означает, что $x_n^{(i)}=0$, т. е. что точка лежит в M_1. Теперь положим

$$F_{N+1}=\sum_{i=1}^{k} x_n^{(i)}\cdot f_i+\sum_{i>k} f_i,$$

где вторая сумма берется по тем i, для которых окрестность U_i не пересекает M_i. Здесь опять все члены неотрицательны, и легко видеть, что функция F_{N+1} неотрицательна всюду на M и равна нулю только в точках множества M_1.

Теперь, действуя описанным выше способом, мы добавляем F_{N+1} к функциям, задающим вложение многообразия, и получаем следующую теорему:

Теорема 3.4. *Пусть M — гладкое компактное многообразие с краем M_1. Тогда существует такое гладкое вложение $f\colon M\to E_{N+1}$ многообразия M в $N+1$-мерное евклидово пространство, что $f(M)$ есть подмногообразие, лежащее в множестве всех элементов x, для которых $x_{N+1}\geqslant 0$, а $f(M_1)$ является пересечением $f(M)$ с множеством тех x, для которых $x_{N+1}=0$.*

Упражнения. 3.3. В предыдущих обозначениях проверьте, что $f(M_1)$ является подмногообразием в N-мерном евклидовом пространстве, определенном уравнением $x_{N+1}=0$.

3.4. Используя метод доказательства теоремы 3.4, покажите, что если M — гладкое многообразие, край которого является несвязным объединением $M_1\cup M_2$, то существует такое гладкое вложение $f\colon M\to E$ многообразия M в N-мерное евклидово пространство для некоторого N, что $f(M)$ есть подмногообразие, целиком заключенное между гиперплоскостями $x_N=0$ и $x_N=1$ и пересекающееся с этими гиперплоскостями по множествам $f(M_1)$ и $f(M_2)$ соответственно.

§ 4. КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

4.1. Касательные прямые

Если C — кривая в N-мерном евклидовом пространстве, заданная параметрическими уравнениями

$$x_1=f_1(t),\ x_2=f_2(t),\ \ldots,\ x_N=f_N(t),$$

где f_i — гладкие функции, то касательная прямая к C в точке, соответствующей значению параметра t_0, задается уравнениями[1])

$$\frac{x_1 - f_1(t_0)}{f_1'(t_0)} = \frac{x_2 - f_2(t_0)}{f_2'(t_0)} = \ldots = \frac{x_N - f_N(t_0)}{f_N'(t_0)}.$$

Эти уравнения выражают геометрическую идею, согласно которой касательная является пределом секущих, соединяющих точки с параметрами t_1 и t_0, когда t_1 стремится к t_0.

Определение 4.1. Если M — гладкое многообразие, вложенное как подмногообразие в евклидово пространство E, а C — кривая, которая содержится в M и задана гладкими параметрическими уравнениями, то касательная прямая к C в точке p называется *касательной прямой к многообразию M в точке p.*

Пример 4.1. Пусть M — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в трехмерном пространстве. Плоскости, проходящие через ось z, высекают на M окружности. Касательные ко всем этим окружностям в точке $(0, 0, 1)$ по определению 4.1 являются касательными прямыми к M. Заметим, что все они лежат в плоскости $z = 1$. Мы сразу же обобщим это замечание.

Лемма 4.1. *Пусть M — гладкое многообразие размерности n, являющееся подмногообразием N-мерного евклидова пространства E, и пусть p — точка на M. Тогда все касательные прямые к многообразию M в точке p содержатся в некотором n-мерном линейном подпространстве T пространства E.*

Доказательство. Используя теорему 3.1, предположим, что координаты пространства E зану-

---

[1]) Разумеется, здесь предполагается, что хотя бы одна из производных $f_i'(t_0) \neq 0$. Когда говорят о гладкой параметризации, то помимо гладкости соответствующих функций подразумевается выполнение и этого свойства для всех t_0. — *Прим. ред.*

мерованы так, что в окрестности точки p многообразие M является множеством точек, удовлетворяющих уравнениям вида

$$(1)\qquad x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = n+1, \ldots, N,$$

где φ_i — гладкие функции. Если кривая C имеет гладкие параметрические уравнения $x_i = f_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ и содержится в M, то

$$(2)\qquad f_i(t) = \varphi_i(f_1(t), \ldots, f_n(t)), \qquad i = n+1, \ldots, N.$$

Предположим, что C проходит через точку p и что p соответствует значению параметра t_0. Тогда дифференцирование уравнений (2) дает

$$(3)\qquad f_i'(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_p f_j'(t_0), \qquad i = n+1, \ldots, N.$$

Но из этих уравнений следует, что каждая касательная прямая к M в точке p лежит в линейном пространстве T, заданном уравнениями

$$(4)\qquad x_i - f_i(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_p (x_j - f_j(t_0)),\ i = n+1, \ldots, N.$$

Из вида этих уравнений мы можем заключить, что пространство T не зависит от выбора кривой C и имеет размерность n, что и требовалось.

