§ 6. СФЕРИЧЕСКИЕ ПЕРЕСТРОЙКИ

6.1. Введение

В этом параграфе мы рассмотрим изложенный в предыдущем параграфе материал с другой точки зрения. Отправным пунктом предыдущего параграфа было компактное гладкое многообразие M с краем $M_0 \cup M_1$. На M была задана гладкая функция f, или, что равносильно, было задано вложение многообразия M в евклидово пространство, и мы изучали окрестности критических и некритических уровней. Здесь же мы сконцентрируем наше внимание на том, как меняются многообразия уровней функции f, начиная с M_0 и кончая M_1.

В разделе 5.1 мы видели, что если c в своем изменении не проходит критического уровня, то многообразие M_c топологически не меняется. Поэтому, переходя от M_c к M_1 при помощи семейства уровней функции f, мы совершаем лишь конечное число операций, каждая из которых соответствует данному критическому уровню. Одна такая операция преобразует уровень M_a, лежащий непосредственно под критическим, в уровень M_b, расположенный непосредственно над этим критическим. Всякий раз она состоит в том, что мы выкидываем окрестность сферы, лежащей в M_a (окрестность A в обозначениях теоремы 5.1) и заменяем ее окрестностью сферы другой размерности (окрестностью B в тех же обозначениях). Исследование таких операций является основной целью настоящей главы.

6.2. Прямое вложение

Мы введем определения, которые, как уже отмечалось, полностью основываются на результатах, сформулированных в теореме 5.1; однако нам придется изменить обозначения. Рассматриваемое здесь многообразие M соответствует некритическому уровню функции f в теореме 5.1.

Итак, пусть M есть n-мерное гладкое многообразие, и пусть N — подмногообразие размерности r. Возьмем точку p на N и выберем локальную систему координат в окрестности этой точки, удовлетворяющую условиям определения 3.1. Предположим, что соответствующая координатная окрестность U (точнее, ее образ в евклидовом пространстве) определена неравенствами $|x_i| \leqslant \delta$ $(i=1, 2, \ldots, n)$; тогда U можно считать топологическим произведением $V \times F$, где $V = U \cap N$ — окрестность точки p в N, а F — окрестность начала координат в $(n-r)$-мерном евклидовом пространстве с координатами $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots$ $\ldots, x_n$, задаваемая неравенствами $|x_i| \leqslant \delta$, $i = r+1, \ldots, n$.

Множества вида $\{q\} \times F \subset V \times F$ представляют собой $(n-r)$-мерные клетки, каждая из которых пересекает многообразие N ровно в одной точке. Поэтому можно представлять себе U как объединение слоев, каждый из которых является $(n-r)$-мерной клеткой и пересекает многообразие N в одной точке. Объединение координатных окрестностей только что описанного типа мы будем называть трубчатой окрестностью подмногообразия N в M [1]). Можно показать (однако здесь нам это не понадобится), что трубчатую окрестность в целом можно представить как объединение $(n-r)$-мерных клеток, каждая из которых пересекает подмногообразие N в одной точке; другими словами, можно добиться того, чтобы слои в пересекающихся координатных окрестностях совпадали на пересечениях. Здесь нам особенно важен один случай — тот, в котором трубчатая окрестность N диффеоморфна произведению $N \times F$, где F есть $(n-r)$-мерная клетка.

Определение 6.1. При выполнении этого условия мы будем говорить, что многообразие N *прямо вложено* в M [2]).

---

[1]) Это довольно небрежная формулировка; точная формулировка имеется в [17], стр. 105. Она сводится к некоторому уточнению того, о чем говорит Уоллес в следующей фразе.— *Прим. ред.*

[2]) Кроме данной книги, я нигде не встречал такой терминологии. Читатель, проработавший книгу Милнора, поймет, что интересующее нас свойство означает, что N допускает оснащение в M (см. § 7), а также что N имеет тривиальное (т. е. сводящееся к прямому произведению) нормальное расслоение (см. задачу 11). Так обычно и говорят, но ввиду элементарности книги Уоллеса он вынужден был изобрести название попроще. — *Прим. ред.*

Примеры. 6.1. Пусть N — окружность $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ в трехмерном евклидовом пространстве, а M — само трехмерное пространство. Окружность N, конечно, является подмногообразием в M. Пусть B — сплошной тор, средняя линия которого есть N (см. рис. 6.1). Пусть F — часть сечения тора B плоскостью $y = 0$, расположенная в полупространстве $x > 0$. Множество F представляет собой круг,

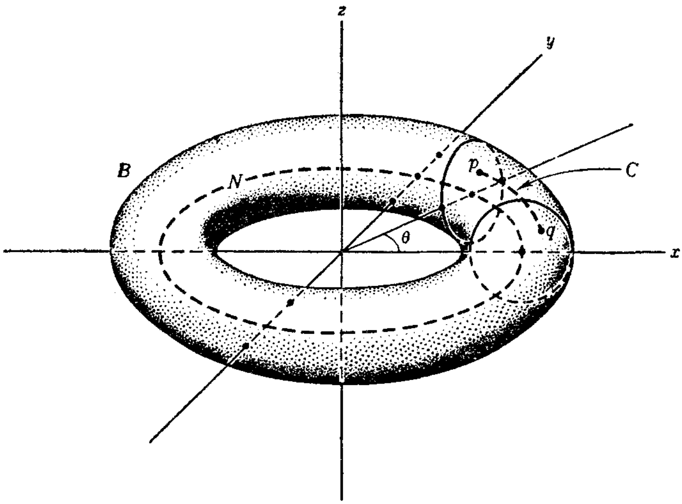

Рис. 6.1. Трубчатая окрестность окружности S^1 в E^3 как прямое произведение.

т. е. двумерную клетку. Теперь возьмем произвольную точку $p \in B$ и проведем плоскость через точку p и ось z. Эта плоскость образует некоторый угол θ с плоскостью (x, z). Его, конечно, можно принять за координату на N. Проведем через точку p окружность C, параллельную плоскости (x, y), и пусть $q \in F$ — точка, в которой C пересекает круг F. Нетрудно видеть, что так получается представление тора в виде произведения $N \times F$: точке p соответствует пара (θ, q). Следовательно, N прямо вложено в M.

6.2. Теперь мы приведем пример непрямо вложенного многообразия. Пусть M — проективная плоскость (пример 2.6). Мы видели, что это пространство можно представить как полусферу, у которой отождествляются противоположные точки края. В качестве N возьмем окружность, полученную склеиванием концов некоторой большой полуокружности на полусфере. Легко видеть, что N является подмногообразием в M.

Трубчатую окрестность B для N в M мы построим сначала на полусфере, где она будет полосой, средняя линия которой совпадает с N. Очевидно, B можно представить как объединение слоев, которые являются одномерными клетками и пересекают N: слоями являются дуги окружностей на полусфере, пересекающие N под прямым углом. Однако отождествление противоположных точек на границе означает, что для получения окрестности B мы перед склеиванием должны повернуть концы полосы друг относительно друга на полоборота. Поэтому B является листом Мёбиуса. Можно показать, что он не гомеоморфен произведению $N \times F$, где F — одномерная клетка. Поэтому вложение N в M не является прямым.

Последний пример иллюстрирует явление, которое заслуживает дальнейшего изучения и приводит к важному различию между двумя типами многообразий. Существование непрямого вложения (как в примере 6.2) означает, что когда мы, двигаясь вдоль окружности, возвращаемся в исходную точку, многообразие каким-то образом перекручивается. Так, окрестность окружности в примере 6.2 — это закрученная полоса. Такого закручивания не происходит, если каждая окружность на многообразии является прямо вложенной окружностью.

