

ложим теперь, что M есть гладкое многообразие с краем $M_0 \cup M_1$, реализующее последовательность перестроек, превращающую M_0 в M_1 , и пусть эта последовательность упорядочена так, как это описано в теореме 6.5. Тогда отсюда следует, что на M существует гладкая функция, которая принимает значения между 0 и 1, равна 0 на M_0 , 1 на M_1 и имеет лишь конечное число критических точек; все они невырождены и обладают тем свойством, что для двух таких точек P_1 и P_2 из того, что индекс точки P_1 меньше, чем индекс точки P_2 , следует, что $f(p_1) < f(p_2)$. Функция с аналогичными свойствами описана в [33] под названием *хорошей* (nice) *функции* на M^1 .

§ 7. ДВУМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

7.1. Введение

В качестве иллюстрации развитых выше идей мы приведем сейчас классификацию двумерных многообразий (без края). При классическом подходе к этой задаче многообразия, заданные как симплициальные комплексы, приводятся к каноническим формам путем последовательных разрезов и склеиваний. Таким способом доказываемся, что компактное связное ориентируемое двумерное многообразие гомеоморфно сфере, к которой приклеено некоторое число ручек, а компактное связное неориентируемое двумерное многообразие гомеоморфно сфере, в которой прорезано некоторое число круглых дырок, после чего

у p имеется такая окрестность U на пленке, что $M_{f(p)-\varepsilon} \cap U = \emptyset$, а $M_{f(p)+\varepsilon} \cap U$ диффеоморфно сфере размерности $\dim M$. Иными словами, после перестройки к M добавляется не пересекающаяся с ним сфера. — *Прим. ред.*

¹⁾ Изложение этих вопросов с должным вниманием к гладкости содержится в первых четырех параграфах [24]. Оно там ведется с несколько иных позиций: упор делается не на сферические перестройки, а на реализующие их пленки и соответствующие функции (а также связанные с последними векторные поля). — *Прим. ред.*

отождествлены диаметрально противоположные пары точек окружности, образованной краями каждой из дырок. Число ручек в первом случае и число дырок во втором являются топологическими инвариантами поверхности. Сейчас мы получим эти результаты для гладких многообразий, изучая критические точки заданных на них функций. Ориентируемый и неориентируемый случаи будут рассмотрены отдельно.

7.2. Ориентируемые двумерные многообразия

Рассмотрим компактное связное ориентируемое двумерное многообразие M и построим на нем в соответствии с теоремой 4.2 функцию f с конечным числом невырожденных критических точек. В этом случае существует ровно три типа критических точек: минимум, седловая точка и максимум; они имеют индексы 0, 1, 2 соответственно, Теорема 6.5 показывает, что функцию f можно выбрать так, что ее значения в минимумах будут меньше, чем значения в седловых точках, а те в свою очередь будут меньше, чем значения в максимумах. Рис. 7.1 изображает многообразие M , лежащее в трехмерном пространстве; в качестве функции f взята последняя координата, и ее критические точки имеют только что описанное расположение. Между прочим, совсем не очевидно, хотя и верно, что многообразие M можно вложить в пространство размерности 3.

В соответствии с результатами параграфа 6 мы можем рассматривать многообразие M как пленку, реализующую последовательность перестроек одномерных многообразий. Каждый минимум соответствует возникновению окружности, так что, если мы рассматриваем семейство уровней функции f , поднимаясь вверх от самой нижней точки, то к тому моменту, когда мы пройдем все минимумы, у нас возникнет конечное число окружностей. После этого на одномерном многообразии, составленном из этих окружностей, производится некоторое число перестроек типа 0, соответствующих седловым точкам многообразия M . Наконец, производятся перестройки,

соответствующие различным точкам максимума функции f ; при этом в каждую точку максимума стягивается какая-то окружность.

Рассматривая сначала перестройки типа 0, легко видеть, что существует три типа таких перестроек; удобно назвать их *связывающей*, *разделяющей* и *за-*

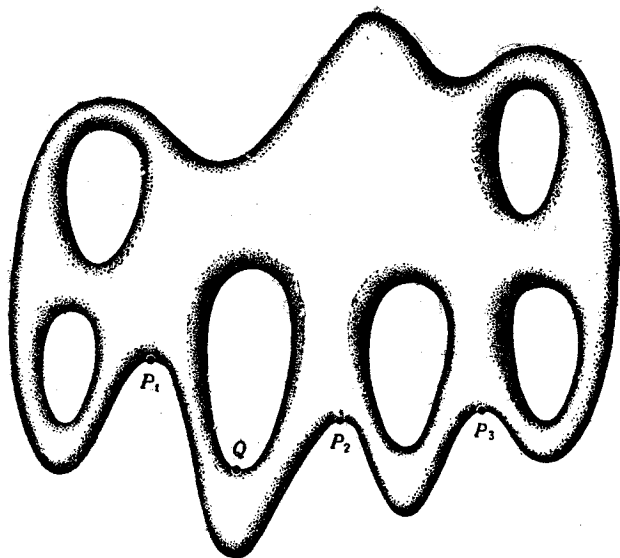


Рис. 7.1.

кручивающей перестройками. Проведение связывающей перестройки на уровне M_c уменьшает число компонент уровня $M_{c+\varepsilon}$ на 1 по сравнению с $M_{c-\varepsilon}$; при этом две окружности связываются в одну. Рисунок 7.2 изображает часть многообразия M , образованную соответствующей пленкой. Например, на рис. 7.1 перестройка, соответствующая критической точке P_1 , является связывающей. Разделяющая перестройка действует в точности обратным способом (рис. 7.3). На рис. 7.1, например, перестройка, соответствующая точке Q , является разделяющей.

