

условие, состоящее в том, что эта функция должна иметь бесконечное число критических точек или вырожденные критические точки, налагает на u_i некоторые алгебраические уравнения. Поэтому выберем значения u_i , не удовлетворяющие этим уравнениям, и сделаем замену координат, после которой $\sum u_i x_i$ станет N -й координатой. Тогда условие (2) будет выполнено¹⁾.

§ 5. КРИТИЧЕСКИЕ И НЕКРИТИЧЕСКИЕ УРОВНИ

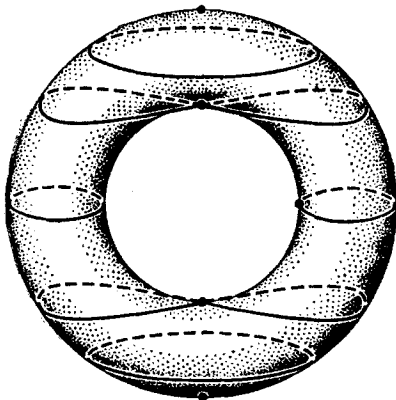
5.1. Определения и примеры

Предположим, что M — компактное гладкое многообразие с краем $M_0 \cup M_1$, которое вложено в евклидово пространство так, что оно целиком лежит между гиперплоскостями $x_N = 0$ и $x_N = 1$, а M_0 и M_1 суть пересечения M с этими гиперплоскостями. Сейчас мы подробно изучим связь между различными сечениями многообразия M гиперплоскостями $x_N = \text{const}$. Вместо этого можно было бы исследовать множества уровней гладкой на M функции, не обращаясь к евклидову пространству. Однако вложение в евклидово пространство автоматически дает понятие перпендикулярности, которое нам вскоре понадобится.

Определение 5.1. Если сечение M_c многообразия M гиперплоскостью $x_N = c$ содержит критическую точку функции x_N , то мы будем называть M_c *критическим уровнем функции x_N* . В противном случае будем называть его *некритическим уровнем функции x_N* .

¹⁾ Зато условие (1) нарушится, так что после этого придется еще раз «подправить» наше вложение. После того как читатель изучит Милнора, он сможет доказать теорему 4.2, пользуясь теоремой Сарда вместо алгебраической аппроксимации, которая является хотя и более элементарной (ни слова о мере!), но зато гораздо более громоздкой. — *Прим. ред.*

В частности, в примере 4.2 функция z на торе имеет четыре критических уровня, а именно сечения плоскостями H_1, H_2, H_3, H_4 . Заметим, что в этом примере каждый критический уровень M_c окружен соседними некритическими уровнями, причем соседние уровни, лежащие выше M_c , гомеоморфны друг другу так же, как и соседние уровни, лежащие ниже M_c . Например (рис. 5.1), между гиперплоскостями H_1 и H_2



Р и с. 5.1. Критические и некритические уровни функции z на торе.

все некритические уровни являются окружностями. С другой стороны, при прохождении критического уровня вид сечения изменяется. Некритические уровни, расположенные вблизи плоскости H_2 и ниже нее, отличаются от близких уровней, лежащих выше этой плоскости. Основная цель этого параграфа — показать, что только что сделанные замечания справедливы в общем случае, и точно выяснить, что происходит, когда мы совершаем переход с одной стороны критического уровня на другую.

Мы будем проводить это исследование с помощью семейства траекторий, ортогональных к сечениям M_c , т. е. семейства кривых на M , которые имеют гладкие параметрические уравнения и пересекают уровни M_c

под прямым углом (за исключением критических точек)¹⁾. Это понятие можно проиллюстрировать на следующем довольно простом примере.

Пусть M — двумерная сфера в трехмерном евклидовом пространстве. Функция z имеет две критические точки — северный и южный полюс. Некритические уровни функции z — это линии широты. Ортогональные траектории этих уровней являются меридианами. Представим себе, что точки одного некритического уровня скользят вдоль меридианов до тех пор, пока не достигнут другого некритического уровня. Тогда получится отображение одного уровня на другой. Кроме того, если M_c — некритический уровень, то его окрестность можно представить как объединение дуг меридианов; поэтому она имеет вид $M_c \times I$, где I — интервал.

Как выяснится, аналогичная ситуация имеет место в общем случае. Поэтому нам будет нужно изучить поведение ортогональных траекторий вблизи критических точек. Из приведенного примера уже сейчас видно, что для критических точек перестает быть верным тот факт, что через каждую точку проходит ровно одна траектория.

В первую очередь надо построить в общем случае семейство ортогональных траекторий. Мы сделаем это, установив систему дифференциальных уравнений для ортогональных траекторий и применив теорему о существовании и единственности из теории дифференциальных уравнений.

Итак, начнем с окрестности U в N -мерном евклидовом пространстве, в которой M является множеством точек, удовлетворяющих уравнениям вида

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x_N &= f_N(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

¹⁾ В критической точке не определено, какое направление ортогонально к M_c в этой точке — из рис. 5.1 видно, что критический уровень может не быть многообразием. — *Прим. ред.*

где f_i — гладкие функции. Из леммы 4.3 следует, что если $U \cap M$ не содержит ни одной критической точки функции x_N , то саму x_N можно принять за одну из локальных координат в открытом множестве $U \cap M$. Отсюда следует, что после подходящей перенумерации координат $U \cap M$ станет множеством точек, удовлетворяющих уравнениям

$$(1) \quad x_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_N), \\ i = n, n+1, \dots, N-1.$$

Тогда множество $U \cap M_c$, если оно непусто, будет задаваться уравнениями (1) и дополнительным уравнением $x_N = c$.

