эти точки.

Следуя плану, приведенному в начале этого раздела, мы должны были бы теперь использовать функции (9) для того, чтобы построить отображение многообразия M в евклидово пространство. Однако при этом может оказаться, что ранг полученного отображения не будет равен n во всех точках. Чтобы обеспечить выполнение этого условия (и сделать возможным применение теоремы 3.2), необходимо добавить к набору (9) новые функции. Для этого обозначим через $z_j^{(i)}$ функцию, равную $x_j^{(i)} \cdot f_i^2$ на U_i и нулю вне U_i.

жестве $U_i' \supset \overline{U}_i$. А чтобы обеспечить выполнение этого требования, немного уточним выбор U_i. Для каждой точки $p \in M$ имеется окрестность U_p, замыкание которой лежит внутри некоторой координатной окрестности, а в терминах соответствующих координат φ отвечает некоторому шару евклидова пространства с центром в $\varphi(p)$. Так как M компактно, из покрытия $\{U_p\}$ можно выбрать конечное подпокрытие $U_1, \ldots, U_m$. Каждое $\overline{U}_i$ лежит в некоторой координатной окрестности U_i', и соответствующие координаты $x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ являются гладкими функциями в последней, чего мы и добивались. Подобные уточнения тоже часто подразумеваются, но в явном виде не высказываются. — *Прим. ред.*

Таким образом, $z_j^{(i)} = y_j^{(i)} \cdot f_i$. Рассмотрим набор, полученный добавлением к набору (9) функций $z_j^{(i)}$ (всего, таким образом, будет $2mn + n$ функций). Обозначим эти функции через $F_1, \ldots, F_N$, $N = 2mn + n$, и рассмотрим отображение $F\colon M \to E$, переводящее точку p в точку $(F_1(p), F_2(p), \ldots, F_N(p))$. Так как набор F_i включает в себя функции (9), разделяющие точки многообразия M, то отображение F будет взаимно однозначным. Теперь проверим, что оно имеет ранг n в каждой точке. Для этого покажем, что в каждой точке множества U_i хотя бы один из якобианов

$$\left| \frac{\partial\left(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}\right)}{\partial\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right)} \right|, \quad \left| \frac{\partial\left(z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, \ldots, z_n^{(i)}\right)}{\partial\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right)} \right|$$

отличен от нуля.

Вспоминая, что каждая функция f_i задается на множестве U_i явной формулой $f_i = \exp(r_i^2 - 1)^{-1}$, где $r_i^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j^{(i)})^2$, можно путем непосредственных вычислений показать[1]), что первый якобиан обращается в нуль только тогда, когда $r_i^4 - 4r_i^2 + 1 = 0$, а второй — только в случае, когда $r_i^4 - 6r_i^2 + 1 = 0$. Ясно, что ни в одной точке оба эти уравнения одновремен-

---

[1]) Используя, что для производной $f'(t)$ функции $f(t) = \exp\left(\frac{1}{t-1}\right)$ выполняется равенство $f'(t) = -\frac{1}{(t-1)^2} f(t)$, легко найти, что интересующие нас якобианы равны

$$f_i^n \det\left(\delta_j^k - \frac{2x_j^{(i)}x_k^{(i)}}{\left(r_i^2-1\right)^2}\right), \quad f_i^{2n} \det\left(\delta_j^k - \frac{4x_j^{(i)}x_k^{(i)}}{\left(r_i^2-1\right)^2}\right),$$

где $\delta_j^k = 1$ при $j = k$ и $\delta_j^k = 0$ при $j \neq k$, а $\det(a_{jk})$, естественно, обозначает определитель матрицы n-го порядка с элементами a_{jk}. Далее надо использовать тот факт, что $f_i > 0$ в U_i и что, как нетрудно проверить,

$$\det\left(\delta_j^k - a_j a_k\right) = (-1)^n \left(1 - a_1^2 - \ldots - a_n^2\right).$$

— *Прим. ред.*

но быть справедливыми не могут. Поэтому отображение F имеет ранг n во всех точках U_i для каждого i, а значит, и всюду на M.

Теперь, применяя теорему 3.2, мы можем объединить все сказанное в этом разделе в виде следующей теоремы.

Теорема 3.3. *Если M — компактное гладкое многообразие, то существует вложение F: $M \to E$, где E — евклидово пространство, такое, что $F(M)$ является подмногообразием в E.*

3.4. Вложение многообразия с краем

Чтобы охватить случай многообразий с краем, нужно внести небольшие изменения в предыдущие определения и теоремы. Например, если N — многообразие с краем, то условие 2) определения 3.1 в том виде, как оно там сформулировано, относится только к внутренним точкам N. Если точка p принадлежит краю многообразия N, то соответствующее условие состоит в том, что она имеет координатную окрестность U в M с такой локальной системой координат φ: $U \to V$, что $\varphi(N \cap U)$ является подмножеством множества V, которое выделяется условиями $x_n \geqslant 0$, $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_m = 0$. Образ края многообразия N в U будет выделяться дополнительным условием $x_n = 0$.