Третий тип перестройки типа 0 стягивает нульмерную сферу на окружности (рис. 7.4), однако на этот раз окружность в окрестности одной из точек

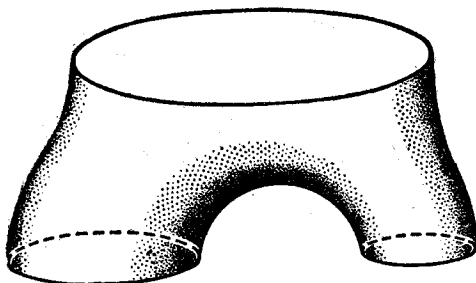


Рис. 7.2.

нульмерной сферы закручена (рис. 7.5). Результат перестройки по-прежнему представляет собой окруж-

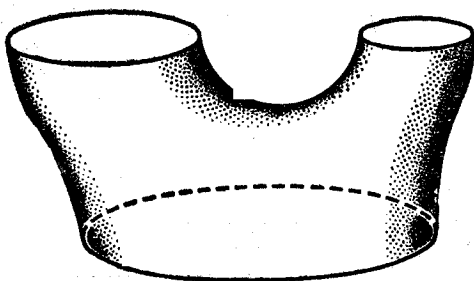


Рис. 7.3.

ность (рис. 7.6)¹⁾. Закручивание окружности при перестройке этого типа означает, что кривые уров-

¹⁾ Закручивание на рис. 7.5 продиктовано интересами описания пленки (см. ниже); саму же перестройку проще представ-

лять себе так: от рис. 7.4 переходим к



— Прим. ред.

ней соответствующей функции не являются плоскими кривыми, и поэтому пленку, реализующую перестройку, нельзя поместить в трехмерном евклидовом пространстве без самопересечений¹⁾.

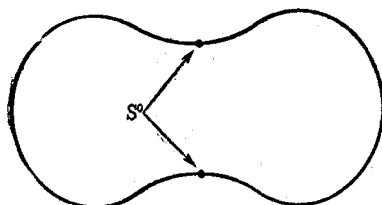


Рис. 7.4.

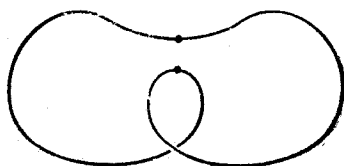


Рис. 7.5.

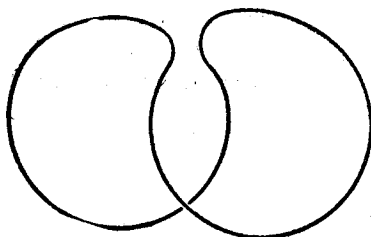


Рис. 7.6.

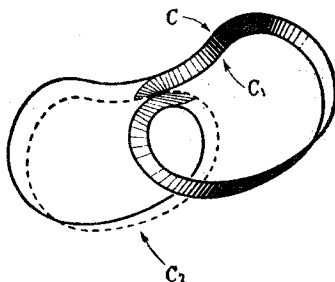


Рис. 7.7.



Рис. 7.8.

Рассмотрим теперь пленку W , реализующую перестройку, изображенную на рис. 7.4, 7.5 и 7.6. На W имеется функция с одной критической точкой P . Соответствующий критический уровень состоит из

¹⁾ Речь идет о таком вложении в трехмерное евклидово пространство E , при котором функцией является одна из координат. Вообще же вложить в E пленку без самопересечений можно, ибо она диффеоморфна листу Мёбиуса (см. Милнор, рис. 17), в котором вырезана дырка. — Прим. ред.

двух окружностей C_1 и C_2 , пересекающихся в точке (рис. 7.7). Третья окружность C на рис. 7.7 изображает некритический уровень функции f , расположенный ниже точки P ; другими словами, это та окружность, на которой производится закручивающая перестройка. Заштрихованная полоса на рис. 7.7 изображает часть W , в основном заключенную между C и C_1 . На рис. 7.8 представлен прямоугольник, концы которого отождествляются так, как указывают стрелки; в результате получается лист Мёбиуса. Заштрихованную полосу на W из рис. 7.7 можно отобразить на заштрихованную часть листа Мёбиуса, отождествляя C_1 со средней линией полосы, а изображенные на рис. 7.7 дуги на W — с вертикальными отрезками прямоугольника на рис. 7.8. Точно так же можно отождествить и вторую половину листа Мёбиуса с частью W , в основном заключенной между окружностью C_1 и некритическим уровнем функции f , расположенным выше точки P . Таким образом, C_1 имеет в W окрестность, которая является листом Мёбиуса. Тем самым C_1 не прямо вложена в W , и потому W — неориентируемое многообразие. Мы же разбираем сейчас случай ориентируемых многообразий, так что все перестройки типа 0 будут либо связывающими, либо разделяющими.