Пусть $p \in U \cap M$. Обозначим через $x_i(p)$ значение координаты x_i в точке p . Таким образом, для уровня M_c , проходящего через точку p , имеем $c = x_N(p)$. Пусть T_p — касательное пространство к многообразию M в точке p , а T'_p — касательное пространство к M_c в этой же точке. Тогда T_p и T'_p имеют размерности n и $n-1$ соответственно и $T'_p \subset T_p$ (упражнение 4.3). Так как p не является критической точкой функции x_N (множество U вообще не содержит критических точек), пространство T_p не лежит в гиперплоскости $x_N = c = x_N(p)$. С другой стороны, пространство T'_p , очевидно, лежит в этой гиперплоскости, и потому направление в T_p , ортогональное пространству T'_p , не попадает в гиперплоскость $x_N = c = x_N(p)$. Таким образом, кривая в M , проходящая через точку p и имеющая касательную, ортогональную пространству T'_p , должна была бы записываться параметрическими уравнениями вида

$$x_i = \varphi_i(x_N), \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

так что касательная к ней будет иметь направление с угловыми коэффициентами

$$(2) \quad (\varphi'_1(x_N), \varphi'_2(x_N), \dots, \varphi'_{N-1}(x_N), 1),$$

где у каждой производной надо взять значение в точке p .

Обратимся теперь к теореме из теории дифференциальных уравнений (см. [1]), утверждающей, что у системы дифференциальных уравнений типа той, которая только что у нас получилась и в которой dx_i/dx_N выражаются как гладкие функции, существуют решения $x_i = \varphi_i(x_N)$, $i = 1, \dots, N-1$; каждое решение дает параметрическое представление некоторой кривой на многообразии M . Из различных решений получается семейство F кривых. Это семейство обладает тем свойством, что через каждую не критическую точку на M проходит ровно одна кривая из F . Из построения нашей системы дифференциальных уравнений видно, что семейство F есть требуемое семейство ортогональных траекторий для уровней M_c . Та же теорема о дифференциальных уравнениях дает нам дополнительную информацию о том, как выглядят уравнения кривых из семейства F в окрестности точки на M , не содержащей критических точек функции x_N : эти уравнения можно записать в виде

$$(6) \quad x_i = \varphi_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, x_N),$$

где координата x_N берется в качестве параметра на кривой, $x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0$ — локальные координаты точки, в которой рассматриваемая кривая пересекает фиксированный уровень M_c , а функции φ_i являются гладкими по всем своим аргументам ¹⁾.

¹⁾ Строго говоря, одной ссылки на известные теоремы из теории дифференциальных уравнений здесь мало. Эти теоремы относятся к системам дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = G_i(x_1, \dots, x_N), \quad i = 1, \dots, N,$$

правые части которых определены в некоторой области евклидова пространства (x_1, \dots, x_N) . У нас же dx_i/dx_N выражаются как некоторые гладкие функции на $M \setminus \{\text{критические точки}\}$.

Воспользуемся локальными координатами на M ; пусть это будут, скажем, x_1, \dots, x_{n-1}, x_N . Тогда наши дифференциальные уравнения имеют вид

$$(*) \quad \frac{dx_i}{dx_N} = G_i(x_1, \dots, x_{n-1}, x_N), \quad i = 1, \dots, N-1,$$

Упражнения 5.2. Докажите, что уравнения (6) можно использовать для того, чтобы ввести новую систему локальных координат в окрестности некритической точки функции x_N , задавая точку ее параметром x_N на соответствующей кривой семейства F и координатами той точки, в которой эта кривая пересекает фиксированный уровень M_c .

Выведите отсюда, что если M_c — некритический уровень функции x_N , то у него есть окрестность в M , диффеоморфная произведению $M_c \times I$, где I — открытый интервал значений функции x_N . Докажите, что аналогичный результат будет справедлив для критического уровня, если исключить окрестность критической точки¹⁾.

5.3. Выведите из предыдущего упражнения, что если M_{c_1} и M_{c_2} — два последовательных критических уровня (т. е. таких, что все уровни M_c , у которых $c_1 < c < c_2$, — некритические), то часть многообразия M , заключенная между M_{c_1} и M_{c_2} , диффеоморфна произведению $M_c \times I$, где $c_1 < c < c_2$.

5.4. Выведите также из упражнения 5.2, что если между двумя некритическими уровнями нет ни одного критического, то эти уровни диффеоморфны.

где G_i — произвольные, а вполне определенные функции, которые однозначно определяются из сказанного на стр. 93, хотя мы и не получили для них явных выражений. Если из этих уравнений (*) оставить только первые $n-1$, то получится такая система, как в теории дифференциальных уравнений. Используя специфические свойства наших G_i , можно доказать, что если $x_1(x_N), \dots, x_{n-1}(x_N)$ — решение этой системы, то функции

$$x_j(x_N) = f_j(x_1(x_N), \dots, x_{n-1}(x_N), x_N), \quad j = n, \dots, N-1,$$

где f_j — те же, что в (1), будут удовлетворять остальным уравнениям (*). Мы приходим к такой ситуации: многообразие $M \setminus \{\text{критические точки}\}$ покрыто координатными окрестностями, в каждой из них через каждую точку проходит короткий кусок ортогональной траектории. Теперь из этих коротких кусков надо «склеить» «целые» ортогональные траектории. Это не сложно, но требует времени и места (и напоминает продолжение решения системы дифференциальных уравнений до границы области определения правых частей). При первом чтении, вероятно, лучше не вникать в эти детали, которые, собственно, и не относятся к дифференциальной топологии. Поэтому я ограничусь замечанием, что удобно пользоваться другой параметризацией ортогональных траекторий, при которой критические точки не выпадают из области определения наших дифференциальных уравнений, но являются положениями равновесия (соответствующие решения — константы). См. [22], начало § 3. — *Прим. ред.*