Определение 6.2. Пусть M — гладкое многообразие. Если каждая окружность, лежащая как подмногообразие в M, является прямо вложенным подмногообразием, то мы будем говорить, что многообразие M *ориентируемо*. В противном случае будем говорить, что M *неориентируемо*.

Это определение эквивалентно другим, чаще встречающимся в литературе[1]); однако оно больше подходит для наших целей, так как мы будем использовать понятие именно в таком виде.

Пример 6.3. Сфера ориентируема, а проективная плоскость — нет.

В параграфе 7 мы дадим полную классификацию двумерных компактных многообразий. А именно, каждое такое многообразие гомеоморфно либо сфере с некоторым числом p ручек, либо сфере с некоторым числом k дырок, в каждой из которых отождествлены диаметрально противоположные точки краев. Пример первого типа дает тор, для которого $p = 1$, а пример второго типа — проективная плоскость, для которой $k = 1$. Многообразия первого типа ориентируемы, а второго — неориентируемы. Второе

---

[1]) См. Милнор, стр. 211—212; эквивалентность явствует из сказанного в сноске на стр. 246.

Для дальнейшего полезно иметь представление также о связанной с этим понятием *ориентации*. Точное определение для общего случая см. у Милнора, стр. 211; мы ограничимся наглядным описанием для двух частных случаев — окружности и двумерного многообразия. Задать ориентацию на окружности — это значит принять одно из двух направлений обхода по ней за положительное. Задать ориентацию двумерного многообразия — это значит указать правило, которое для каждого маленького кружочка (лежащего на многообразии) устанавливает, какое направление вращения на ограничивающей его окружности считается положительным, причем требуется, чтобы при непрерывном перемещении кружочка по многообразию направление вращения не менялось.

Ориентируемое многообразие — это такое многообразие, на котором можно задать ориентацию. Если в непересекающихся окрестностях U_a и U_b двух разных точек a и b многообразия M мы задали какие-то ориентации, то в том случае, когда M ориентируемо, имеют смысл высказывания: «эти две ориентации совпадают», «эти две ориентации противоположны». Когда же M неориентируемо, эти высказывания не имеют смысла: если с целью сравнения ориентаций мы будем «передвигать» b к a, «тяня» вслед за b ее окрестность вместе с введенной там ориентацией, пока эта окрестность не пересечется с U_a (тогда ориентации можно будет сравнивать непосредственно), то результат будет зависеть от пути, по которому будет двигаться b. — *Прим. ред.*

утверждение доказать легко, так как дуга на сфере с k дырками, соединяющая диаметрально противоположные точки края одной из дырок, после отождествления превращается в непрямо вложенную окружность. Чтобы показать, что сфера с p ручками ориентируема, реализуем ее как поверхность в трехмерном пространстве (см. рисунки в параграфе 7), возьмем на ней окружность S, вложенную как подмногообразие, и рассмотрим трубчатую окрестность B этой окружности. Фиксируем на S какое-нибудь из двух направлений и выпустим из каждой точки S касательную прямую, отметив на ней это направление. Затем возьмем касательную к поверхности в точке p, которая перпендикулярна к S, и отметим на ней направление так, чтобы эта прямая вместе с направленной касательной и внешней нормалью к поверхности давала правостороннюю систему координат. Это определяет в каждой точке $p \in S$ положительное направление на перпендикуляре к S в B и тем самым превращает B в произведение $S \times I$.

Можно показать (но здесь мы этого делать не будем), что определение ориентируемости допускает формулировку в терминах локальных систем координат. Точнее, многообразие M ориентируемо тогда и только тогда, когда существует такое его покрытие координатными окрестностями, что для любых двух пересекающихся окрестностей якобиан соответствующего преобразования координат положителен.

Упражнение 6.1. Покажите, что шесть координатных окрестностей на S^2 в примере 2.6 удовлетворяют приведенному выше условию, если координаты в каждой из этих окрестностей брать в должном порядке.

6.3. Определение перестроек

Сейчас мы определим понятие сферической перестройки. Пусть M есть n-мерное гладкое многообразие, и предположим, что S^r — некоторая r-мерная сфера, которая является прямо вложенным подмногообразием в M. Для краткости мы будем называть ее прямо вложенной сферой. Таким образом, S^r

имеет в M окрестность B, диффеоморфную произведению $S^r \times E^{n-r}$, где E^{n-r} есть $(n-r)$-мерная клетка. Тогда граница B есть многообразие $S^r \times S^{n-r-1}$, поэтому, выкидывая из M внутренность B, мы получаем многообразие с краем, причем край является произведением $S^r \times S^{n-r-1}$. С другой стороны, $S^r \times \times S^{n-r-1}$ является также краем многообразия $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$. Значит, можно составить объединение $M \setminus \operatorname{Int} B$ и $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$, отождествив края, как объяснялось в разд. 2.7, причем это можно сделать так, чтобы в результате получилось гладкое многообразие M'.

Определение 6.3. Мы будем говорить, что M' получается из M *сферической перестройкой типа* r (r — это размерность сферы, окрестность которой удаляется из M) [1]).

Примеры. 6.4. Пусть M — двумерная сфера. Рассмотрим нульмерную сферу $S^0 \subset M$ (рис. 6.2). Она имеет окрестность, состоящую из двух непересекающихся кругов. Эту окрестность можно представить в виде $S^0 \times E^2$, так что вложение S^0 в M прямое. Обозначим ее через B. Тогда $M \setminus \operatorname{Int} B$ представляет собой сферу с двумя дырками. $E^1 \times S^1$ есть цилиндр, и если подклеить его края к окружностям, образованным краями дырок, то мы получим сферу с одной ручкой, то есть просто тор. Таким образом, тор получается из двумерной сферы сферической перестройкой типа 0.

6.5. Чтобы получить другой пример сферической перестройки, рассмотрим обратную операцию: пусть M — тор, а S^1 — окружность, изображенная на рис. 6.3. S^1 имеет окрестность в M вида $S^1 \times E^1$ — это опоясывающая тор полоса. После удаления внутренности этой полосы то, что осталось, имеет границу $S^1 \times S^0$. Такую же границу имеет пара непересекающихся кругов $E^2 \times S^0$, и если подклеить их по этой границе, то получится сфера M'. Таким образом,

---

[1]) Сферические рестройки называют также *перестройками Морса*. — *Прим. ред.*

сфера получается из тора сферической перестройкой типа 1.

Приведенные выше примеры перестраивания сферы в тор, а затем обратно в сферу иллюстрируют со-

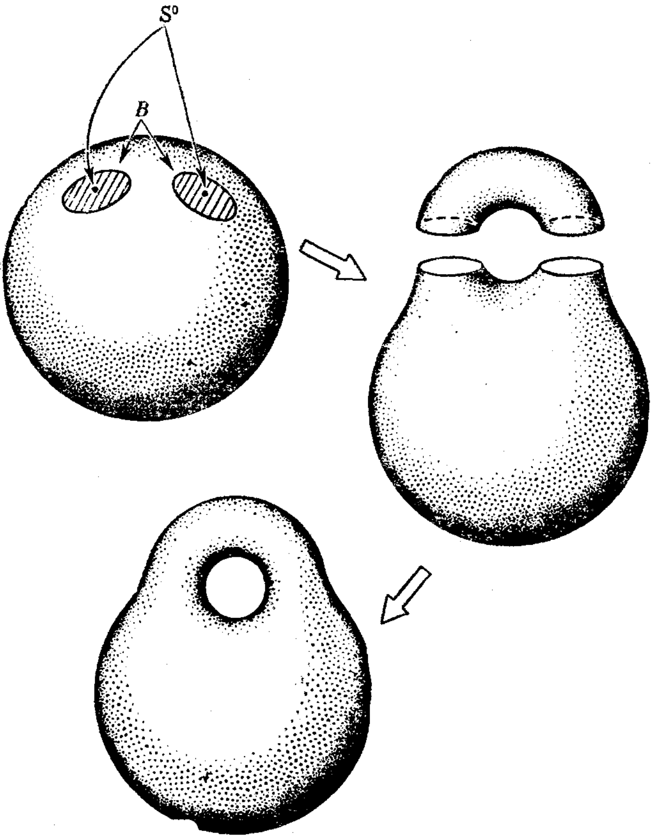

Рис. 6.2. Тор получается из сферы с помощью сферической перестройки.