Пусть теперь $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ — уровень функции f , расположенный над всеми минимумами. Этот уровень является тем одномерным многообразием, к которому будут применяться перестройки типа 0. Допустим на минуту, что перестройки типа 0 можно разбить на две группы так, что перестройки одной из них будут действовать только на $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{n-1}$, а перестройки другой будут производиться на C_n . Тогда две пленки, реализующие эти две последовательности перестроек, с добавленными сверху и снизу клетками будут двумерными многообразиями, объединение которых равно M , а это противоречит связности многообразия M . Поэтому обязательно найдется перестройка, стягивающая нульмерную сферу, одна точка которой лежит на окружности C_n , а другая — на одной из окружностей C_i . Эта пере-

стройка будет связывающего типа. Переставим перестройки типа 0 так, чтобы она шла первой. Тогда остальные перестройки типа 0 действуют уже на объединении $n - 1$ окружностей. Повторяя это рассуждение, мы видим, что данную последовательность перестроек можно упорядочить так, чтобы первые $n - 1$ из них соединяли n окружностей C_i в одну

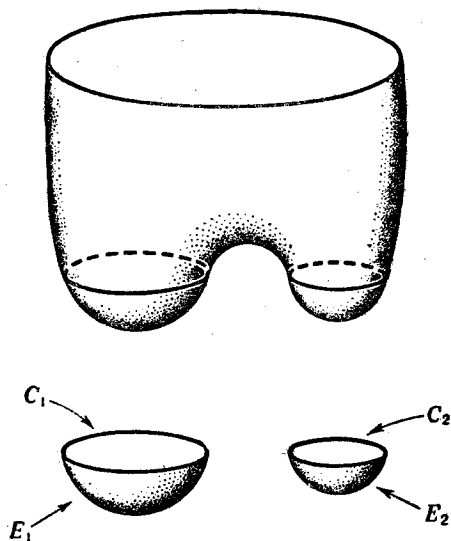


Рис. 7.9.

окружность C_0 . Геометрически это означает, что седловые точки P_i на рис. 7.1-мы перетянули вниз так, чтобы они оказались ниже остальных седловых точек.

Далее, любые две из упомянутых выше окружностей C_i , скажем C_1 и C_2 , являются границами двумерных клеток E_1 и E_2 , лежащих в M . Если C_1 и C_2 соединяются связывающей перестройкой, то получившаяся окружность также ограничивает двумерную клетку (рис. 7.9), образованную добавлением клеток E_1 и E_2 к пленке, реализующей перестройку. Повторяя это рассуждение $n - 1$ раз, мы видим, что часть многообразия M , расположенная под окружностью

C_0 , представляет собой двумерную клетку E_0 . Теперь мы можем заменить f новой функцией, у которой кривые уровней выше C_0 те же, что и прежде, а кривые уровней ниже C_0 образуют семейство окружностей, стягивающихся в точку на E_0 . Другими словами, функция f будет иметь на M ровно один минимум.

Аналогичное рассуждение позволяет подправить функцию f так, чтобы она имела на M ровно один максимум. Итак, мы получили следующее:

Лемма 7.1. На связном компактном ориентируемом двумерном многообразии существует функция, все критические точки которой, кроме одного минимума и одного максимума, являются седловыми.

Выраженная в других терминах, эта лемма утверждает, что многообразие M получается добавлением сверху и снизу клеток E_1 и E_0 к пленке, реализующей последовательность перестроек типа 0, которая начинается с окружности C_0 и кончается окружностью C_1 . В тех же терминах выражается наш следующий шаг: мы переставляем перестройки этой последовательности так, чтобы все разделяющие перестройки производились раньше других¹⁾.

Рассмотрим теперь клетку E_0 (рис. 7.10), гомеоморфную двумерной сфере с отверстием, край которого есть окружность C_0 . Если мы делаем с C_0 разделяющую перестройку и добавляем к E_0 соответствующую пленку, то получается сфера с двумя отверстиями. Продолжая по индукции, мы видим, что если добавляется пленка, реализующая $k-1$ разделяющих перестроек, то в результате получается сфера M_1 с k дырками, края которых мы обозначим, например, через $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$. Остальная часть M_2 многообразия M получается как пленка, реализующая действующие на объединение окружностей Γ_i

¹⁾ Убедиться в возможности такой перегруппировки перестроек читателю предоставляется самостоятельно. Формально это не совсем тривиально, ибо не исключено, что при изменении порядка перестройка, бывшая ранее связывающей, может стать разделяющей. Наглядно это соответствует переходу от рис. 7.10 к 7.11 (C_i на них имеют различный смысл). — *Прим. ред.*

связывающие перестройки, к которой «сверху» добавлена еще клетка E_1 . Однако перестройки, которые были связывающими при движении от C_0 к C_1 , станут разделяющими, если двигаться от C_1 к C_0 . По-

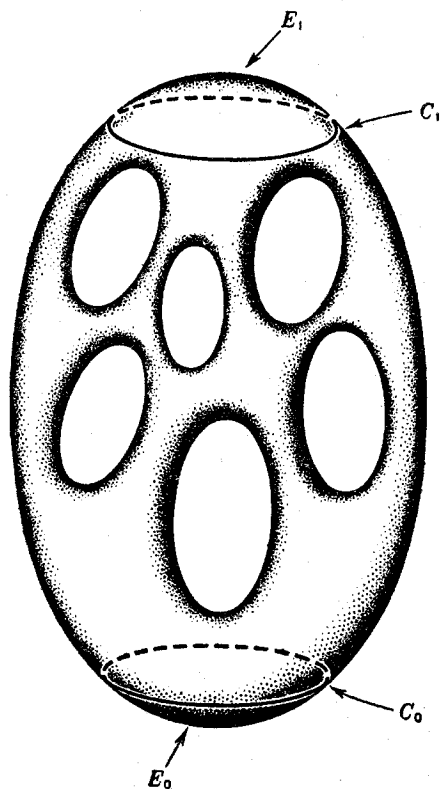


Рис. 7.10.

этому M_2 также является сферой с k дырками. Многообразие M теперь получается объединением M_1 и M_2 с попарным отождествлением краев отверстий. Таким образом, мы доказали следующий результат.