¹⁾ Точнее: если c — критический уровень, а U и V — две малые окрестности критической точки, причем $U \supset \bar{V}$, то $M_c \setminus U$ имеет окрестность, диффеоморфную $(M_c \setminus V) \times I$. — *Прим. ред.*

5.2. Окрестность критического уровня; разбор одного примера

В предыдущем разделе мы показали, что когда s возрастает от 0 до 1, сечение M_c не меняется до тех пор, пока мы остаемся между двумя критическими уровнями (дiffeоморфные многообразия считаются одинаковыми). Однако когда мы проходим критический уровень, M_c изменяется, и наш следующий шаг — изучить природу этого изменения.

Итак, пусть M_c — критический уровень функции x_N , и пусть P — критическая точка на M_c . Как уже отмечалось, ортогональные траектории из семейства F ведут себя в окрестности любой точки уровня M_c , отличной от P , по существу так же, как и в окрестности не критического уровня. Теперь очень важно изучить их поведение в окрестности точки P .

Мы начнем с анализа примера 4.2, в котором рассматривалась функция z на торе M , вложенном в трехмерное пространство; здесь мы уделим особое внимание изучению окрестности критической точки P_3 . Мы уже видели (в разделе 4.2), что первым приближением к тору в окрестности этой точки является поверхность с уравнением $z = 1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$. Это можно уточнить с помощью теоремы 4.1, эквивалентная формулировка которой для нашего случая выглядит так: существует диффеоморфизм φ , который окрестности точки P_3 на торе отображает на окрестности точки $(0, 0, 0)$ на поверхности $z = y^2 - x^2$ (множитель $1/2$ убирается подходящим изменением масштаба). Конечно, диффеоморфизм φ не обязан переводить ортогональные траектории горизонтальных сечений тора в ортогональные траектории горизонтальных сечений поверхности $z = y^2 - x^2$. С другой стороны, последние представляют собой более удобный объект для изучения, и хорошо бы свести все дело именно к ним; тогда мы будем иметь стандартное описание окрестности любой седловой точки. Чтобы сделать это, покажем, что ортогональные траектории F к горизонтальным сечениям тора можно подпра-

вить в окрестности точки P_3 таким образом, чтобы получилось новое семейство F' с аналогичными свойствами¹⁾, но уже такое, что отображение φ переводит его часть, лежащую в окрестности точки P_3 , в семейство F_0 траекторий, ортогональных к горизонтальным сечениям поверхности $z = y^2 - x^2$.

Мы используем совсем простой прием. Каждой точке p на торе, которая близка к P_3 , но не равна ей, соответствуют два направления: одно из них — касательная к кривой семейства F , проходящей через точку p , а другое — касательная к кривой семейства $\varphi^{-1}(F_0)$, проходящей через p . Обозначим эти направления через $(l_1, l_2, 1)$ и $(\lambda_1, \lambda_2, 1)$ соответственно. Со поставим точке p направление

$$(7) \quad (g\lambda_1 + (1-g)l_1, g\lambda_2 + (1-g)l_2, 1),$$

где g — гладкая функция на торе, равная нулю вне окрестности точки P_3 и единице внутри некоторой меньшей окрестности. Построим новое семейство кривых F' , касательных к этому направлению. Заметим, что по мере приближения к точке P_3 направление (7) постепенно изменяется от $(l_1, l_2, 1)$ до $(\lambda_1, \lambda_2, 1)$. Поэтому семейство F' будет совпадать с F вне окрестности точки P_3 , а в меньшей окрестности оно будет совпадать с семейством $\varphi^{-1}(F_0)$.

Как уже отмечалось раньше, это означает, что можно исследовать окрестность H_3 на торе, используя

¹⁾ Новые кривые уже не будут ортогональны к сечениям тора горизонтальными плоскостями, но, во всяком случае, не будут их касаться и даже не будут образовывать с ними малых углов; фактически легко добиться, чтобы не было углов, меньших, скажем, 89° . (Это следует из того, что в достаточно малой окрестности точки P_3 рассматриваемые ниже направления $(l_1, l_2, 1)$ и $(\lambda_1, \lambda_2, 1)$ будут сколь угодно близки друг к другу. Действительно, пусть p — близкая к P_3 точка тора с координатами (x, y, z) , и пусть $p' = (x, y, y^2 - x^2)$. Направление $(\lambda_1, \lambda_2, 1)$ в точке p — это направление кривой $\varphi^{-1}(C)$, где C — кривая из семейства F_0 , проходящая через точку $\varphi(p)$. Чем ближе p к P_3 , тем слабее изменяет φ углы и направления, поэтому рассматриваемое направление близко к направлению кривой C в точке $\varphi(p)$, а оно близко к направлению в точке p' проходящей через нее кривой семейства F_0 ; наконец, последнее направление близко к направлению $(l_1, l_2, 1)$ в точке p). — *Прим. ред.*

подправленное семейство (почти) ортогональных траекторий F' , а отсюда следует, что окрестность точки P_3 можно изучать, рассматривая поверхность $z = y^2 - x^2$ в окрестности начала координат и используя кривые семейства F_0 на этой поверхности.