Определение 4.2. Линейное пространство T, описанное в лемме 4.1, называется *касательным пространством к многообразию M в точке p.*

Следующее определение вводится для удобства терминологии.

Определение 4.3. Если M — гладкое подмногообразие в N-мерном евклидовом пространстве E, а T — касательное пространство к M в точке p, то любая гиперплоскость (линейное подпространство размерности $N-1$) в пространстве E, содержащая T, называется *касательной гиперплоскостью к M в точке p.*

Заметим, что если M имеет размерность $N-1$, то T тоже имеет размерность $N-1$, и поэтому в точке p имеется единственная касательная гиперплоскость — само пространство T.

Упражнения. 4.1. Найдите касательное пространство к сфере $x^2+y^2+z^2=1$ в точке (x_0, y_0, z_0).

4.2. Пусть M — гладкое многообразие в евклидовом пространстве, и пусть T — касательное пространство к M в точке p. Пусть L — прямая, лежащая в T и проходящая через точку p. Постройте кривую C в M с гладкими параметрическими уравнениями, для которой L является касательной к C в точке p.

Заметим, что лемма 4.1 утверждает только, что пространство T содержит все касательные прямые к M, проходящие через точку p. Теперь же наше упражнение гарантирует, что все прямые в T, проходящие через точку p, являются касательными к многообразию M в точке p.

4.3. Пусть M — гладкое многообразие в евклидовом пространстве, и пусть V — подмногообразие в M. Докажите, что если T_M и T_V — касательные пространства в точке $p \in V$ к M и V соответственно, то $T_V \subset T_M$.

4.2. Критические точки

Здесь мы введем понятие, обобщающее понятие минимума и максимума функции. Если гладкая функция f одной переменной x имеет минимум или максимум[1]) в точке $x=x_0$, то $df/dx=0$ в этой точке. Аналогично если функция двух переменных $f(x,y)$ имеет максимум или минимум в точке (x_0, y_0), то $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$ в этой точке. Последнее означает, что касательная плоскость к поверхности $z=f(x,y)$ (графику функции f в трехмерном пространстве) в точке (x_0, y_0) горизонтальна. То же самое условие, очевидно, выполняется для седловой точки — точки p, около которой функция устроена так, что, приближаясь к этой точке по одному пути, мы будем иметь в p_0 максимум (по сравнению со значениями в других точках этого пути), а приближаясь по другому пути — минимум; см. рис. 4.1. Для функций многих переменных в аналогичной ситуации имеется гораздо большее разнообразие возможностей.

---

[1]) Оговоримся сразу же, что максимумы и минимумы обычно подразумеваются локальными. — *Прим. ред.*

Теперь заметим, что поверхность с уравнением $z = f(x, y)$ можно считать частью гладкого многообразия M, на котором (x, y) образуют локальную систему координат в окрестности точки $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$; тогда f будет гладкой функцией на M, частные производные которой по локальным координатам обращаются в нуль в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Кроме того,

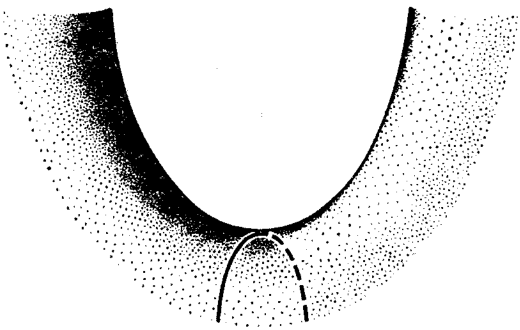

Рис. 4.1. Седловая точка.

геометрически наша ситуация соответствует вложению многообразия M в трехмерное пространство, при котором функция f отождествляется с одной из евклидовых координат, а именно с координатой z, причем горизонтальная плоскость $z = f(x_0, y_0)$ является касательной плоскостью к M в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Эти замечания подводят нас к более общей ситуации, которую мы сейчас и опишем.