ЛЕММА 7.2. *Каждое компактное связное ориентируемое двумерное многообразие (без края)*

гомеоморфно многообразию $M(k)$, где $M(k)$ есть объединение двух сфер, в каждой из которых проделано k дырок, после чего края этих дырок попарно отождествлены (рис. 7.11).

Лемма дает нам такую последовательность многообразий $M(k)$, что любое компактное связное ориентируемое двумерное многообразие гомеоморфно

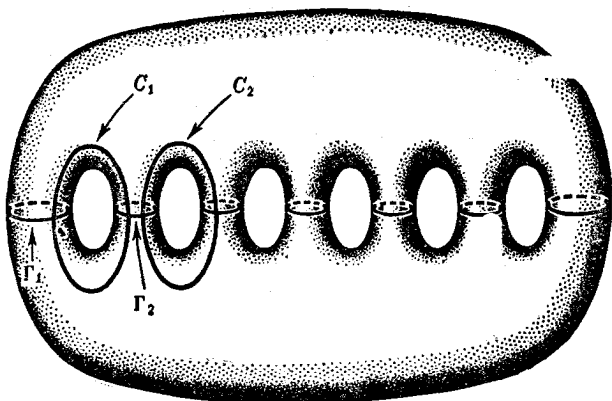


Рис. 7.11.

одному из них. Но чтобы эту лемму можно было считать классификационной теоремой, нужно еще показать, что при $h \neq k$ многообразия $M(h)$ и $M(k)$ не гомеоморфны. Однако многообразия $M(k)$ представлены не в нормальной форме, обычно используемой для классификации двумерных многообразий, и по этому сначала мы должны придать лемме 7.2 общепринятую формулировку.

Чтобы сделать это, взглянем на $M(k)$ с другой точки зрения: предположим, что на $M(k)$ нарисовано $k-1$ окружностей C_1, C_2, \dots, C_{k-1} , как показано на рис. 7.11. Если разрезать $M(k)$ на две сферы, каждая с k дырками, края которых образованы окружностями $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$, то на каждой сфере останется набор дуг, в котором i -я дуга соединяет точку на Γ_i

с точкой на Γ_{i+1} , причем окружность C_i получается при объединении i -й дуги на одной сфере с i -й дугой на другой сфере. Окружности C_i прямо вложены в $M(k)$, и если сделать перестройки, стягивающие эти окружности, то получится двумерная сфера. Рассуждая в обратном порядке, мы видим, что $M(k)$ получается в результате проведения $k-1$ перестроек типа 0 на двумерной сфере, причем все они сохраняют ориентацию (пример 6.11). Действие каждой такой перестройки заключается в приклеивании к сфере одной ручки (рис. 6.2). Поэтому если обозначить через Σ_p двумерную сферу с p ручками, то $M(k)$ будет гомеоморфно Σ_{k-1} .

После подходящей перемены обозначений лемма 7.2 принимает следующий вид:

ЛЕММА 7.3. *Каждое компактное связное ориентированное двумерное многообразие (без края) гомеоморфно поверхности Σ_p , где Σ_p — сфера с p ручками.*

Упражнение 7.1. Дайте другое доказательство того, что $M(k)$ гомеоморфно Σ_{k-1} , применив к Σ_{k-1} последовательность шагов из доказательств лемм 7.1 и 7.2 и приведя тем самым Σ_{k-1} к виду $M(k)$.

Теперь нам осталось сделать последний шаг — показать, что Σ_p и Σ_q не гомеоморфны, если $p \neq q$.

Сначала заметим, что на Σ_p имеется p непересекающихся окружностей, по одной на каждой ручке (рис. 7.12), таких, что если разрезать Σ_p по каждой из них, то получившаяся поверхность¹⁾ будет по-прежнему связной. Максимальное число обладающих этим свойством непересекающихся окружностей на поверхности, очевидно, является ее топологическим инвариантом.

Определение 7.1. Максимальное число непересекающихся окружностей, по которым можно разрезать поверхность, не нарушая ее связности, называется *родом* этой поверхности.

¹⁾ Здесь и далее слово «поверхность» у. требуется вместо «двумерного многообразия». — *Прим. ред.*

Имеется теорема, которую мы здесь доказывать не будем и которая утверждает, что род двумерного компактного многообразия конечен и, в частности, род сферы равен нулю (см. [46]). Эта теорема по-

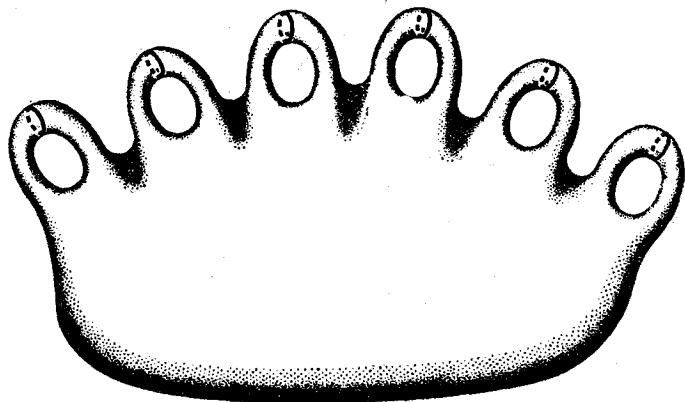


Рис. 7.12.

требуется нам в дальнейших рассуждениях. Доказательство того, что Σ_p и Σ_q не гомеоморфны при $p \neq q$, — это, по существу, доказательство того, что род Σ_p равен p ¹⁾.