5.3. Окрестность критического уровня; общее обсуждение

Теперь мы реализуем в общем случае идеи, проиллюстрированные в предыдущем разделе на двумерном примере. Точнее, мы сравним окрестность невырожденной критической точки функции на данном многообразии с некоторой окрестностью стандартной критической точки (в примере она соответствует началу координат на поверхности $z = y^2 - x^2$).

Итак, пусть M — гладкое многообразие размерности n , f — гладкая функция на M , а p — невырожденная критическая точка функции f . Прибавляя подходящую константу, мы можем считать, что $f(p) = 0$. Используем теорему 4.1 для того, чтобы ввести в окрестности U точки p локальную систему координат $\psi: U \rightarrow V$, в которой

$$(8) \quad f\psi^{-1} = \sum_{i=1}^n c_i y_i^2,$$

где y_i — евклидовы координаты в V , а каждое c_i равно ± 1 . Все y_i равны нулю в точке $\psi(p)$.

Наряду с этим рассмотрим в евклидовом пространстве размерности $n+1$ с координатами $(y_1, y_2, \dots, y_n, z)$ гиперповерхность Q , заданную уравнением

$$(9) \quad z = \sum c_i y_i^2.$$

Множество V можно отождествить с окрестностью начала координат на гиперплоскости $z = 0$. Пусть V' — окрестность на Q , которая проектируется на V . Определим отображение $\varphi: U \rightarrow V'$, переводя точку q в точку с координатами $(y_1, y_2, \dots, y_n, z)$, где (y_1, y_2, \dots, y_n) — координаты точки $\psi(q)$, а z опре-

деляется из равенства (9). Теперь заметим, что значение функции $f\varphi^{-1}$ в точке $(y_1, y_2, \dots, y_n, z)$ на Q то же, что и у функции $f\psi^{-1}$ в точке (y_1, y_2, \dots, y_n) , а именно $\sum c_i y_i^2$, и поэтому, согласно формуле (9), оно совпадает со значением координаты z в этой точке.

Таким образом, $\varphi: U \rightarrow V'$ является отображением на открытое множество в Q , для которого $f\varphi^{-1}$ есть функция z . Отсюда, в частности, следует, что подмножества вида $f = \text{const}$ в U переходят в сечения гиперповерхности Q гиперплоскостями $z = \text{const}$.

Предположим теперь, что многообразие M вложено в N -мерное евклидово пространство так, что функция f на M совпадает с x_N (см. лемму 4.2), и построим, так же как в разд. 5.1, семейство F ортогональных траекторий к сечениям многообразия M гиперплоскостями $x_N = \text{const}$. Сейчас мы «подправим» семейство F в окрестности точки p по аналогии с тем, как мы делали это в разд. 5.2.

Итак, пусть F_0 — семейство траекторий на гиперповерхности второго порядка, ортогональных к сечениям гиперплоскостями $z = c$. Семейство F_0 определено во всех точках, кроме начала координат. Тогда, обозначив через $\varphi^{-1}(F_0)$ прообраз этого семейства в U , мы получаем, что через каждую точку $q \in U$, отличную от p , проходит две кривых — одна из семейства F , другая из $\varphi^{-1}(F_0)$. Запишем направления касательных к этим прямым в виде векторов

$$(10) \quad (l_1(q), l_2(q), \dots, l_{N-1}(q), 1),$$

$$(11) \quad (\lambda_1(q), \lambda_2(q), \dots, \lambda_{N-1}(q), 1)$$

соответственно. Заметим, что последнюю координату действительно можно сделать равной 1, так как ни одно из этих направлений не горизонтально.

Далее, пусть U_1 — другая окрестность точки p , такая, что $\bar{U}_1 \subset U$. Для простоты лучше взять в качестве U_1 клетку. Найдем гладкую функцию g на M , которая равна 1 на \bar{U}_1 и нулю вне U (см. упражнение 2.14). Теперь сопоставим каждой точке $q \in U$

направление, заданное вектором

$$(12) \quad (g(q)\lambda_1(q) + (1 - g(q))l_1(q), \dots, g(q)\lambda_{N-1}(q) + (1 - g(q))l_{N-1}(q), 1).$$

Заметим, что это сопоставление можно продолжить на все многообразие M , беря для каждой точки вне U вектор $(l_1, l_2, \dots, l_{N-1}, 1)$. Наконец, чтобы найти семейство кривых, касательные к которым в каждой точке задаются формулой (12), надо решить систему дифференциальных уравнений

$$(13) \quad \left(\frac{dx_i}{dx_N} \right)_q = g(q)\lambda_i(q) + (1 - g(q))l_i(q), \\ i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Так как функции, стоящие в правой части этих уравнений, являются гладкими во всех точках многообразия M , кроме критических точек функции x_N , мы можем применить цитированную выше теорему о существовании (см. [1]), которая показывает, что на многообразии M , из которого исключены критические точки функции x_N , существует семейство гладких кривых F' с соответствующими направлениями; через каждую точку проходит ровно одна кривая. Но вектор (12) совпадает с (11) в окрестности U_1 и с (10) вне окрестности U ; отсюда следует, что семейство F' совпадает с $\varphi^{-1}(F_0)$ в U_1 и с F вне U , что и требовалось.