Пусть M есть n-мерное гладкое многообразие, f — гладкая функция на M. Рассмотрим координатную окрестность U точки $p \in M$; пусть φ: $U \to V$ — соответствующая система локальных координат, отображающая U на открытую клетку V в n-мерном евклидовом пространстве. Значения первых частных производных функции $f\varphi^{-1}$ по координатам, имеющимся в V, в точке $\varphi(p)$ зависят, конечно, от выбора локальной системы координат и претерпевают линейное преобразование при замене этой системы. Однако если в данной системе координат все частные производные обращаются в нуль в точке $\varphi(p)$, то то же самое будет иметь место для любой другой системы координат.

Определение 4.4. Если в предыдущих обозначениях все частные производные функции $f\varphi^{-1}$ по координатам V обращаются в нуль в точке $\varphi(p)$, то мы будем называть p *критической точкой функции* f.

Только что сделанное замечание показывает, что определение 4.4 не зависит от выбора системы координат в окрестности точки p.

Упражнения. 4.4. Если M — плоскость, а f — гладкая функция на M, то все максимумы, минимумы и седловые точки этой функции являются критическими точками.

4.5. Если функция f — та же, что и вначале этого параграфа, но в качестве M теперь взят ее график — поверхность $z=f(x, y)$, — то все максимумы, минимумы и седловые точки на M являются критическими точками функции f, если рассматривать ее как функцию на этой поверхности.

Теперь мы дадим геометрическое описание критических точек с помощью касательных гиперплоскостей. Оно обобщает вводные замечания о поверхности в трехмерном пространстве, приведенные в начале этого раздела.

Пусть M — гладкое многообразие размерности n, а f — гладкая функция на M. По теореме 3.3 мы не теряем общности, считая, что M задано как подмногообразие в евклидовом пространстве E. Пусть размерность E равна $N-1$. Рассмотрим в N-мерном пространстве E' множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N)$, где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$ есть точка из M, а $x_N=f(x)$. Обозначая это множество через M', легко видеть (используя упражнения 3.1), что M' — гладкое подмногообразие пространства E', которое на самом деле диффеоморфно M: диффеоморфизм устанавливает отображение, переводящее точку $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ в точку $(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$. Мы добились того, что теперь у нас имеется гладкое подмногообразие M' в E', обладающее тем свойством, что заданная гладкая функция f отождествляется на нем с евклидовой координатой x_N.

Возьмем точку p' на M' с координатами $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_N^0)$, и пусть $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{N-1}^0)$ — соответствующая точка на M. Точка p имеет окрестность U в пространстве E, такую, что $M \cap U$ совпадает с множеством точек U, удовлетворяющих уравнениям, которые при подходящей нумерации координат принимают вид

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = n+1, \ldots, N-1, \tag{5}$$

где f_i — гладкие функции (см. теорему 3.1). Значит, в окрестности точки p' многообразие M' совпадает с множеством точек, удовлетворяющих уравнениям (5) и уравнению

$$x_N = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно использовать как локальные координаты на M или M' в окрестностях точек p или p' соответственно. Уравнения касательного пространства к M' в точке p' имеют вид

$$(6)\qquad \begin{aligned} x_i - x_i^0 &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_p (x_j - x_j^0), \quad i = n+1, \ldots, N-1, \\ x_N - x_N^0 &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_p (x_j - x_j^0). \end{aligned}$$

Если теперь p — критическая точка функции f на многообразии M, или, что то же самое, p' — критическая точка функции f на M', то последнее из уравнений (6) принимает вид

$$x_N = x_N^0 = f(p). \tag{7}$$

Таким образом, (7) является уравнением касательной гиперплоскости к многообразию M' в точке p'. Обратно, если (7) задает касательную гиперплоскость к M' в точке p', то все коэффициенты правой части последнего из уравнений (6) равны нулю, так что p' — критическая точка функции f.

Все сказанное можно объединить в лемму (в которой мы сохранили предыдущие обозначения, избавившись только от штрихов):

Лемма 4.2. *Если M — гладкое многообразие, а f — гладкая функция на нем, то M можно вложить как подмногообразие в N-мерное пространство так, чтобы значение функции f в каждой точке было равно координате x_N этой точки, и тогда точка p будет критической для f в том и только том случае, когда гиперплоскость $x_N = f(p)$ является касательной гиперплоскостью к M в точке p.*

Конечно, возможен случай, когда функция f сначала не задана. Нам может быть просто дано подмногообразие M в N-мерном евклидовом пространстве. Тогда, если взять в качестве функции f координату x_N, то утверждение леммы 4.2 будет по-прежнему справедливым: критические точки f — это точки, в которых существует касательная гиперплоскость вида $x_N = \text{const}$.