Лемма 7.4. Пусть связная поверхность M' получается из M перестройкой типа 0. Тогда род многообразия M' больше, чем род M .

¹⁾ Вместо рода можно воспользоваться другим топологическим инвариантом — эйлеровой характеристикой. См. Милнор, задача 25* (заодно там доказана и конечность рода). Утверждение, что замкнутая кривая без самопересечений на сфере разбивает последнюю, равносильно аналогичному утверждению для плоскости (для перехода от одного к другому можно воспользоваться стереографической проекцией (Милнор, рис. 3), взяв за полюс сферы любую ее точку, лежащую вне рассматриваемой кривой). А оно является одним из утверждений теоремы Жордана, доказанной, например, у Дьедонне ([13], добавление к гл. 9). Для гладкой кривой оно легко доказывается с помощью методов, излагаемых у Милнора (см. задачу 26*); при переходе к произвольным замкнутым кривым требуются некоторые ухищрения. — Прим. ред.

Доказательство. Пусть род M равен p , и пусть C_1, C_2, \dots, C_p — непересекающиеся окружности на M , такие, что после разрезания вдоль этих

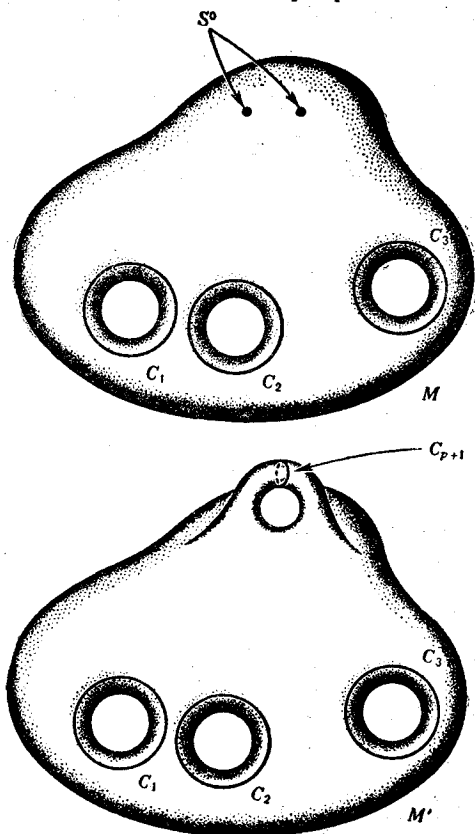


Рис. 7.13.

окружностей поверхность M остается связной. Можно считать (см. лемму 6.1), что нульмерная сфера, стягиваемая при переходе от M к M' , не пересекает окружностей C_i . Тогда окружности C_1, \dots, C_p «перекочуют» на M' (рис. 7.13); кроме них, на M' имеется окружность C_{p+1} , которая опоясывает приклеенную

ручку. Она не пересекает окружностей C_1, C_2, \dots, C_p , и если мы разрежем M' по C_1, C_2, \dots, C_{p+1} , то связность не нарушится. Следовательно, род M' по меньшей мере равен $p + 1$, что строго больше, нежели род M .

Повторное применение этой леммы дает следующий результат:

ЛЕММА 7.5. Пусть род M равен p , и пусть многообразии M' получается из M проведением p перестроек типа 1 и является связным. Тогда M' — сфера.

Доказательство. Рассмотрим многообразия, получающиеся из M при последовательном применении упомянутых перестроек. Все они связны, ибо M' связно, а перестройка типа 1 не может превратить несвязное многообразие в связное. Теперь из леммы 7.4 следует, что каждая из перестроек, преобразующих M в M' , уменьшает род по крайней мере на 1. Поэтому после p перестроек род должен оказаться равным нулю. Но получившаяся поверхность M' должна быть сферой с некоторым числом q ручек, и поскольку ее род равен нулю, q должно равняться нулю. Таким образом, M' есть сфера.

Замечание. На поверхности рода p имеются p непересекающихся окружностей, разрез по которым не нарушает связности; значит, и при перестройках типа 1, стягивающих эти окружности, связность не нарушится. По доказанной лемме при этом должна получиться сфера. Рассматривая перестройки, ведущие от M к сфере, в обратном порядке, получаем, что поверхность M рода p должна быть гомеоморфна сфере с p ручками¹⁾. Впрочем, сейчас нам понадо-

¹⁾ Обратите внимание, что это еще не дает нам полной классификации: мы теперь знаем, что если существует ориентируемая поверхность, имеющая род p , то и Σ_p имеет род p (род топологически инвариантен!), но мы еще не выяснили — быть может, для некоторых p поверхностей с родом p вообще нет? В частности, всегда ли род Σ_p равен p ? Или, что эквивалентно, не могут ли быть гомеоморфны некоторые Σ_p и Σ_q с $p \neq q$? Все это и выясняется в оставшейся части данного раздела. — *Прим. ред.*

бится только следующее: для всякой ориентируемой поверхности M существует некоторое конечное число (равное на самом деле ее роду p) с тем свойством, что при применении к M большего числа перестроек типа 1 получится несвязное многообразие (если предположить противное, то первые p перестроек должны привести к сфере, а после этого следующая же перестройка нарушит связность, ибо род сферы равен 0).

Теперь мы можем доказать основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 7.1. Каждое компактное связное ориентируемое двумерное многообразие (без края) гомеоморфно одной из поверхностей Σ_p ; при этом Σ_p и Σ_q не гомеоморфны, если $p \neq q$.