вершенно общую ситуацию: если M' получается из M сферической перестройкой, то M тоже можно получить из M' сферической перестройкой. Действительно, предположим, что M' получится из M, если

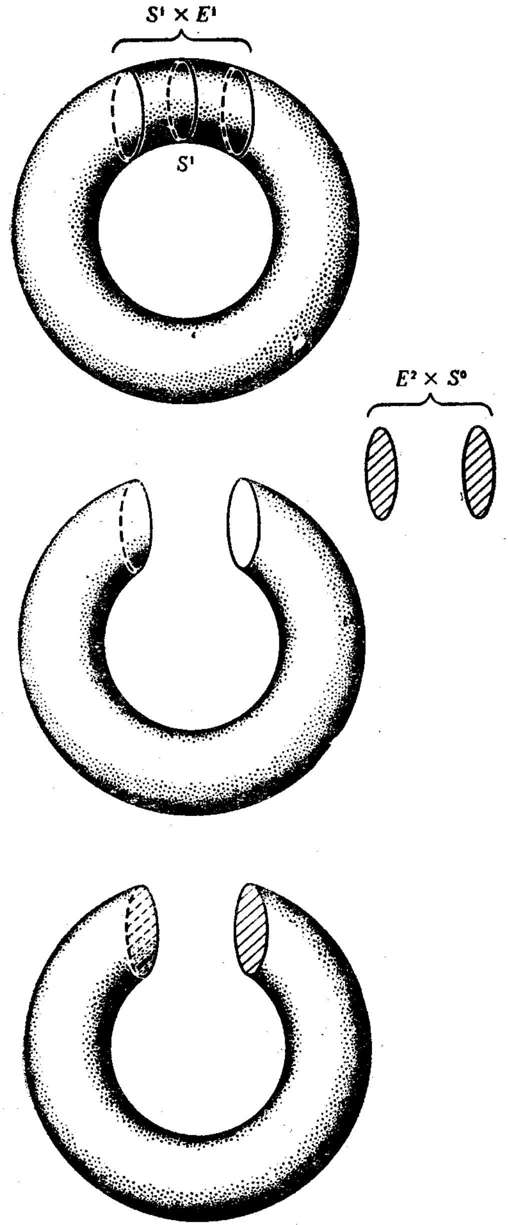

Рис. 6.3. Сфера (внизу) получается из тора (наверху) с помощью сферической перестройки. Сфера имеет вид изогнутого цилиндра, основания которого заклеены кругами.

удалить трубчатую окрестность $S^r \times E^{n-r}$ сферы S^r и заменить ее на $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$. В этом случае $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$ содержит сферу $\{p_0\} \times S^{n-r-1}$, где p_0 — какая-то внутренняя точка клетки E^{r+1}. Отсюда следует, что M' содержит сферу $\{p_0\} \times S^{n-r-1}$ и что эта сфера имеет в M' трубчатую окрестность $E^{r+1} \times \times S^{n-r-1}$; поэтому вложение этой сферы в M' прямое. Теперь для получения M из M' следует удалить трубчатую окрестность сферы $\{p_0\} \times S^{n-r-1}$ и заменить ее на $S^r \times E^{n-r}$. Эта сферическая перестройка имеет тип $n - r - 1$.

Пример 6.6. Общий тип примеров можно извлечь из теоремы 5.1: если W — гладкое многообразие, а f — гладкая функция на W и если M и M' — многообразия уровня функции f, отделенные друг от друга лишь одним критическим уровнем, на котором лежит лишь одна и притом невырожденная критическая точка, то M' получается из M сферической перестройкой.

6.4. Пленка, реализующая перестройку

Пример 6.6 показывает, как, имея функцию с одной критической точкой, получить сферическую перестройку. Теперь мы покажем, что таким способом можно получить любую сферическую перестройку. Идея состоит в том, чтобы из пары многообразий, связанных между собой сферической перестройкой, соорудить многообразие с краем и построить на нем функцию, для которой исходные многообразия будут многообразиями уровня, разделенными одним критическим уровнем. Как это сделать, подсказывает наше знакомство с тем, как должна была бы выглядеть окрестность критического уровня.

Следующий пример даст нам ключ к пониманию конструкции в общем случае.

Пример 6.7. В примере 6.4 мы видели, что тор M_1 получается из сферы M_0 перестройкой типа 0. Удаляемое из M_0 множество $\operatorname{Int} B_0$ состоит из двух непересекающихся открытых кругов, так что

$M_0 \setminus \mathrm{Int}\, B_0$ есть сфера с двумя отверстиями. Для наших целей удобнее представлять себе $M_0 \setminus \mathrm{Int}\, B_0$ как поверхность цилиндра, которая изогнута дугой, как

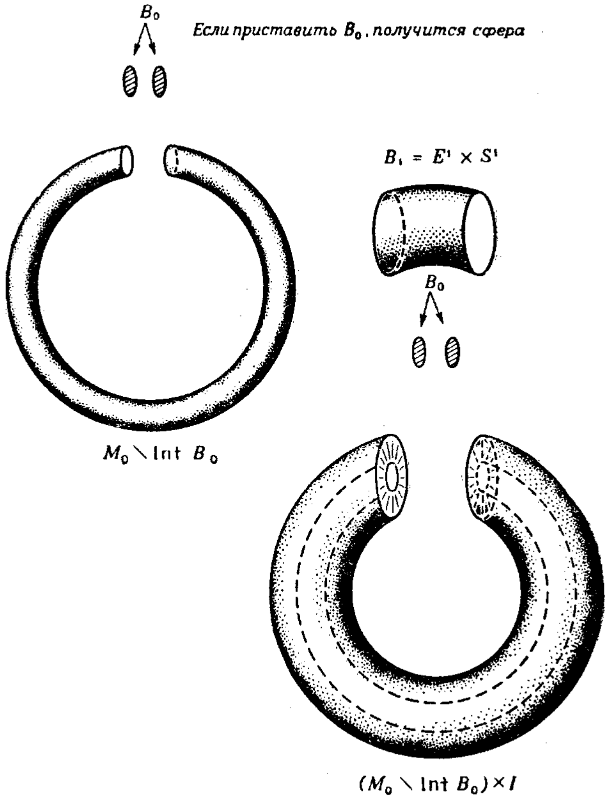

Рис. 6.4. При добавлении B_0 к внутренней поверхности изогнутого утолщенного цилиндра $(M_0 \setminus \mathrm{Int}\, B_0) \times I$ получается сфера; при добавлении B_1 к его внешней поверхности получается тор.