Пример 4.2. Пусть M — тор, вложенный как подмногообразие в трехмерное евклидово пространство способом, описанным в разд. 2.1. Из рис. 4.2 легко усмотреть, что имеется ровно четыре горизонтальных плоскости (т. е. плоскости вида $z = \text{const}$): H_1, H_2, H_3, H_4, которые являются касательными плоскостями к многообразию M в точках P_1, P_2, P_3, P_4 соответственно. Это соответствует тому факту, что функция z на торе M имеет четыре критических точки P_1, P_2, P_3, P_4.

Упражнение 4.6. Проверьте последнее утверждение (тот факт, что P_i являются критическими точками функции z), выразив z через локальные координаты в окрестностях этих точек.

Заметим, что в предыдущем примере критические точки функции z — это точки, в которых локальными координатами являются x и y, а z нельзя принять за одну из локальных координат ни в какой из этих точек. Но этого и следовало ожидать. Ведь для любой окрестности, в которой z является одной из локальных координат, $\partial z/\partial z = 1$, так что условие определения 4.4 критической точки выполнено быть не может.

С другой стороны, заметим, что P_1, P_2, P_3, P_4 — это единственные точки, в которых z нельзя принять за одну из локальных координат. Кроме того, если C — сечение тора горизонтальной плоскостью $z = c$, отличной от плоскостей H_1, H_2, H_3, H_4, то в окрестности любой из своих точек C является множеством

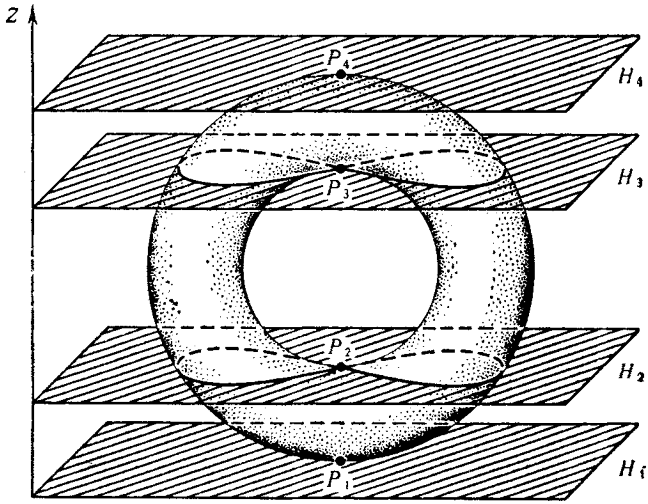

Рис. 4.2. Четыре критические точки функции z на торе.

точек, удовлетворяющих уравнению $z - c = 0$, в котором z, или $z - c$, — одна из локальных координат. Следовательно, C является подмногообразием тора.

Теперь мы сформулируем только что описанные свойства в общей ситуации — для произвольной гладкой функции на гладком многообразии.

Лемма 4.3. *Пусть M — гладкое многообразие размерности n, а f — гладкая функция на M. Пусть p — точка многообразия M, которая не является критической для функции f. Тогда существует такая локальная система координат φ: $U \to V$, где V — открытая*

n-мерная клетка с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что $f\varphi^{-1} = x_1$. Если же p — критическая точка функции f, то в ее окрестности локальной системы координат с указанным свойством не существует.

Доказательство. Предположим, что p не является критической точкой функции f. Пусть φ': $U' \to V'$ — локальная система координат в окрестности U' точки p. Обозначая через $y_1, y_2, \ldots, y_n$ координаты в V', запишем $f\varphi'^{-1} = g(y_1, \ldots, y_n)$. Тогда, поскольку p не является критической точкой функции f, одна из частных производных, скажем $\partial g/\partial y_1$, будет отлична от нуля в точке $\varphi'(p)$. Но в этом случае функции, определенные равенствами

$$x_1 = g(y_1, \ldots, y_n),$$
$$x_i = y_i, \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

имеют ненулевой якобиан относительно переменных $y_1, \ldots, y_n$ в точке $\varphi'(p)$. Отсюда следует (см. определение 2.7), что существует такая локальная система координат φ: $U \to V$, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты в V и $f\varphi^{-1} = x_1$, что и требовалось.

Обратно, если существует система координат с указанным свойством, то $\partial(f\varphi^{-1})/\partial x_1 = 1$ в точке $\varphi(p)$, и потому p не является критической точкой функции f.