Доказательство. Первая часть была доказана в лемме 7.3. Предположим теперь, что Σ_p гомеоморфна Σ_q с $q > p$. На поверхности Σ_q можно провести $q - p$ последовательных перестроек типа 1, стягивающих окружности, которые опоясывают $q - p$ ее ручек; в результате мы получим поверхность Σ_p . Но так как мы предположили, что Σ_p и Σ_q гомеоморфны, то мы можем считать, что эти перестройки проводились на Σ_p и в результате тоже получилось Σ_p .

Повторное проведение этих перестроек привело бы к сколь угодно длинной последовательности перестроек типа 1, примененных к Σ_p и оставляющих ее связной. Это противоречит сделанному выше замечанию, согласно которому каждое компактное ориентируемое двумерное многообразие после некоторого конечного числа перестроек типа 1 перестает быть связным. Следовательно, Σ_p и Σ_q не могут быть гомеоморфными.

У п р а ж н е н и я. 7.2. Докажите, что если на Σ_p приводится перестройка типа 1, то ее результат, если он связан, будет поверхностью Σ_q с $q < p$.

(Указание. Предположив, что $q \geq p$, постройте на Σ_p сколь угодно длинную последовательность перестроек типа 1, оставляющую эту поверхность связной.)

7.3. Докажите, что род Σ_p равен p . (Ясно, что род Σ_p не меньше p . Предположим, что он больше p . Используя последнее

упражнение, постройте последовательность перестроек, которая превращает поверхность Σ_p в сферу, но оставляет строго положительным ее род.)

7.3. Неориентируемый случай

Прежде чем рассматривать неориентируемые поверхности в общем случае, полезно разобрать простой пример, чтобы получить представление, как действует закручивающая перестройка (рис. 7.4, 7.5, 7.6). Рассмотрим проективную плоскость; ее можно представить как сферу, у которой отождествлены пары диаметрально противоположных точек. Таким образом, если мы возьмем единичную сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в трехмерном евклидовом пространстве, то точку (x, y, z) надо отождествить с точкой $(-x, -y, -z)$. Так как функция

$$(*) \quad f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

принимает одинаковые значения в точках (x, y, z) и $(-x, -y, -z)$, то формула (*) определяет функцию f на проективной плоскости. Теперь мы можем делать выводы о поведении линий уровня функции f на проективной плоскости, исследуя уровни функции $x^2 + 2y^2 + 3z^2$ на сфере и помня о том, что пары противоположных точек отождествляются.

Линии уровня на сфере — это пересечения сферы с семейством эллипсоидов:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = c.$$

Ясно, что при $c < 1$ действительных пересечений нет. При $c = 1$ имеется две точки пересечения: $(\pm 1, 0, 0)$ (рис. 7.14). Они, разумеется, определяют одну точку P_0 на проективной плоскости, которая соответствует минимуму функции f . Пока c возрастает от 1 до 2, пересечение представляет собой пару овалов на сфере (рис. 7.15). Отождествление противоположных точек означает, что на проективной плоскости это будет одна окружность. При $c = 2$ пересечение эллипсоида и сферы устроено так, как это показано на рис. 7.16. При этом функция f имеет критические точки

$(0, \pm 1, 0)$, которые опять определяют одну точку P_1 на проективной плоскости. Когда c возрастает от 2 до 3, пересечение сферы и эллипсоида снова представляет собой пару окружностей, как на рис. 7.17, и

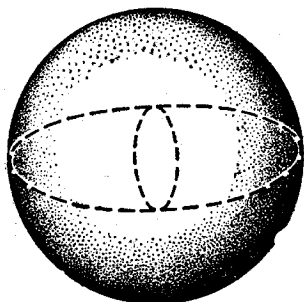


Рис. 7.14.

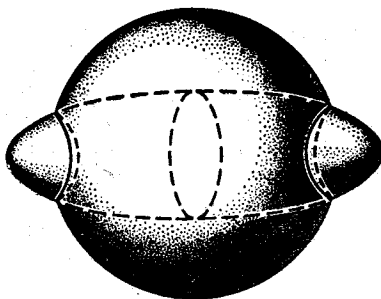


Рис. 7.15.

снова они определяют одну окружность на проективной плоскости. Когда c стремится к 3, эти окружности стягиваются в точки $(0, 0, \pm 1)$ на сфере, определяющие одну точку P_2 на проективной плоскости.

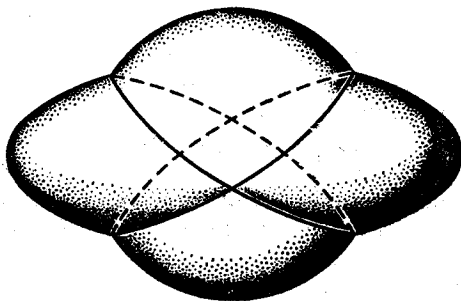


Рис. 7.16.

Для детального изучения перехода через критический уровень, соответствующий точке P_1 , мы заметим, что проективную плоскость можно рассматривать как полусферу $y \leq 0$ единичной сферы, если

отождествить противоположные точки окружности, образованной краями полусферы. На рис. 7.18 полусфера для удобства сплющена в круг. Этот рисунок изображает критический уровень функции f , соответствующий

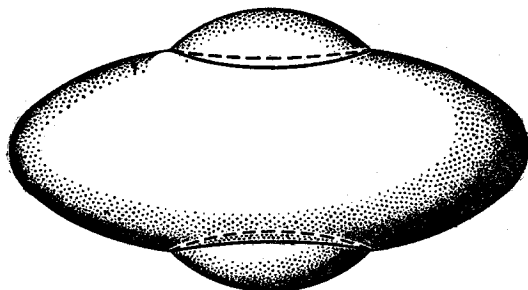


Рис. 7.17.