показано на рис. 6.4. Тогда $(M_0 \setminus \mathrm{Int}\, B_0) \times I$ будет утолщением поверхности цилиндра. Как показывает рис. 6.4, основания этого цилиндра составлены из радиальных отрезков, каждый из которых имеет вид

$\{p\} \times I$, где p лежит на границе множества $M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0$. Объединение оснований цилиндра можно, конечно, представить как $S^0 \times S^1 \times I$. Примем внутреннюю поверхность цилиндра, т. е. $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times \{0\}$, за $M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0$, а внешнюю, т. е. $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times \{1\}$, — за $M_1 \setminus \operatorname{Int} B_1$. Множество B_0 состоит из двух кругов, в то время как B_1 представляет собой цилиндр $S^1 \times E^1$. По-

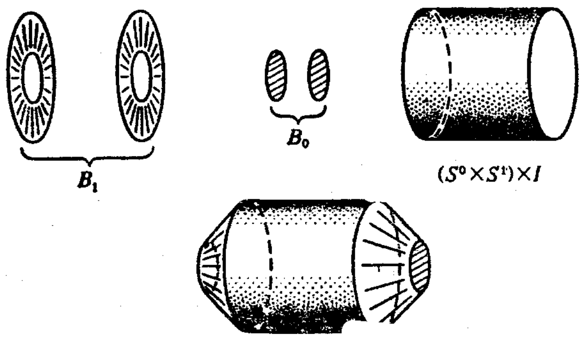

Рис. 6.5. Из множеств B_0, B_1 и $(S^0 \times S^1) \times I$ (наверху) составлена двумерная сфера (внизу); она является краем трехмерной клетки.

этому внутренняя поверхность цилиндра $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times \times I$ превращается в сферу, если возвратить на место B_0, а внешняя поверхность превращается в тор, если добавить к ней B_1.

Рассмотрим, с другой стороны, трехмерную клетку E^3 с границей S^2, которая разложена в объединение трех множеств $S^0 \times E^2$, $S^1 \times E^1$ и $S^0 \times S^1 \times I$; на самом деле это множества A, B и C из упражнения 5.12 (рис. 6.5). Заметим, что эти три множества можно отождествить соответственно с B_0, B_1 и основанием утолщенного цилиндра $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times I$. При этом радиальные отрезки на основаниях цилиндра взаимно однозначно отождествляются с дугами больших кругов, из которых составляется множество $(S^0 \times S^1) \times I$ на поверхности S^2. Поэтому, если отождествить множество $(S^0 \times S^1) \times I$ на поверхности клетки E^3 с соответствующим множеством на основаниях утолщенного цилиндра, то получится сплошное тело M, причем B_0 и B_1 автоматически попадут на нужное место, образовав внутреннюю границу M_0 и внешнюю границу M_1.

Из этого построения вытекает дальнейшая информация. В упражнении 5.14 мы видели, что на трехмерной клетке E^3 существует гладкая функция f со следующими свойствами. На границе S^2 клетки E^3 функция принимает такие значения: 0 на множестве $B_0 = S^0 \times E^2$, 1 на множестве B_1 и t на подмножестве $(S^0 \times S^1) \times \{t\}$ множества $S^0 \times S^1 \times I$. В остальных точках клетки E^3 функция f принимает значения между 0 и 1, а в центре клетки она имеет свою единственную критическую точку. Ясно, что теперь можно продолжить функцию f на все многообразие M, полагая $f = t$ в точках множества $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times \{t\}$ из $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times I$. Если $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times I$ и E^3 уже подогнаны друг к другу так, что получилось гладкое многообразие, то f будет гладкой функцией, которая равна 0 на M_0, 1 на M_1 и имеет в точности одну невырожденную критическую точку в центре клетку E^3.

Теперь, имея перед собой этот пример, мы можем провести соответствующее построение в общем случае. Пусть M_0 — гладкое многообразие размерности n, и пусть M_1 получается из M_0 сферической перестройкой типа r. Эта перестройка производится путем удаления из M_0 множества B_0, диффеоморфного трубчатой окрестности $S^r \times E^{n-r}$ прямо вложенной сферы S^r, и последующей замены этого множества множеством $B_1 = E^{r+1} \times S^{n-r-1}$. Чтобы построить M, мы начнем, следуя образцу предыдущего примера, с произведения $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times I$. Часть границы этого произведения имеет вид $(S^r \times S^{n-r-1}) \times I$. С другой стороны, границу S^n n-мерной клетки E^{n+1} можно представить как объединение $A \cup B \cup C$ (см. упражнение 5.12), в котором $A = S^r \times E^{n-r}$, $B = E^{r+1} \times S^{n-r-1}$, а $C = (S^r \times S^{n-r-1}) \times I$. Образуем теперь объединение $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times I$ и E^{n+1}, отождествляя подмножества $S^r \times S^{n-r-1} \times I$, которые встречаются в обоих слагаемых. Это автоматически возвратит на место $A = B_0$ в $M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0$, восстановив опять M_0, и вставит $B = B_1$ в $M_1 \setminus \operatorname{Int} B_1$, образовав M_1, так что мы получим многообразие M, край которого есть несвязное объединение[1]) M_0 и M_1.

Далее, мы построим на M функцию f так же, как в трехмерном примере. Возьмем функцию f на клетке E^{n+1}, полученную в упражнении 5.14. На сфере, ограничивающей клетку E^{n+1}, имеем: $f = 0$ на A, $f = 1$ на B, а на C функция f принимает значение t на множестве $S^r \times S^{n-r-1} \times \{t\}$. Кроме того, f имеет ровно одну невырожденную критическую точку в центре клетки E^{n+1}. Тогда эту функцию можно продолжить на все многообразие M, полагая ее равной t на множестве $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times \{t\}$ в $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times I$.

Если соединить $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times I$ и E^{n+1} надлежащим образом, то M будет гладким многообразием, а f — гладкой функцией. На множестве $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0) \times \times I$ значение функции f совпадает со значением параметра t интервала I, а этот параметр всегда можно принять за одну из локальных координат, так что по лемме 4.3 функция f не имеет критических точек в этом множестве. Другими словами, имеется лишь одна невырожденная критическая точка индекса $r+1$ в центре клетки E^{n+1}.

В итоге мы получаем следующий результат.

Теорема 6.1. *Пусть M_1 получается из M_0 сферической перестройкой типа r. Тогда существует гладкое многообразие M, край которого есть несвязное объединение M_0 и M_1, и гладкая функция f на M, которая равна нулю на M_0 и единице на M_1; в остальных точках она принимает значения между* 0 *и* 1 *и имеет ровно одну невырожденную критическую точку индекса $r+1$.*

Повторное применение этой теоремы дает следующий результат:

[1]) Прилагательное «несвязное» призвано подчеркнуть, что M_0 и M_1 не пересекаются; тогда объединение, действительно, не может быть связным. — *Прим. ред.*

Теорема 6.2. *Пусть* M_1 *получается из* M_0 *конечным числом сферических перестроек. Тогда существует гладкое многообразие* M, *край которого является несвязным объединением* $M_0 \cup M_1$, *и гладкая функция* f *на* M, *которая равна* 0 *на* M_0, 1 *на* M_1, *в остальных точках принимает значения между* 0 *и* 1 *и имеет критические точки, соответствующие всем произведенным перестройкам.*

Определение 6.4. Построенное в этой теореме многообразие мы будем называть *пленкой, реализующей последовательность сферических перестроек*, превращающих M_0 в M_1.

Для удобства терминологии мы введем еще одно определение. Пусть перестройка ϕ, превратившая M_0 в M_1, состояла в удалении окрестности сферы S^r в M_0. Тогда, рассматривая на пленке, реализующей ϕ, ортогональные траектории семейства уровней соответствующей функции f (в обозначениях теоремы 6.1), мы видим, что те траектории, которые начинаются в точках сферы S^r, все кончаются в критической точке функции f (см. упражнение 5.8). Таким образом, когда мы идем от M_0 к M_1 по семейству уровней функции f, сфера S^r стягивается по ортогональным траекториям в точку, а затем, когда мы, пройдя критический уровень, продолжаем двигаться дальше, появляется сфера S^{n-r-1}, которая раздувается из критической точки вдоль ортогональных траекторий, пока не достигнет уровня M_1. Поэтому удобно говорить, что перестройка ϕ *стягивает* сферу S^r и что при этой перестройке *возникает* сфера S^{n-r-1}.