Следствие. *Пусть в обозначениях леммы 4.3 M_c есть множество точек, в которых функция f принимает значение c. Если M_c не содержит критических точек функции f, то оно является подмногообразием в M. Его размерность равна* $\dim M - 1$.

Доказательство. Возьмем точку $p \in M_c$. Так как p не является критической точкой функции f, по лемме 4.3 можно найти такую локальную систему координат φ: $U \to V$ в окрестности точки p, что $f\varphi^{-1} = x_1$. Поэтому множество $\varphi(M_c \cap U)$ есть множество точек из V, удовлетворяющих уравнению $x_1 - c = 0$. А так как $x_1 - c$ можно принять за одну из координат в V, условие (2) определения 3.1 выполнено. Тем самым M_c является подмногообразием размерности $\dim M - 1$.

По аналогии с леммой 4.2 последний результат можно сформулировать в терминах вложения многообразия M в евклидово пространство. На этом языке он будет означать, что каждое сечение M гиперплоскостью $x_N = \text{const}$, не содержащее критических точек функции x_N, является подмногообразием размерности $\dim M - 1$ в M.

4.3. Невырожденные критические точки

Вернемся к примеру тора в трехмерном пространстве (пример 4.2). Если выразить функцию z в окрестности критической точки P_i на торе через координаты x и y, то это выражение будет иметь довольно специальный вид. Тор, который, как и ранее, заметается окружностью радиуса 1, лежащей на плоскости (x, y) и с центром в точке $(2, 0)$, при вращении этой плоскости вокруг оси y, задается в трехмерном пространстве уравнением

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16\,(x^2 + z^2).$$

Рассматривая это уравнение как квадратное относительно z^2, найдем из него z^2. Получим следующее выражение:

$$z^2 = 5 - x^2 - y^2 \pm 4\,(1 - y^2)^{1/2}. \tag{8}$$

Оно дает два значения для z^2 в зависимости от того, какой выбирается знак — плюс или минус. Для z, таким образом, получается четыре значения. Для небольших значений x и y они соответствуют локальным уравнениям тора M в окрестностях каждой из четырех точек P_i. Чтобы получить, например, локальное уравнение в окрестности точки P_3, возьмем в выражении (8) знак минус и разложим правую часть в степенной ряд.

Разложение имеет вид

$$z^2 = 1 + y^2 - x^2 + \frac{1}{2}y^4 + \dots .$$

Затем, извлекая положительный квадратный корень и разлагая в степенной ряд, получаем

$$z = 1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + \dots .$$

Здесь все последующие члены уже имеют степень, большую двух.

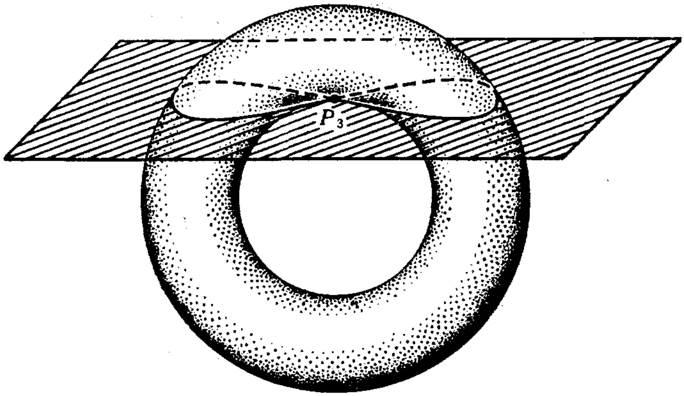

Рис. 4.3. Критический уровень функции z на торе. Первое приближение к функции z в точке P_3 равно $1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$.

Таким образом, первое приближение для уравнения многообразия M в окрестности точки P_3 получается отбрасыванием высших степеней переменных x и y. Оно имеет вид $z = 1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$. Сечение поверхности с таким уравнением плоскостью $z = 1$ представляет собой пару прямых $y = \pm x$ — это две касательные в центре восьмерки, которую высекает на этой плоскости тор. Важно заметить, что в первом приближении $z - 1$ записывается как квадратичная форма от x и y, которая невырожденна, т. е.

ее определитель не равен нулю. Этот определитель есть

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix},$$

где все производные берутся в точке P_3.