Если оба многообразия M и N имеют края и мы хотим определить, что означает выражение «N — подмногообразие в M», то необходима дальнейшая корректировка, учитывающая возможные соотношения между краями.

Доказательство теоремы о вложении из предыдущего параграфа, проведенное с совсем небольшими изменениями, показывает, что если M — многообразие с краем, то существует вложение f: $M \to E$ в евклидово пространство E. Подробное доказательство этого следует провести в качестве упражнения.

Существует некоторое усиление теоремы о вложении многообразия с краем в евклидово пространство, которое нам понадобится в дальнейшем. Мы будем иметь дело с таким вложением, при котором край вкладывается в линейное подпространство. Сейчас мы построим такое вложение.

Пусть M — компактное многообразие с краем M_1, и пусть f: $M \to E$ — его вложение в N-мерное пространство. Пусть отображение f переводит точку $p \in M$ в точку $(F_1(p), F_2(p), \ldots, F_N(p))$. Предположим, что можно построить такую гладкую функцию F_{N+1} на M, которая положительна на $M \setminus M_1$ и равна нулю на M_1. Тогда отображение f', переводящее точку $p \in M$ в точку $(F_1(p), F_2(p), \ldots, F_N(p), F_{N+1}(p))$, является гладким отображением многообразия M в $N+1$-мерное евклидово пространство, которое взаимно однозначно отображает M на $f'(M)$, причем $f'(M)$ есть подмногообразие в E'. Кроме того, $f'(M)$ лежит в множестве точек, удовлетворяющих неравенству $x_{N+1} \geqslant 0$, образ края M_1 лежит в множестве $x_{N+1} = 0$, а образ множества $M \setminus M_1$ — в множестве $x_{N+1} > 0$.

Чтобы построить функцию F_{N+1}, построим сначала покрытие многообразия M окрестностями U_i, каждая из которых (так же, как в доказательстве теоремы 3.3) снабжена функцией f_i, положительной на U_i и равной нулю вне U_i. Пусть $U_1, U_2, \ldots, U_k$ — те координатные окрестности, для которых соответствующие локальные системы координат отображают их на полуклетки $V_1, V_2, \ldots, V_k$; иначе говоря, это окрестности, пересекающие край многообразия M. Если $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ — координаты на V_i, то для одной из них, скажем для $x_n^{(i)}$, выполняется неравенство $x_n^{(i)} \geqslant 0$ на образе окрестности U_i, а образ множества $M_1 \cap U_i$ выделяется уравнением $x_n^{(i)} = 0$. Функции $x_n^{(i)} \cdot f_i$ для каждого i являются гладкими функциями на M; отсюда функция $\sum_{i=1}^{k} x_n^{(i)} \cdot f_i$ есть гладкая функция на M. Так как все функции $x_n^{(i)} \cdot f_i$ неотрицательны, то $\sum_{i=1}^{k} x_n^{(i)} \cdot f_i$ равна нулю только когда все $x_n^{(i)} \cdot f_i$ равны нулю. Для точки из множества U_i это означает, что $x_n^{(i)}=0$, т. е. что точка лежит в M_1. Теперь положим

$$F_{N+1}=\sum_{i=1}^{k} x_n^{(i)}\cdot f_i+\sum_{i>k} f_i,$$

где вторая сумма берется по тем i, для которых окрестность U_i не пересекает M_i. Здесь опять все члены неотрицательны, и легко видеть, что функция F_{N+1} неотрицательна всюду на M и равна нулю только в точках множества M_1.

Теперь, действуя описанным выше способом, мы добавляем F_{N+1} к функциям, задающим вложение многообразия, и получаем следующую теорему:

Теорема 3.4. *Пусть M — гладкое компактное многообразие с краем M_1. Тогда существует такое гладкое вложение $f\colon M\to E_{N+1}$ многообразия M в $N+1$-мерное евклидово пространство, что $f(M)$ есть подмногообразие, лежащее в множестве всех элементов x, для которых $x_{N+1}\geqslant 0$, а $f(M_1)$ является пересечением $f(M)$ с множеством тех x, для которых $x_{N+1}=0$.*

Упражнения. 3.3. В предыдущих обозначениях проверьте, что $f(M_1)$ является подмногообразием в N-мерном евклидовом пространстве, определенном уравнением $x_{N+1}=0$.

3.4. Используя метод доказательства теоремы 3.4, покажите, что если M — гладкое многообразие, край которого является несвязным объединением $M_1\cup M_2$, то существует такое гладкое вложение $f\colon M\to E$ многообразия M в N-мерное евклидово пространство для некоторого N, что $f(M)$ есть подмногообразие, целиком заключенное между гиперплоскостями $x_N=0$ и $x_N=1$ и пересекающееся с этими гиперплоскостями по множествам $f(M_1)$ и $f(M_2)$ соответственно.

§ 4. КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

4.1. Касательные прямые

Если C — кривая в N-мерном евклидовом пространстве, заданная параметрическими уравнениями

$$x_1=f_1(t),\ x_2=f_2(t),\ \ldots,\ x_N=f_N(t),$$