6.5. Бордантные многообразия

Содержание теоремы 6.2 можно выразить и по-другому — в терминах отношения между многообразиями, известного под названием *бордантности* [1]).

[1]) В терминологии имеется некоторый разнобой, о чем говорится в прим. ред. на стр. 232. Сам Уоллес пользуется редко употребляющимся термином «соограничивающие многообразия». — *Прим. ред.*

Определение 6.5. Два гладких компактных многообразия (без края) M_0 и M_1 называются *бордантными*, если существует гладкое компактное многообразие M (*«пленка»*), край которого есть несвязное объединение $M'_0 \cup M'_1$ двух многообразий, диффеоморфных многообразиям M_0 и M_1 соответственно. В частном случае, когда одно из исходных многообразий, скажем M_1, пусто, второе многообразие M_0 называется *бордантным нулю*, или *ограничивающим*. (Последнее, таким образом, означает, что оно диффеоморфно краю некоторого компактного гладкого многообразия.)

Примеры. 6.8. Всякое компактное гладкое многообразие без края M_0 бордантно самому себе (за M можно взять $M_0 \times I$).

6.9. Сфера S^n — ограничивающее многообразие, так как она является границей шара E^{n+1}.

6.10. Сфера с p ручками M_0 является ограничивающим многообразием, так как это граница шара с p сплошными ручками.

Эти примеры могут показаться довольно тривиальными; однако нетривиальный пример придумать нелегко. Вообще признак, позволяющий для пары многообразий определить, бордантны они или нет, очень сложен, и мы не будем приводить его здесь. Однако можно сформулировать следующий результат.

Теорема 6.3. *Компактные гладкие многообразия M_0 и M_1 бордантны тогда и только тогда, когда одно из них можно получить из другого конечным числом сферических перестроек.*

Доказательство. Если дано, что M_0 и M_1 бордантны, т. е. сказано, что их несвязное объединение[1]) есть край многообразия M, то по теореме 4.2 существует функция f на M, которая равна 0 и 1 на

[1]) Следовало бы сказать: «несвязное объединение некоторых многообразий, диффеоморфных M_0 и M_1»; из примера 6.8 видно, что иногда это существенно. Однако допущенная вольность речи является достаточно распространенной и следует привыкнуть правильно (не слишком буквально) понимать текст в подобных случаях. — *Прим. ред.*

M_0 и M_1 соответственно и имеет лишь конечное число критических точек; все они невырожденны и лежат на разных уровнях. Будем следить за множеством уровней M_c, увеличивая c от 0 до 1. Согласно упр. 5.4 и теореме 5.1, с уровнем M_c топологически ничего не происходит, если мы не проходим критический уровень, и происходит сферическая перестойка, когда мы его проходим. Последнее случается на всем пути от M_0 к M_1 лишь конечное число раз. Обратно, если M_1 получается из M_0 конечным числом сферических перестроек, то теорема 6.2 утверждает, что многообразия M_0 и M_1 бордантны.

6.6. Малые шевеления и изотопия

Если разобраться в определении сферической перестройки, то окажется, что результат этой операции зависит от сферы, которую мы стягиваем, а также от того, как представлена трубчатая окрестность этой сферы в виде произведения внутри данного многообразия. С другой стороны, первый шаг в конструкции перестройки состоял в удалении трубчатой окрестности сферы S^r. Поэтому, если бы другая сфера S_1^r имела бы ту же самую трубчатую окрестность, то результат перестройки получился бы один и тот же. Это произойдет, например, если сфера S_1^r получается из S^r небольшим смещением, таким, что S_1^r пересекает в одной точке каждую клетку-слой $\{x\}\times\times E^{n-r}$ произведения $S^r\times E^{n-r}$ (трубчатой окрестности S^r). В этом случае $S^r\times E^{n-r}$ автоматически выражается как $S_1^r\times E^{n-r}$, и поэтому получится та же самая перестройка, независимо от того, с какой сферы начать: с S^r или S_1^r. Точнее, результат M_1 перестройки, стягивающей S_1^r, будет тем же самым, что и результат перестройки, стягивающей S^r. Кроме того, нетрудно видеть, что обе эти перестройки реализуются одинаковыми пленками.

Заметим, что структура произведения на трубчатой окрестности сферы S_1^r определяется соответствующей структурой на окрестности S^r. Важно отметить, что даже в случае, когда S^r вообще не меняется, изменение структуры произведения на трубчатой окрестности может повлять на результат перестройки. Это обстоятельство иллюстрируется следующим простым примером.

Пример 6.11. Возьмем сферу S^2 и рассмотрим на ней 0-мерную сферу S^0, как в примере 6.4. На самом деле существуют два способа представить окрестность сферы S^0 в виде произведения $S^0 \times E^2$, каждый из которых получается из другого изменением направления вращения на одном из кругов[1]). Это

[1]) Пусть a, b — точка сферы S^0, U — ее трубчатая окрестность, $E^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, f: $S^0 \times E^2 \to U$ — диффеоморфизм. Если на круге E^2 выбрана ориентация, т. е. установлено, какое направление вращения считается положительным — скажем, против часовой стрелки, — то диффеоморфизм f переносит эту ориентацию на клетки

$$U_a = f(\{a\} \times E^2) \quad \text{и} \quad U_b = f(\{b\} \times E^2).$$

Но ведь можно взять и другой диффеоморфизм g: $S^0 \times E^2 \to U$, а именно

$$g(a, x, y) = f(a, x, y), \qquad g(b, x, y) = f(b, x, -y).$$

Он тоже переносит ориентацию круга E^2 на те же клетки. Клетка U_a будет ориентирована так же, как и раньше, но U_b — нет.

Ясно, что имеются еще две возможности. Однако читатель легко убедится, сделав соответствующий рисунок, что на результат перестройки влияет только, одинаково ли ориентированы U_a и U_b. Если ориентации U_a и U_b *противоположны*, то будем говорить, что перестройка *сохраняет ориентацию*, в противном случае — что она *не сохраняет ориентации*.

Происхождение этих названий ясно из таких примеров. В примере 6.11 перестройка, сохраняющая ориентацию, переводит сферу в тор, который ориентируем, а перестройка, не сохраняющая ориентации, — в неориентируемую бутылку Клейна. Другой пример — перестройки окружностей; см. стр. 139. Перестройки, названные там закручивающими, — как раз и есть те перестройки, которые мы сейчас назвали не сохраняющими ориентации. Они переводят окружность в окружность, т. е. ориентируемость при этом сохраняется; но если на исходной окружности выбрать какое-то направление, то после перестройки на различных кусках новой окружности получатся разные направления, т. е. ориентация не сохраняется.

Заметим еще, что если перестраиваемое многообразие неориентируемо, то говорить о подобном различии между перестройками типа 0 не приходится, ибо на таком многообразии нельзя сравнивать ориентации, введенные в непересекающихся окрестностях U_a и U_b. — *Прим. ред.*

означает, что когда мы подклеиваем $S^1 \times E^1$, соответствующим образом отождествляя границы, то это отождествление можно произвести двумя способами. Первый (ориентируемый) способ описан в примере 6.4, и, применяя его, мы получим тор. Другой (неориентируемый) способ приведет к односторонней поверхности — бутылке Клейна (рис. 7.22).