Проведенный разбор делает естественным следующее определение:

Определение 4.5. Пусть f — гладкая функция на n-мерном гладком многообразии M, и пусть p — критическая точка f. Пусть U — координатная окрестность точки p, а φ: $U \to V$ — локальная система координат. Введем $g = f\varphi^{-1}$ — функцию от координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в клетке V. Если определитель[1])

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i\, \partial x_j} \right|, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

отличен от нуля в точке $\varphi(p)$, мы будем называть критическую точку p *невырожденной*. Заметим, что в этом случае ранг матрицы $(\partial^2 g/\partial x_i \partial x_j)$ равен размерности многообразия M.

Упражнения. 4.7. Проверьте, что определение 4.5 не зависит от выбора системы локальных координат в окрестности точки p.

4.8. Докажите, что в примере 4.2 P_1, P_2, P_3, P_4 являются невырожденными критическими точками функции z на торе.

4.9. Возьмем тор M из примера 4.2 и рассмотрим y как функцию на M. Проверьте, что плоскости $y = \pm 1$ являются касательными плоскостями к M, причем каждая из них касается многообразия M вдоль целой окружности. Тем самым все точки этих двух окружностей будут критическими точками для функции y. Покажите, что все эти точки являются вырожденными (т. е. не являются невырожденными).

4.10. Можно заметить, что в упражнении 4.9 вырожденные критические точки не являются изолированными. Однако это вовсе не обязательно для вырожденных точек. Рассмотрим, например, функцию $x^3 + y^3$ на плоскости. Покажите, что $(0, 0)$ — изолированная критическая точка, которая, однако, является вырожденной.

---

[1]) Он называется *гессианом* функции g. — *Прим. ред.*

4.11. Пусть f — гладкая функция от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, равная нулю при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Заметим, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)\, dt.$$

Выведите отсюда, что $f = \sum x_i f_i$, где f_i — гладкие функции, для которых $f_i(0, 0, \ldots, 0)$ равно значению $\partial f/\partial x_i$ при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Покажите, что если, кроме того, все $\partial f/\partial x_i$ обращаются в нуль, когда все x_i равны нулю, то $f = \sum x_i x_j f_{ij}$, где f_{ij} — гладкие функции, причем $f_{ij}(0, 0, \ldots, 0)$ равно значению $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Это упражнение означает, что для гладкой функции на многообразии f с критической точкой p и для локальной системы координат $\varphi\colon U \to V$ в окрестности точки p, у которой $\varphi(p)$ есть точка $(0, 0, \ldots, 0)$, функция $g = f\varphi^{-1}$ является квадратичной формой от координат x_i в V с переменными коэффициентами, которые в точке $\varphi(p)$ совпадают с $\partial^2 g/\partial x_i \partial x_j$. Дело, очевидно, упрощалось бы, если бы можно было построить локальную систему координат, в которой функция f выражалась бы квадратичной формой с постоянными коэффициентами. Следующее упражнение показывает, что это можно сделать, если критическая точка невырожденна.

4.12. Так же, как и в упражнении 4.11, пусть f — гладкая функция от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем f и все $\partial f/\partial x_i$ равны нулю при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Пусть начало координат является невырожденной критической точкой. Запишем $f = \sum x_i x_j f_{ij}$. Покажите, что существует преобразование переменных

$$y_i = \sum h_{ij}(x)\, x_j,$$

где h_{ij} — гладкие функции и $\det(h_{ij}(0)) \neq 0$, приводящее f к виду

$$f = \sum c_i y_i^2$$

с коэффициентами c_i, равными либо 1, либо -1.

(Начните с приведения $\sum f_{ij} x_i x_j$ к диагональному виду точно так же, как это делают для квадратичной формы с постоянными коэффициентами. Для этого занумеруйте x_i так, чтобы $f_{11}(0) \neq 0$, и исключите члены вида $x_1 x_i$, полагая

$$y_1 = \sqrt{|f_{11}|}\left(x_1 + \frac{f_{12}}{f_{11}} x_2 + \ldots + \frac{f_{1n}}{f_{11}} x_n\right).$$

Затем надо продолжать по индукции. Проверьте, что коэффициенты получившегося преобразования $y_i = \sum h_{ij}(x)\, x_j$ удовлетворяют требуемым условиям.)