щей точке P_1 , а также некритические уровни с обеих сторон от него. Дуги a и b образуют некритический уровень ниже P_1 , а дуги c и d — выше. Противоположные

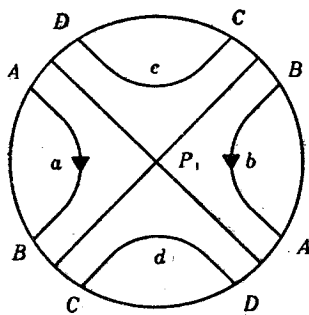


Рис. 7.18.

ложные точки на границе круга, обозначенные одинаковыми буквами, отождествляются. Стрелки на дугах a и b показывают некоторое направление вращения на нижнем уровне функции f ; видно, что около точки P_1 линии уровня идут в одном направлении. Сравнение этого рисунка с рис. 7.5 показывает, что

при переходе от нижнего критического уровня к верхнему происходит закручивающая перестройка.

Эту ситуацию можно описать по-другому, сказав, что пленка, реализующая закручивающую перестройку, — это проективная плоскость, в которой вырезаны две дырки. Таким образом, последовательность k закручивающих перестроек реализуется такой пленкой: надо взять k проективных плоскостей, в каждой из которых прорезано по две дырки, и отождествить края одной дырки в каждой из плоскостей с краями дырки в следующей плоскости.

Последнее построение можно описать в других, более удобных терминах. Пусть M_1 и M_2 — два связанных многообразия одинаковой размерности¹⁾. Возьмем точки P_1 и P_2 на M_1 и M_2 соответственно и выберем их окрестности U_1 и U_2 , которые являются клетками. Выкинем эти окрестности и образуем объединение множеств $M_1 \setminus U_1$ и $M_2 \setminus U_2$, в котором отождествляются границы клеток U_1 и U_2 . То, что получится, называется *связной суммой многообразий M_1 и M_2* . Заметим, что она является результатом перестройки типа 0, которая производится на обычном (несвязном!) объединении $M_1 \cup M_2$ и стягивает нульмерную сферу $P_1 \cup P_2$.

Таким образом, используя введенную терминологию, можно сказать, что пленка, реализующая последовательность k закручивающих перестроек, представляет собой связную сумму k проективных плоскостей, в которой вырезаны две дырки.

Построение связной суммы многообразия M и проективной плоскости по-другому можно описать следующим образом. Проективная плоскость получается из круга отождествлением диаметрально противоположных точек окружности. Чтобы соединить ее с M , надо и в круге, и в M вырезать по дырке. При этом круг превращается в кольцо, или, что то же самое, в цилиндр, у которого надо отождествить диаметрально противоположные точки на одном

¹⁾ Они предполагаются непересекающимися; в противном случае их надо заменить диффеоморфными им непересекающимися многообразиями. — *Прим. ред.*

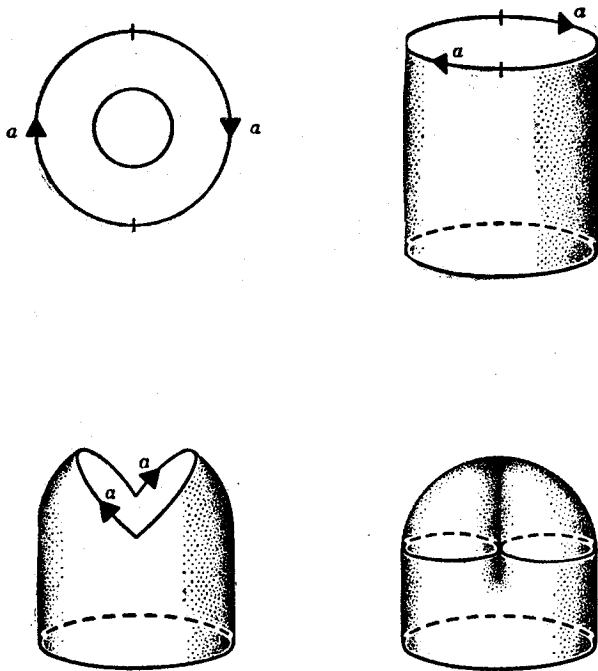
основании. Если совместить отождествляемые точки в трехмерном пространстве, то получится поверхность, которую называют «перекрещенным колпаком» (рис. 7.19). Заметим, что самопересечение получается из-за неудачной попытки построить перекрещенный колпак в трехмерном пространстве¹⁾. Итак, для того чтобы получить связную сумму многообразия M и проективной плоскости, мы должны отождествить край перекрещенного колпака с краем круглой дырки в M . Эта операция называется приклеиванием перекрещенного колпака к многообразию M ²⁾. Заметим, что можно было бы получить тот же результат, вырезав в M дырку и отождествив диаметрально противоположные точки ее края.

Оставшаяся часть исследования неориентируемых двумерных многообразий будет дана как ряд упражнений.