Упражнения. 6.2. Пусть S^r — прямо вложенная в многообразие M сфера, и пусть B — ее трубчатая окрестность. Два представления B в виде произведения $S^r \times E^{n-r}$ определяют диффеоморфизм f окрестности B на себя. Он определяется тем, что переводит точку, которой при одном представлении B в виде произведения соответствует пара (p, q), в точку, которой при другом представлении отвечает та же пара (p, q). Докажите, что если f можно продолжить до диффеоморфизма многообразия M на себя, то перестройки, соответствующие двум разным представлениям, приведут к одному результату и реализуются одинаковыми пленками[1]).

6.3. Видоизменяя предыдущее упражнение, предположим, что S^r прямо вложена в M и что B_1 и B_2 — две трубчатые окрестности, каждая из которых представлена в виде произведения $S^r \times E^{n-r}$. Тогда аналогично упражнению 6.2 определяется отображение f окрестности B_1 на B_2. Докажите, что если f можно продолжить до диффеоморфизма многообразия M на себя, то перестройки M при помощи B_1 и B_2 приводят к одному результату и реализуются одной и той же пленкой.

6.4. Один частный случай предыдущего упражнения для нас особенно важен. Пусть S^r имеет трубчатые окрестности $B_1 \subset B_2 \subset$ $\subset B_3$, где $B_i = S^r \times E_i$, $i = 1, 2, 3$, а E_i — шары с центром в начале координат некоторого $(n-r)$-мерного пространства, причем $E_1 \subset E_2 \subset E_3$. Постройте диффеоморфизм $(n-r)$-мерного пространства на себя, который тождествен вне E_3 и переводит E_2 в E_1.

(*Указание*: стройте отображение, двигая точки по радиусам к началу координат и определяя величину сдвига при помощи функции типа той, которая была описана в примере 2.4.)

Выведите отсюда, что существует диффеоморфизм многообразия M на себя, переводящий B_2 в B_1.

---

[1]) Вот точная формулировка того, что требуется доказать. Пусть при первой перестройке из M получается многообразие M_1, а W — пленка, реализующая эту перестройку; пусть при второй перестройке получается M_1', а W' — соответствующая пленка. Тогда существует такой диффеоморфизм $F: W \to W'$ этих пленок, что $F|M = f$. (Тем самым уже сказано, что M_1 и M_1' диффеоморфны). — *Прим. ред.*

С учетом упражнения 6.3 смысл упражнения 6.4 заключается в том, что, производя перестройку, стягивающую сферу S^r, мы можем брать трубчатую окрестность этой сферы сколь угодно малой.

Только что описанным результатам можно придать более общую формулировку, однако здесь мы не будем этим заниматься.

Наиболее важной для нас является ситуация, в которой прямо вложенные сферы S_1 и S_2 получились как образы двух изотопных отображений сферы S^r в M. Это можно понимать так, что сфера S_2 получается из S_1 посредством большого смещения, однако это большое смещение разлагается в последовательность малых смещений типа тех, которые описаны в начале этого раздела[1]). В этом случае можно показать, что заданная структура произведения на трубчатой окрестности сферы S_1 индуцирует структуру произведения на трубчатой окрестности сферы S_2, причем перестройки, которые соответствуют этим окрестностям и стягивают сферы S_1 и S_2, приводят к одному результату и реализуются одинаковыми пленками. Этот результат можно получить, например, последовательным применением соответствующего результата для малых шевелений.

Существует другое обстоятельство, которое требует изучения в связи с этим кругом вопросов: надо провести сравнение между пленками, реализующими две такие последовательности перестроек, что сферы, стягиваемые в одной последовательности, получаются из сфер, стягиваемых в другой, посредством малых шевелений. Следует отметить, что недостаточно рассматривать пленки, реализующие каждую отдельно взятую перестройку; надо также уделить внимание способу, которым они склеиваются, образуя две пленки, реализующие две последовательности перестроек.

Для наших целей достаточно рассмотреть следующий частный случай. Пусть ϕ — перестройка, которая превращает M_0 в M_1 и начинается с удаления трубча-

[1]) Точное определение изотопии см. у Милнора (стр. 206). — *Прим. ред.*

той окрестности B сферы S, прямо вложенной в M_0. Пусть ϕ' — вторая перестройка M_0, которая начинается с удаления трубчатой окрестности B' сферы S'. Предположим, что существует такое непрерывное отображение F: $M_0 \times I \to M_0$, что его ограничение на $M_0 \times \{0\}$ тождественно отображает M_0 в себя, его ограничение на $M_0 \times \{1\}$ переводит $B' \times \{1\}$ в B, сохраняя соответствующую структуру произведения, а его ограничение на множество $M_0 \times \{t\}$ для каждого t является гомеоморфизмом. Обозначим через g ограничение отображения F на множество $M_0 \times \{1\}$. Тогда, используя метод упражнения 6.3, мы получаем гомеоморфизм G пленки W, реализующей перестройку ϕ, на пленку W', реализующую перестройку ϕ', причем ограничение G на M_0 равно g^{-1}. Теперь мы хотим так подправить G, чтобы сделать его ограничение на M_0 тождественным отображением.

Для этой цели определим отображение H многообразия W' на себя следующим образом. Заметим, что, поскольку многообразие M_0 является некритическим уровнем функции на W' (теорема 6.2), оно имеет в W' окрестность вида $M_0 \times I$, где $M_0 \times \{0\}$ отождествляется с M_0 (упражнение 5.2). Определим отображение H, сказав, что вне этой окрестности оно тождественно, а внутри этой окрестности задано формулой

$$H(p, t) = (F(p, 1 - t), t).$$

Мы видим, что $H(p, 1) = (F(p, 0), 1) = (p, 1)$, значит, определения отображения H в $M_0 \times I$ и вне $M_0 \times I$ согласованы и вместе определяют непрерывное отображение. Кроме того, наложенные на F условия обеспечивают, что H является гомеоморфизмом. Далее, $H(p, 0) = F(p, 1) = g(p)$. Таким образом, ограничение H на M_0 совпадает с g. Отсюда следует, что отображение HG является гомеоморфизмом многообразия W на W', ограничение которого на M_0 есть gg^{-1} = тождественное отображение.

Подведем итог:

Лемма 6.1. *Пусть ϕ и ϕ' — перестройки многообразия M_0, удовлетворяющие приведенным выше* *условиям. Тогда ϕ и ϕ' приводят к одному результату, а между реализующими их пленками существует гомеоморфизм, ограничение которого на M_0 является тождественным отображением.*

Теперь мы можем приложить это к последовательности перестроек. Пусть, например, к многообразию M_0 последовательно применяются две перестройки ϕ_1 и ϕ_2, причем перестройка ϕ_1 превращает M_0 в M_1, а перестройка ϕ_2 превращает M_1 в M_2. Предположим, далее, что ϕ_2 заменяется перестройкой ϕ_2', связанной с ϕ_2 так же, как ϕ' связана с ϕ в лемме 6.1. Обозначим пленки, реализующие перестройки ϕ_1, ϕ_2, ϕ_2', через W_1, W_2, W_2' соответственно. Тогда последовательность перестроек ϕ_1, ϕ_2 реализуется пленкой $W = W_1 \cup W_2$, а последовательность ϕ_1, ϕ_2' — пленкой $W' = W_1 \cup W_2'$, где в каждом объединении отождествляются точки M_1. Из леммы 6.1 сразу следует, что существует гомеоморфизм пленки W на W'; он даже тождествен на W_1.

Тот же способ можно применить к последовательности любого числа перестроек.

Упражнение 6.5. Пусть S — сфера, прямо вложенная в M_0, и пусть B — трубчатая окрестность сферы S, представленная в виде произведения $S \times E$. Пусть S' — вторая сфера, которая является подмногообразием в B, пересекающим каждый слой в B — клетку $s \times E$, $s \in S$, — по одной точке, а B' — трубчатая окрестность сферы S', которая содержится в B и каждый слой которой содержится в слое окрестности B. Докажите, что S, S', B, B' удовлетворяют условиям леммы 6.1. Результат этого упражнения будет существенным для перегруппировки перестроек в разд. 6.8.