Следующая теорема непосредственно вытекает из результатов приведенных выше упражнений:

Теорема 4.1. *Пусть f — гладкая функция на гладком многообразии M, и пусть p — невырожденная критическая точка функции f на M. Тогда в окрестности точки p существует такая локальная система координат $\varphi\colon U \to V$, что функция $f\varphi^{-1}$ выражается через координаты в V в виде $\sum c_i y_i^2$ с c_i, равными 1 или —1. (Подразумевается, что $\varphi(p)$ имеет координаты $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$ и что $f(p) = 0$.)*

Доказательство. Возьмем произвольную систему локальных координат $\chi\colon U' \to V'$ в окрестности точки p и предположим, что координаты x_1, $x_2, \ldots, x_n$ в V' выбраны так, что $\chi(p)$ есть точка $(0, 0, \ldots, 0)$. Положим $f\chi^{-1} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и перейдем от переменных x_j к переменным y_i из упражнения 4.12. Якобианом функций y_i по переменным x_j будет определитель, значение которого в нуле совпадает с $\det(h_{ij}(0))$ и потому отлично от нуля. Отсюда, как мы видели при обсуждении определения 2.7, следует, что существует локальная система координат $\varphi\colon U \to V$, для которой y_i являются координатами в V, и тогда в ней $f\varphi^{-1} = \sum c_i y_i^2$; каждое c_i может быть равным 1 или —1.

Сигнатура формы $\sum c_i y_i^2$, появляющейся в теореме 4.1 (т. е. число положительных c_i минус число отрицательных c_i), является инвариантом относительно линейных преобразований переменных[1]). Отсюда следует, что он зависит только от функции f и

[1]) При переходе от одной локальной системы координат к другой квадратичная форма, коэффициенты которой — вторые производные в *критической* точке p, преобразуется так, как преобразуется квадратичная форма при линейном преобразовании переменных, матрица коэффициентов которого совпадает с матрицей Якоби замены координат в точке p. Поэтому инварианты этой формы не зависят от используемых локальных координат и могут быть связаны с самой p как с критической точкой функции f. (Это не зависит от невырожденности точки p и от теоремы 4.1.) — *Прим. ред.*

точки p. Но так как для невырожденной точки ранг квадратичной формы $\sum c_i y_i^2$ равен размерности многообразия M, число r отрицательных c_i тоже зависит только от точки p и функции f, но не от выбора системы координат.

Определение 4.6. Только что введенное число r, связанное с невырожденной критической точкой функции f, мы будем называть *индексом критической точки*[1]).

4.4. Усиление теоремы о вложении

В упражнениях 4.8 и 4.9 рассматривались две функции y и z на торе, причем одна имела вырожденные критические точки, а другая — невырожденные. Сейчас нам удобнее в упражнении 4.9 поменять местами оси y и z. Таким образом, мы вкладываем тор в трехмерное пространство двумя способами: как поверхность

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + z^2)$$

и как поверхность

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2).$$

В обоих случаях координата z является гладкой функцией на вложенном торе, причем в первом случае она имеет четыре невырожденные критические точки (рис. 4.2), тогда как во втором случае у нее имеется бесконечное множество вырожденных критических точек (рис. 4.4). Рассматривая невырожденные критические точки как более простые, мы будем считать, что первое вложение «лучше» второго.

---

[1]) Автор называет его *типовым числом*, но термин «индекс» употребляется чаще. Вообще, следует иметь в виду, что терминология здесь не вполне установилась. Так, индексом квадратичной формы иногда называют число отрицательных слагаемых при ее представлении в виде суммы квадратов, иногда сигнатуру, т. е. разность между числом положительных и числом отрицательных слагаемых, а иногда — меньшее из последних двух чисел. — *Прим. ред.*

На самом деле наличие вырожденных критических точек является, в известном смысле, исключением: небольшое вычисление показывает, что стоит лишь чуть-чуть повернуть поверхность, и функция z будет иметь четыре невырожденные критические точки.

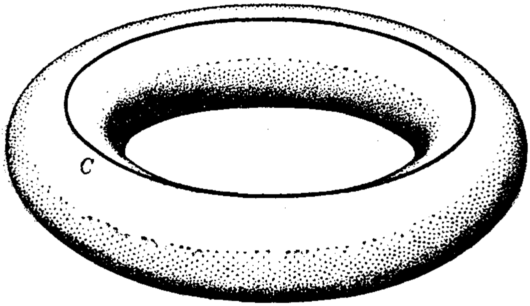

Рис. 4.4. На «горизонтально» вложенном торе имеются вырожденные критические точки функции z; они образуют две окружности, одна из которых (C) показана.

Рассмотренная ситуация является частным случаем следующей общей теоремы.