5.4. Окрестность критической точки

Как мы уже объясняли, в первую очередь надо исследовать частный случай окрестности начала координат на гиперповерхности (9). Тогда мы сможем перенести информацию на многообразие M при помощи отображения φ^{-1} , определенного в предыдущем разделе. Большая часть рассуждений, необходимых для получения основного результата этого раздела, будет дана в виде серии упражнений.

Упражнения 5.5. Пусть H — гиперповерхность, заданная уравнением $z = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в $(n + 1)$ -мерном евкли-

довом пространстве. Докажите, что ортогональные траектории на H для сечений гиперплоскостями $z = \text{const}$ проектируются на ортогональные траектории семейства подногообразий $f = \text{const}$ в n -мерном пространстве $z = 0$. (Нужно заметить, что касательные пространства к горизонтальным сечениям гиперповерхности H проектируются в касательные пространства к множествам $f = \text{const}$ и что прямые, ортогональные первым, проектируются в прямые, ортогональные вторым.)

5.6. Работая теперь в n -мерном пространстве с координатами y_1, y_2, \dots, y_n , рассмотрим семейство гиперповерхностей $f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \text{const}$. Покажите, что ортогональные траектории этого семейства удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$(14) \quad \frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \dots = \frac{dy_n}{f_n},$$

где $f_i = \partial f / \partial y_i$. Выведите отсюда, что для семейства гиперповерхностей

$$(15) \quad y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \dots - y_n^2 = \text{const}$$

ортогональные траектории определяются уравнениями

$$(16) \quad \begin{aligned} y_2' y_1 &= y_1' y_2, \dots, y_r' y_1 = y_1' y_r, \\ y_{r+2}' y_{r+1} &= y_{r+1}' y_{r+2}, \dots, y_n' y_{r+1} = y_{r+1}' y_n, \\ y_1 y_{r+1} &= y_1' y_{r+1}' \end{aligned}$$

где y_1', y_2', \dots, y_n' — константы. Именно эти уравнения определяют ортогональную траекторию, проходящую через точку $(y_1', y_2', \dots, y_n')$.

Покажите, что через каждую точку $(y_1', y_2', \dots, y_n')$, отличную от $(0, 0, \dots, 0)$, проходит ровно одна кривая семейства (16). Далее, покажите, что гиперповерхность из семейства (15), проходящая через начало координат, представляет собой $(n-1)$ -мерный конус с вершиной в начале координат; поэтому бесполезно надеяться на выполнение условия ортогональности в этой точке.

5.7. Заметим, что все уравнения (16), кроме последнего, линейны; на самом деле они линейно независимы, если оба числа y_1' и y_{r+1}' отличны от нуля. Таким образом, в случае $y_1' \neq 0$, $y_{r+1}' \neq 0$ уравнения (16) определяют гиперболу. Но условие на y_1' и y_{r+1}' зависит от произвола в нумерации координат y_i . Преобразуя уравнения ортогональных траекторий, покажите, что если одно из y_1', y_2', \dots, y_r' отлично от нуля и одно из y_{r+1}' ,

y'_{r+2}, \dots, y'_n отлично от нуля, то траектория, проходящая через точку $(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$, представляет собой гиперболу.

5.8. В дополнение к предыдущему упражнению покажите, что если у одной из траекторий $y'_i = 0$ в какой-нибудь точке, то $y_i = 0$ вдоль всей траектории. (Выведите это непосредственно из дифференциальных уравнений.) Используйте это для доказательства того, что траектория, проходящая через точку, у которой $y'_1 = y'_2 = \dots = y'_r = 0$, является лучом, исходящим из начала координат. Получите такой же результат для траектории, проходящей через точку с $y'_{r+1} = y'_{r+2} = \dots = y'_n = 0$. Покажите, кроме того, что если мы будем рассматривать ортогональные траектории только для гиперповерхностей семейства (15) с $-1 \leq c \leq 1$, то множество траекторий, лежащих в линейном пространстве $y_1 = y_2 = \dots = y_r = 0$, образует $(n-r)$ -мерную клетку E^{n-r} , граница которой есть сфера S^{n-r-1} , высекаемая в этом пространстве гиперповерхностью (15) с $c = -1$, в то время как траектории, лежащие в пространстве $y_{r+1} = \dots = y_n = 0$, образуют r -мерную клетку E^r , граница которой является сферой S^{r-1} , высекаемой гиперповерхностью (15) с $c = 1$. Заметим, что клетки E^r и E^{n-r} имеют единственную общую точку — начало координат.

Прежде чем продолжать изучение общей ситуации, полезно разобрать более подробно пример с $n = 3$. Для удобства изменив обозначения, рассмотрим семейство поверхностей

$$x^2 - y^2 - z^2 = c,$$

где $-1 \leq c \leq 1$. Заметим, что если положить c равным -1 и 1 , то получатся соответственно однополостный и двуполостный гиперболоид, причем двуполостный гиперболоид окажется внутри однополостного (см. рис. 5.2).

Как мы уже показали выше, ортогональные траектории этого семейства поверхностей представляют собой дуги гипербол, за исключением прямолинейных отрезков, образующих две клетки E^1 и E^2 , описанные в упражнении 5.8. На рис. 5.2 границы этих клеток обозначены через S^0 и S^1 соответственно.