6.7. Приведение в общее положение

Идею, положенную в основу этого раздела, совсем легко уловить интуитивно, однако детали доказательств слишком сложны, чтобы их здесь приводить. Поэтому понятие, которое мы вводим, будет лишь разъяснено на ряде примеров.

Сначала рассмотрим две кривые на плоскости, которые пересекаются в точке p. Если чуть-чуть сместить одну или другую кривую в плоскости, то смещенные кривые по-прежнему будут иметь точку пересечения вблизи p (см. рис. 6.6). С другой стороны, если одну кривую вывести из плоскости в трехмерное пространство, то пересечение пропадет. Пара кривых на плоскости, конечно, может иметь неизолированные точки пересечения. Однако если, например, две кривые имеют общую дугу, то малое смещение

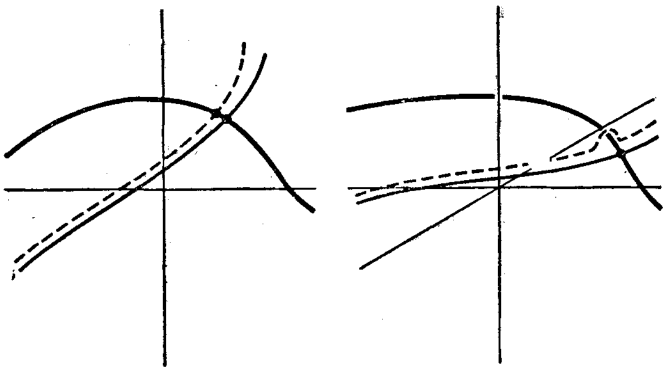

Рис. 6.6. Тонкая кривая при небольшом смещении в плоскости по-прежнему пересекает толстую кривую. Стоит ее приподнять в трехмерном пространстве, и пересечение исчезнет.

одной из них уже дает пару кривых с изолированными пересечениями (рис. 6.7). Иллюстрируемая здесь идея заключается в том, что две кривые в общем положении на плоскости имеют изолированные точки пересечения, в то время как в трехмерном пространстве они, находясь в общем положении, не имеют общих точек. Кроме того, пересечения кривых в трехмерном пространстве можно полностью устранить при помощи малых шевелений.

Чтобы увидеть, какую роль играет во всем этом размерность, следует представлять себе, что точки на плоскости имеют две степени свободы; чтобы зафиксировать точку, необходимо задать две ее координаты. Но точка на кривой имеет лишь одну степень свободы, так что условие лежать на кривой поглощает одну степень свободы. Условие лежать на двух кривых, таким образом, поглощает две степени свободы. Следовательно, в общем случае множество точек пересечения двух кривых не должно иметь ни одной степени свободы и потому должно состоять из изолированных точек. С другой стороны, точка в трехмерном пространстве имеет три степени свободы, в то время как если она обязана лежать на кривой, то

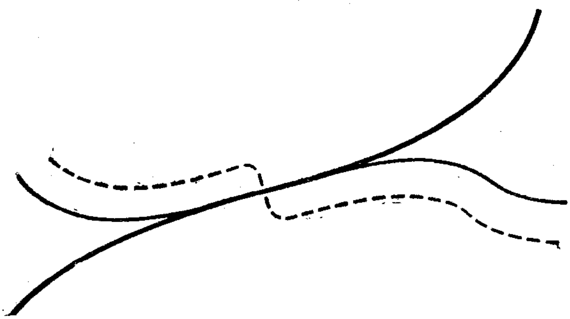

Рис. 6.7. Путем малого шевеления кривых на плоскости можно добиться, чтобы они пересекались в изолированных точках.

она будет иметь лишь одну степень свободы. Поэтому условие лежать на кривой в трехмерном пространстве поглощает две степени свободы. Условие лежать на двух кривых поглотит четыре степени свободы, но так как их на самом деле имеется только три, то две кривые общего положения в трехмерном пространстве вообще не обязаны пересекаться. Кроме того, разбор рисунков 6.6 и 6.7 убеждает нас в том, что приведение в общее положение в трехмерном пространстве может быть достигнуто посредством малых шевелений.

Теперь проведем аналогичные интуитивные рассуждения в более общей ситуации. Рассмотрим n-мерное гладкое многообразие M и его r-мерное подмногообразие N. Точка многообразия M имеет n степеней свободы, но если она лежит в подмногообразии N, то их остается только r. Таким образом, условие лежать на N поглощает $n-r$ степеней свободы. Если N' — второе подмногообразие размерности r', то условие лежать как на N, так и на N' в общем случае должно было бы поглощать $n-r+n-r'$ степеней свободы. Если это число оказывается бо́льшим n, то следует ожидать, что пересечение будет пусто. Иначе говоря, два подмногообразия размерностей r и r', которые находятся в общем положении, при $r+r'<n$ не обязаны пересекаться. Кроме того, для любых двух подмногообразий N и N' должен быть верен тот факт, что их можно привести в общее положение малым шевелением одного из них. Здесь шевеление, скажем, многообразия N означает, что мы заменяем вложение $f\colon N \subsetneqq M$ другим отображением $g\colon N \to M$, которое тоже является вложением (уже в смысле определения 3.2) и близко к f в том смысле, что $g(p)$ для всех p близко к $f(p)=p$ и производные функций, выражающих g и f в локальных координатах (ввиду компактности понадобится лишь конечное число координатных окрестностей), тоже будут близки.

6.8. Перегруппировка перестроек

Теперь мы применим результаты двух последних разделов к доказательству важной теоремы о последовательности перестроек. Первый шаг — показать, что при подходящих условиях две последовательные перестройки можно производить в обратном порядке.

Итак, пусть ϕ_1 — перестройка типа r, которая превращает данное компактное гладкое многообразие M_0 в M_1; пусть W_1 — пленка, реализующая ϕ_1, и пусть ϕ_2 — перестройка типа s, которая превращает M_1 в M_2 и реализуется пленкой W_2. Перестройки ϕ_1 и ϕ_2 стягивают сферы $S^r \subset M_0$ и $S^s \subset M_1$ в точки P_1 и P_2 многообразий W_1 и W_2 соответственно, при этом возникают сферы S^{n-r-1} и S^{n-s-1}.

Предположим, что $s \leqslant r$. Тогда, обращаясь к рассуждениям разд. 6.7, мы видим, что можно слегка пошевелить сферу S^s так, чтобы она не пересекала

S^{n-r-1}. Согласно упражнению 6.5, это шевеление сферы S^s можно сделать так, чтобы выполнялись условия леммы 6.1, и тогда оно не подействует ни на результат последовательности перестроек ϕ_1, ϕ_2, ни на реализующую пленку. Кроме того, теперь сферы S^s и S^{n-r-1}, не пересекаясь, имеют непересекающиеся окрестности. Так как перестройки можно производить с помощью сколь угодно малых трубчатых окрестностей (замечание после упражнения 6.4), то перестройку ϕ_2 и перестройку, обратную к ϕ_1, можно производить, используя непересекающиеся трубчатые окрестности сфер S^s и S^{n-r-1}, и это уменьшение трубчатых окрестностей до непересекающихся опять не повлияет ни на результат последовательности перестроек ϕ_1, ϕ_2, ни на реализующую ее пленку. Таким образом, мы доказали следующее:

Лемма 6.2. *Пусть ϕ_1 и ϕ_2 — перестройки, описанные в начале этого раздела. Тогда, не изменяя ни результата этой последовательности перестроек, ни реализующей ее пленки, можно добиться того, чтобы сфера S^s в M_1, стягиваемая перестройкой ϕ_2, не пересекалась со сферой S^{n-r-1}, возникающей при перестройке ϕ_1, и чтобы даже трубчатые окрестности этих сфер, соответствующие перестройке ϕ_2 и перестройке, обратной к ϕ_1, не пересекались.*

Из этой леммы мгновенно выводится следствие. Рассмотрим непересекающиеся трубчатые окрестности B_1 и B_2 сфер S^{n-r-1} и S^s, о которых шла речь в лемме. Множества B_2 и B_1 мы удаляем из M_1, начиная перестройку ϕ_2 и перестройку, обратную к ϕ_1, соответственно. Обратившись к построению пленки, реализующей перестройку, мы видим, что пленка W_1 есть объединение $(M_1 \setminus \operatorname{Int} B_1) \times I$ с $(n+1)$-мерной клеткой E_1, а W_2 есть объединение $(M_1 \setminus \operatorname{Int} B_2) \times I$ с $(n+1)$-мерной клеткой E_2; в каждом случае сделаны надлежащие отождествления. Кроме того, $E_1 \cap M_1$ в точности равно B_1, а $E_2 \cap M_1$ равно B_2. Теперь легко видеть, что W_1 содержит множество $B_2 \times I$ как подмножество в $(M_1 \setminus \operatorname{Int} B_1) \times I$, в то время как W_2 содержит $B_1 \times I$ как подмножество в

$(M_1 \setminus \operatorname{Int} B_2) \times I$. Наконец, объединение E_1 и $B_1 \times I$ по-прежнему является $(n+1)$-мерной клеткой E_1', пересекающей M_2 по множеству B_1', гомеоморфному $S^{n-r-1} \times E^{r+1}$, а объединение E_2 и $B_2 \times I$ является $(n+1)$-мерной клеткой E_2', которая пересекает M_0 по множеству B_2', гомеоморфному $S^s \times E^{n-s}$.

Упражнение 6.6. Проверьте то, что утверждается в предыдущем предложении.

Все это означает, что мы можем считать перестройки ϕ_1 и ϕ_2 производимыми одновременно в M_0. Точнее, если исключить из M_0 множества B_0 и B_2' и вставить на их место множества B_1' и $S^{n-s-1} \times E^{s+1}$, то (при надлежащих отождествлениях) получится M_2. Кроме того, пленка $W = W_1 \cup W_2$, реализующая пару перестроек ϕ_1, ϕ_2, получается добавлением клеток E_1' и E_2' к $(M_0 \setminus \operatorname{Int} B_0 \setminus \operatorname{Int} B_2') \times I$ с надлежащими отождествлениями. Следовательно, по отношению к конечному результату и к построению пленки обе эти перестройки равноправны.

Заметим, что все это было сделано в предположении, что $s \leqslant r$. Последнее условие требовалось для того, чтобы можно было сделать сферы S^{n-r-1} и S^s в M_1 непересекающимися. Если бы эти сферы с самого начала были непересекающимися, то независимо от соотношения между r и s было бы справедливым то же самое заключение о равноправии ϕ_1 и ϕ_2.

Продолжая наши рассуждения, мы можем сказать, что поскольку перестройки ϕ_1 и ϕ_2 теперь находятся в равном положении, то порядок, в котором они производятся, можно поменять на обратный. Иначе говоря, мы можем сначала выполнить перестройку ϕ_2, а затем к полученному результату применить перестройку ϕ_1; конечный результат и пленка будут теми же, что и для последовательности ϕ_1, ϕ_2. Это завершает доказательство основной теоремы настоящего раздела.

Теорема 6.4. *Пусть M_2 получается из M_0 двумя последовательными перестройками, из которых первая ϕ_1 имеет тип r, а вторая ϕ_2 — тип s, причем $s \leqslant r$.*

Тогда то же самое многообразие M_2 можно получить, делая сначала перестройку типа s, а затем перестройку типа r, и пленка, реализующая эту последовательность перестроек, будет такой же, как и для исходной последовательности[1]).

Многократное применение этого результата дает следующую теорему.

Теорема 6.5. *Последовательность перестроек можно, не изменяя конечного результата и пленки, упорядочить так, чтобы перестройки типа s производились раньше, чем перестройки типа $r \geqslant s$.*

6.9. Интерпретация теоремы 6.5 в терминах критических точек

В этом параграфе мы не обращали внимания на гладкость многообразий и отображений, которые возникали в результате наших построений. Об этом следует позаботиться особо. Например, при построении пленки, реализующей перестройку, нужно складывать куски так, чтобы получилось гладкое многообразие. Мы уже отмечали, что это можно сделать, и в теореме 6.1 утверждалось без доказательства, что каждая перестройка типа r соответствует гладкой функции на пленке, имеющей критическую точку индекса[2]) $r+1$. Аналогично построение, проведенное в разд. 6.8 для перегруппировки перестроек, всегда может быть выполнено так, чтобы разные куски, складываясь, давали гладкое многообразие. Предпо-

[1]) Если же $s > r$, то перестройки ϕ_1 и ϕ_2, вообще говоря, не только нельзя переставить, но даже и не имеет смысла говорить о применении перестройки ϕ_2 к многообразию M_0. Ведь может случиться, что та сфера на многообразии M_1, которую эта перестройка должна стягивать, не соответствует никакой сфере на многообразии M_0 и появляется только после перестройки ϕ_1. (С одним примером такой ситуации мы будем иметь дело в разд. 8.2.) Исключение составляет упомянутый выше случай, когда эта сфера не пересекается со сферой, возникающей при перестройке ϕ_1. — *Прим. ред.*

[2]) Если функция f имеет в точке p на пленке минимум (критическая точка индекса 0), то перестройке многообразия уровня M_c приходится приписать тип -1. Она состоит в сл ющем:

ложим теперь, что M есть гладкое многообразие с краем $M_0 \cup M_1$, реализующее последовательность перестроек, превращающую M_0 в M_1, и пусть эта последовательность упорядочена так, как это описано в теореме 6.5. Тогда отсюда следует, что на M существует гладкая функция, которая принимает значения между 0 и 1, равна 0 на M_0, 1 на M_1 и имеет лишь конечное число критических точек; все они невырожденны и обладают тем свойством, что для двух таких точек P_1 и P_2 из того, что индекс точки P_1 меньше, чем индекс точки P_2, следует, что $f(p_1) < f(p_2)$. Функция с аналогичными свойствами описана в [33] под названием *хорошей* (nice) *функции* на M[1]).

§ 7. ДВУМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

7.1. Введение

В качестве иллюстрации развитых выше идей мы приведем сейчас классификацию двумерных многообразий (без края). При классическом подходе к этой задаче многообразия, заданные как симплициальные комплексы, приводятся к каноническим формам путем последовательных разрезов и склеиваний. Таким способом доказывается, что компактное связное ориентируемое двумерное многообразие гомеоморфно сфере, к которой приклеено некоторое число ручек, а компактное связное неориентируемое двумерное многообразие гомеоморфно сфере, в которой прорезано некоторое число круглых дырок, после чего

у p имеется такая окрестность U на пленке, что $M_{f(p)-\varepsilon} \cap U = \varnothing$, а $M_{f(p)+\varepsilon} \cap U$ диффеоморфно сфере размерности $\dim M$. Иными словами, после перестройки к M добавляется не пересекающаяся с ним сфера. — *Прим. ред.*

[1]) Изложение этих вопросов с должным вниманием к гладкости содержится в первых четырех параграфах [24]. Оно там ведется с несколько иных позиций: упор делается не на сферические перестройки, а на реализующие их пленки и соответствующие функции (а также связанные с последними векторные поля). — *Прим. ред.*