Теорема 4.2. *Пусть M — компактное гладкое многообразие, край которого является несвязным объединением $M_1 \cup M_2$. Тогда существует гладкое вложение f многообразия M в N-мерное евклидово пространство со следующими свойствами:*

(1) *$f(M)$ целиком лежит во множестве тех x, для которых $0 \leqslant x_N \leqslant 1$, а $f(M_1)$ и $f(M_2)$ — пересечения $f(M)$ с гиперплоскостями $x_N = 0$ и $x_N = 1$ соответственно.*

(2) *Функция x_N на $f(M)$ имеет лишь конечное число критических точек; все они невырожденны и лежат вне гиперплоскостей $x_N = 0$ и $x_N = 1$. Можно вдобавок добиться того, чтобы никаким двум точкам не соответствовало одно значение x_N.*

Условие (2) означает, в частности, что среди гиперплоскостей $x_N = c$ имеется лишь конечное число касательных к $f(M)$, причем каждая такая гиперплоскость соответствует в точности одной точке касания.

Конечно, можно сформулировать теорему и по-другому. Функцию x_N на $f(M)$ можно перенести посредством отображения f на многообразие M, получив там гладкую функцию φ. Таким образом, теорема утверждает, что на M можно найти гладкую функцию φ, которая равна нулю на M_1 и единице на M_2, удовлетворяет неравенству $0 < \varphi(p) < 1$ во всех точках p, не лежащих на крае, и имеет лишь конечное число критических точек; все эти точки невырожденны, соответствуют различным значениям φ и не лежат ни в M_1, ни в M_2.

Заметим, что если M — компактное гладкое многообразие без края, то справедливо аналогичное утверждение, отличающееся только тем, что ничего не говорится о крае.

Доказательство теоремы 4.2 довольно сложное, и мы не будем приводить его здесь. Однако данная здесь формулировка намекает на один из возможных подходов к доказательству. Вспомним, что, как мы уже видели, для данного многообразия M с краем $M_1 \cup M_2$ существует вложение в евклидово пространство, удовлетворяющее условию (1). Идея теперь состоит в том, чтобы подправить это вложение f так, чтобы и условие (2) тоже выполнялось.

В качестве первого шага следует показать, что отображение f можно приблизить отображением f', для которого $f'(M)$ является частью алгебраического многообразия, т. е. частью множества нулей конечного числа полиномиальных уравнений от координат $x_1, x_2, \ldots, x_N$ евклидова пространства. Заметим, что в приведенных выше примерах вложения тора в трехмерное пространство этот шаг уже пройден. Действительно, в каждом из случаев тор задавался как алгебраическая поверхность.

Второй шаг доказательства — показать, что можно подправить координаты в N-мерном пространстве так, чтобы координата x_N удовлетворяла условию (2) относительно $f'(M)$. Идея — рассмотреть функцию $\sum u_i x_i$, где u_i — вещественные числа. Оказывается, условие, состоящее в том, что эта функция должна иметь бесконечное число критических точек или вырожденные критические точки, налагает на u_i некоторые алгебраические уравнения. Поэтому выберем значения u_i, не удовлетворяющие этим уравнениям, и сделаем замену координат, после которой $\sum u_i x_i$ станет N-й координатой. Тогда условие (2) будет выполнено[1]).

§ 5. КРИТИЧЕСКИЕ И НЕКРИТИЧЕСКИЕ УРОВНИ

5.1. Определения и примеры

Предположим, что M — компактное гладкое многообразие с краем $M_0 \cup M_1$, которое вложено в евклидово пространство так, что оно целиком лежит между гиперплоскостями $x_N = 0$ и $x_N = 1$, а M_0 и M_1 суть пересечения M с этими гиперплоскостями. Сейчас мы подробно изучим связь между различными сечениями многообразия M гиперплоскостями $x_N = \text{const}$. Вместо этого можно было бы исследовать множества уровней гладкой на M функции, не обращаясь к евклидову пространству. Однако вложение в евклидово пространство автоматически дает понятие перпендикулярности, которое нам вскоре понадобится.

Определение 5.1. Если сечение M_c многообразия M гиперплоскостью $x_N = c$ содержит критическую точку функции x_N, то мы будем называть M_c *критическим уровнем функции* x_N. В противном случае будем называть его *некритическим уровнем функции* x_N.

---

[1]) Зато условие (1) нарушится, так что после этого придется еще раз «подправить» наше вложение. После того как читатель изучит Милнора, он сможет доказать теорему 4.2, пользуясь теоремой Сарда вместо алгебраической аппроксимации, которая является хотя и более элементарной (ни слова о мере!), но зато гораздо более громоздкой. — *Прим. ред.*