Рассмотрим теперь траектории, которые начинаются в окрестности множества S^0 и кончаются в окрестности множества S^1 . В данном случае окрестность множества S^0 представляет собой объединение

двух кругов, а окрестность множества S^1 — полосу, опоясывающую однополостный гиперболоид. Первую окрестность можно представить как $S^0 \times E^2$, а вторую — как $S^1 \times E^1$. Кроме того, интуитивно ясно, что если правильно подобрать размеры этих окрестностей, то множество тех ортогональных траекторий, которые начинаются в первой окрестности, совпадает с множеством тех, которые кончаются во второй, а

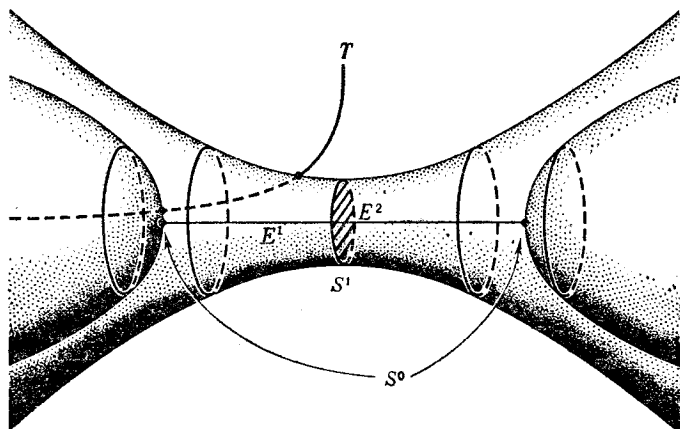


Рис. 5.2. Ортогональная траектория T , проходящая возле S^0 , проходит возле S^1 .

объединение всех этих траекторий, вместе с клетками E^1 и E^2 , образует трехмерную клетку E^3 . Граница этой клетки является сферой и разлагается в объединение трех множеств, как это показано на рис. 5.3. Первые два множества — это $S^0 \times E^2$ и $S^1 \times E^1$ (окрестности множеств S^0 и S^1 на двух гиперболоидах), а третье состоит из ортогональных траекторий, соединяющих точки на границах окрестностей $S^0 \times E^2$ и $E^1 \times S^1$ (каждая из этих границ является произведением $S^0 \times S^1$). Таким образом, третье множество представляется как $(S^0 \times S^1) \times I$, где I — интервал.

Цель следующей серии упражнений — обобщить только что разобранный частный случай.

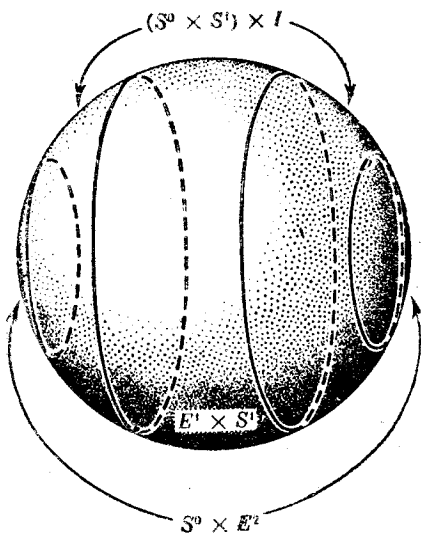
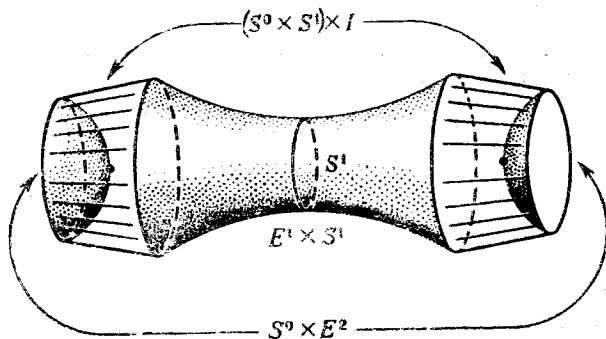


Рис. 5.3. S^2 разлагается на 3 множества; обозначения те же, что и на рис. 5.2.

Упражнения 5.9. Пусть S^{n-1} — сфера, заданная уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

в n -мерном пространстве. Пусть S^{r-1} есть $(r-1)$ -мерная сфера, лежащая на S^{n-1} и заданная уравнениями

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2 = 1,$$

$$x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = x_n = 0,$$

а S^{n-r-1} есть $(n-r-1)$ -мерная сфера на S^{n-1} с уравнениями

$$x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0,$$

$$x_{r+1}^2 + x_{r+2}^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

Проверьте, что любую точку p на S^{r-1} можно соединить с любой точкой q на S^{n-r-1} единственной дугой большого круга, составляющей четвертую часть окружности. Другими словами, лучи, направленные из центра сферы S^{n-1} к точкам p и q , образуют угол $\pi/2$. Покажите, кроме того, что две такие дуги pq и $p'q'$ не имеют общих точек, если $p \neq p'$ и $q \neq q'$; если же либо $p = p'$, либо $q = q'$, то общими будут лишь концевые точки.

5.10. Фиксируем точку p на S^{r-1} и для каждой точки q на S^{n-r-1} обозначим через q_1 середину той дуги pq большого круга, о которой говорилось в упражнении 5.9. Покажите, что если точка p фиксирована, а q пробегает всю сферу S^{n-r-1} , то объединение дуг pq_1 образует $(n-r)$ -мерную клетку. Выведите отсюда, что множество точек сферы S^{n-1} , удаленных от S^{r-1} на угловое расстояние $\leq \pi/4$, представляется в виде $S^{r-1} \times E^{n-r}$, где E^{n-r} есть $(n-r)$ -мерная клетка.

5.11. Выведите из предыдущего упражнения, что S^{n-1} можно представить как объединение множеств $S^{r-1} \times E^{n-r}$ и $E^r \times S^{n-r-1}$. Заметим, что эти множества имеют в S^{n-1} общую границу, а именно $S^{r-1} \times S^{n-r-1}$. Все это можно выразить по-другому, сказав, что сфера S^{n-1} является объединением пространств $S^{r-1} \times E^{n-r}$ и $E^r \times S^{n-r-1}$, в котором каждая точка (p, q) из $S^{r-1} \times S^{n-r-1} = S^{r-1} \times (\text{граница } E^{n-r})$ отождествляется с точкой (p, q) из $S^{r-1} \times S^{n-r-1} = (\text{граница } E^r) \times S^{n-r-1}$.

5.12. У предыдущего упражнения имеется другой вариант. На этот раз надо показать, что сфера S^{n-1} разлагается в объединение трех множеств A, B, C , где A является множеством точек, удаленных на угловое расстояние $\leq \pi/6$ от S^{r-1} , и представляется в виде $S^{r-1} \times E^{n-r}$, B является множеством точек, удаленных на угловое расстояние $\leq \pi/6$ от S^{n-r-1} , и представляется в виде $E^r \times S^{n-r-1}$, а C есть множество точек, удаленных на угловое расстояние $\geq \pi/6$ от S^{r-1} и на расстояние $\geq \pi/6$ от S^{n-r-1} ; оно представляется в виде $S^{r-1} \times S^{n-r-1} \times I$, где I — интервал (например, интервал $(0; 1)$). В этом разложении точка $(p, q) \in A$ с $q \in S^{n-r-1}$ = граница E^{n-r} отождествляется с точкой $(p, q, 1)$ в C , а точка $(p, q) \in B$ с $p \in S^{r-1}$ = граница E^r отождествляется с точкой $(p, q, 0)$ в C .

Отметим, что такое разложение сферы S^{n-1} соответствует описанному выше разложению сферы S^2 (рис. 5.3); однако S^2 в том примере появлялась не как поверхность единичного шара, а как множество, связанное с семейством поверхностей второго порядка. Сейчас мы воспроизведем эту ситуацию в общем случае.

5.13. Рассмотрим в n -мерном пространстве семейство гиперповерхностей второго порядка

$$(17) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_n^2 = c,$$

где $-1 \leq c \leq 1$.

Заметим, что сферы S^{r-1} и S^{n-r-1} из упражнения 5.9 лежат на гиперповерхностях этого семейства с параметрами $c = 1$ и $c = -1$ соответственно. Проверьте, что луч, направленный из начала координат в любую точку на каждой из сфер S^{r-1} , S^{n-r-1} , образует угол $\geq \pi/4$ с любой прямой на конусе

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_n^2 = 0.$$

Отсюда следует, что множества A и B из упражнения 5.12 гомеоморфно проектируются из начала координат на некоторые куски гиперповерхностей (17) с параметрами $c = 1$ и $c = -1$ соответственно. Обозначим это проектирование через π . Пусть p и q — две точки на границах множеств A и B соответственно, соединенные одной из тех дуг большого круга, объединение которых дает множество C . Обозначив эту дугу через α , проверьте, что точки $\pi(p)$ и $\pi(q)$ лежат на одной гиперболической дуге β , которая является одной из ортогональных траекторий семейства (17), и что α проектируется из начала координат в дугу β .

Таким образом, существует гомеоморфный образ сферы относительно проектирования π , который является объединением трех множеств $\pi(A)$, $\pi(B)$, $\pi(C)$, причем $\pi(A)$ и $\pi(B)$ лежат на двух гиперповерхностях семейства (17) с параметрами $c = 1$ и $c = -1$ соответственно, а $\pi(C)$ есть объединение дуг ортогональных траекторий семейства (17).

5.14. Выведите из двух последних упражнений, что на n -мерной клетке E^n (с границей $\pi(S^{n-1})$) существует такая гладкая функция f , что $f = 0$ на $\pi(A)$, $f = 1$ на $\pi(B)$ и $f = t$ на подмножестве $\pi(S^{r-1} \times S^{n-r-1} \times \{t\})$ из $\pi(C) = \pi(S^{r-1} \times S^{n-r-1} \times I)$.

5.5. Окрестность критического уровня; итоги

Все результаты, необходимые для описания окрестности критического уровня гладкой функции, к настоящему моменту уже получены, и в этом разделе мы просто соберем их вместе.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть M — гладкое многообразие размерности n , f — гладкая функция на M , и пусть

в обозначениях определения 5.1 M_c — критический уровень функции f , на котором лежит одна невырожденная критическая точка P . Пусть M_a и M_b — некритические уровни функции f , причем $a < c < b$ и M_c — единственный критический уровень между a и b . Тогда точка P имеет окрестность E^n в M , которая является n -мерной клеткой и граница S^{n-1} которой есть объединение трех множеств A, B, C ¹⁾. Множество A лежит на уровне M_a и диффеоморфно произведению $S^{r-1} \times E^{n-r}$ (для некоторого r); B лежит на уровне M_b и диффеоморфно $E^r \times S^{n-r-1}$; наконец, C заключено между уровнями M_a и M_b и может быть представлено как $S^{r-1} \times S^{n-r-1} \times I$. При этом каждая точка $(p, q) \in A$, где $p \in S^{r-1}$ и $q \in S^{n-r-1}$ = граница E^{n-r} , отождествляется с точкой $(p, q, 0)$ на C , а каждая точка (p, q) на B , где $p \in S^{r-1}$ = граница E_r и $q \in S^{n-r-1}$, отождествляется с точкой $(p, q, 1)$ на C .

Кроме того, если мы выкинем клетку E^n из части M , заключенной между M_a и M_b , то оставшееся множество можно представить в виде $(M_a \setminus A) \times I$, где $(M_a \setminus A) \times \{0\}$ отождествляется с $M_a \setminus A$, а $(M_a \setminus A) \times \{1\}$ — с $(M_a \setminus B)$.

Доказательство. Из упражнения 5.4 следует, что достаточно доказать теорему 5.1 для значений a и b , близких к c ; насколько близких — это мы выясним в ходе доказательства.

Начнем с того, что возьмем окрестность U точки P , такую, как в разд. 5.3, и построим «подправленное» семейство F' (почти) ортогональных траекторий для многообразий уровня функции f . Вспомним, что в меньшей окрестности U' точки P эти траектории совпадают с траекториями семейства $\varphi^{-1}(F_0)$, где φ — отображение, определенное в разд. 5.3, а F_0 — семейство ортогональных траекторий, построенное для горизонтальных сечений гиперповерхности в $(n+1)$ -мерном пространстве, заданной уравнением

$$z = \sum c_i y_i^2,$$

1) S^{n-1} — не гладкое многообразие, хотя A, B, C гладкие: см. рис. 5.2. — Прим. ред.

в котором все c_i равны ± 1 . Согласно упражнению 5.5, при проектировании на пространство $z = 0$ семейство F_0 переходит в ортогональные траектории семейства

$$\sum c_i y_i^2 = c.$$

Изменяя, если это необходимо, масштаб координат y_i , мы можем считать, что клетка E^n из упражнения 5.14 лежит в образе окрестности U' при отображении ϕ . Обозначим через E^n прообраз этой клетки в M . Это и есть искомая клетка, существование которой утверждает теорема 5.1, если только некритические уровни M_a и M_b подобраны так, чтобы их части, лежащие в U' , попадали при отображении ϕ на гиперповерхности семейства (18) с параметрами $c = -1$ и $c = 1$ соответственно.

Действительно, перенося на M свойства, описанные в упражнении 5.13, мы видим, что граница клетки E^n удовлетворяет всем требованиям нашей теоремы.

Чтобы проверить, что часть многообразия M , заключенная между M_a и M_b , после исключения клетки E^n допускает представление в виде $(M_a \setminus A) \times I$, нужно воспользоваться дугами семейства F' , которые начинаются в $M_a \setminus A$ (и согласно предыдущему, кончаются в $M_b \setminus B$). Это завершает доказательство теоремы.

Дальнейшую информацию для более точного описания можно извлечь из упражнения 5.9; из результата этого упражнения следует, что существуют сфера S^{r-1} на M_a и сфера S^{n-r-1} на M_b , такие, что все кривые семейства F' , выходящие из $M_a \setminus S^{r-1}$, приходят в $M_b \setminus S^{n-r-1}$ (и наоборот), в то время как кривые семейства F' , проходящие через S^{r-1} или S^{n-r-1} , все оканчиваются в точке P . Таким образом, M содержит две клетки E^r и E^{n-r} , края которых лежат на M_a и M_b соответственно и которые пересекаются в единственной точке — точке P .

Наконец отметим, что S^{r-1} имеет в M_a окрестность вида $S^{r-1} \times E^{n-r}$, а S^{n-r-1} — окрестность в M_b вида $S^{n-r-1} \times E^r$.

§ 6. СФЕРИЧЕСКИЕ ПЕРЕСТРОЙКИ

6.1. Введение

В этом параграфе мы рассмотрим изложенный в предыдущем параграфе материал с другой точки зрения. Отправным пунктом предыдущего параграфа было компактное гладкое многообразие M с краем $M_0 \cup M_1$. На M была задана гладкая функция f , или, что равносильно, было задано вложение многообразия M в евклидово пространство, и мы изучали окрестности критических и некритических уровней. Здесь же мы сконцентрируем наше внимание на том, как меняются многообразия уровней функции f , начиная с M_0 и кончая M_1 .

В разделе 5.1 мы видели, что если c в своем изменении не проходит критического уровня, то многообразие M_c топологически не меняется. Поэтому, переходя от M_c к M_1 при помощи семейства уровней функции f , мы совершаем лишь конечное число операций, каждая из которых соответствует данному критическому уровню. Одна такая операция преобразует уровень M_a , лежащий непосредственно под критическим, в уровень M_b , расположенный непосредственно над этим критическим. Всякий раз она состоит в том, что мы выкидываем окрестность сферы, лежащей в M_a (окрестность A в обозначениях теоремы 5.1) и заменяем ее окрестностью сферы другой размерности (окрестностью B в тех же обозначениях). Исследование таких операций является основной целью настоящей главы.

6.2. Прямое вложение

Мы введем определения, которые, как уже отмечалось, полностью основываются на результатах, сформулированных в теореме 5.1; однако нам придется изменить обозначения. Рассматриваемое здесь многообразие M соответствует некритическому уровню функции f в теореме 5.1.

Итак, пусть M есть n -мерное гладкое многообразие, и пусть N — подмногообразие размерности r . Возьмем точку p на N и выберем локальную систему координат в окрестности этой точки, удовлетворяю-