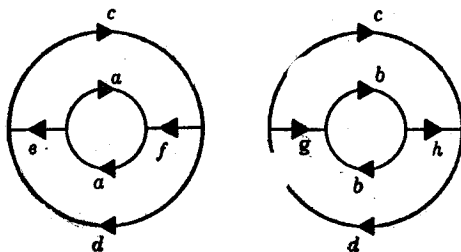
Упражнения 7.4. Пусть M — связное компактное неориентируемое многообразие (без края). Так же, как в § 7.2, покажите, что на M существует функция с одним минимумом, одним максимумом и конечным числом седловых точек. Переставьте седловые точки так, чтобы соответствующие перестройки типа 0 расположились в таком порядке: сначала все разделяющие перестройки, затем — все связывающие и, наконец, закручивающие. Выведите отсюда, что многообразие M является связной суммой поверхности $M(k)$, определенной в лемме 7.2, с некоторым числом проективных плоскостей. Другими словами, M можно

¹⁾ Проективную плоскость с дыркой можно расположить в трехмерном евклидовом пространстве и без самопересечений, ибо она диффеоморфна листу Мёбиуса — поверхности, изображенной на рис. 17 у Милнора. Лист Мёбиуса выглядит проще, чем перекрещенный колпак, и такие его свойства, как неориентируемость или существование замкнутой кривой, разрез по которой не нарушает связности, достаточно легко усмотреть непосредственно из рисунка. Но если мы хотим, чтобы дырка была заклеена не в смысле абстрактного отождествления точек, а в буквальном смысле слова, то приходится пользоваться перекрещенным колпаком. — *Прим. ред.*

²⁾ Хотя в данном случае и принято говорить о «приклеивании», это слово здесь употребляется не совсем в обычном смысле (прежде чем приклеивать, надо из M выкинуть круг!). Возможно, лучше было бы говорить о заклеивании дырки в M перекрещенным колпаком или о вклеивании в M листа Мёбиуса. — *Прим. ред.*



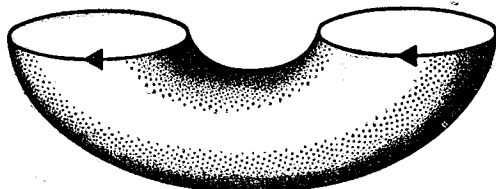
Р и с. 7.19. Последовательные этапы построения перекрещенного колпака.



Р и с. 7.20.

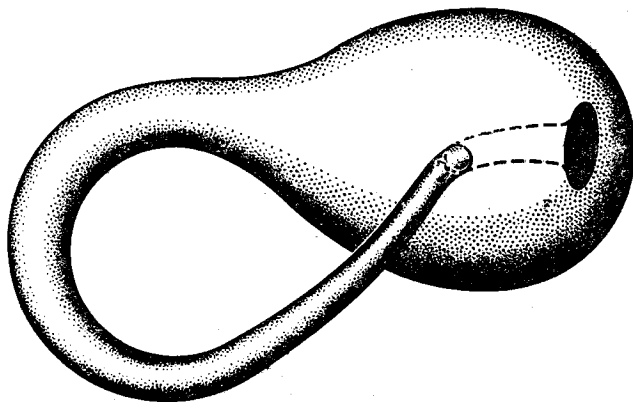
представить как сферу с дырками, некоторые из которых попарно соединены ручками, а остальные заклеены перекрещенными колпаками.

7.5. Буквы и стрелки на рис. 7.20 указывают способ отождествления, при котором в результате склеивания двух колец получается связная сумма двух проективных плоскостей, или, что то



Р и с. 7.21.

же самое, пара перекрещенных колпаков, приклеенных основаниями друг к другу. Разрезав по дугам e , f , g , h , указанным на рисунке, и сложив получившиеся куски по-новому, покажите, что она гомеоморфна цилиндру, концы которого отождествляются способом, указанным на рис. 7.21. (Эта поверхность является



Р и с. 7.22.

бутылкой Клейна.) Рис. 7.22 изображает результат отождествления. Снова заметим, что, когда мы строим поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, получается самопересечение.

7.6. Дайте другое доказательство того, что бутылка Клейна является связной суммой двух проективных плоскостей, построив на ней функцию с одним минимумом, одним максимумом и двумя

седловыми точками, каждая из которых соответствует закручивающей перестройке.

7.7. Заметим, что бутылка Клейна является результатом перестройки типа 0, которая проводится на сфере и не сохраняет ориентации (см. пример 6.11).

Если теперь M — проективная плоскость, на которой производится перестройка типа 0, то не имеет смысла говорить, что перестройка сохраняет ориентацию или нет. Используя это, покажите, что связанная сумма бутылки Клейна и проективной плоскости гомеоморфна связанной сумме тора и проективной плоскости. Выведите отсюда, что связанная сумма тора и проективной плоскости гомеоморфна связанной сумме трех проективных плоскостей.

7.8. Повторным применением результатов предыдущего упражнения покажите, что связанная сумма поверхности Σ_p с любым числом проективных плоскостей сама будет связанной суммой проективных плоскостей.

7.9. Предыдущие упражнения показывают, что связанное неориентируемое компактное двумерное многообразие (без края) гомеоморфно поверхности $N(k)$, которая является связанной суммой k проективных плоскостей, или, что то же самое, результатом приклеивания к сфере k перекрещенных колпаков.

7.10. Покажите теперь, что $N(h)$ не гомеоморфно $N(k)$ при $h \neq k$. Проверьте сначала, что если N' получается из N приклеиванием перекрещенного колпака, то род N' больше, чем род N . Теперь рассмотрите два сорта операций: перестройки типа I и удаление перекрещенных колпаков. Покажите, что после проведения конечного числа таких операций поверхность превращается в сферу, а дальнейшее применение этих операций нарушает ее связность.

Затем, используя такое же рассуждение, как в теореме 7.1, покажите, что $N(k)$ и $N(h)$ не гомеоморфны, если $k \neq h$.

7.11. Докажите, что род $N(k)$ равен k .

7.4. Теорема о трехмерных многообразиях ¹⁾

Пусть M — трехмерное гладкое многообразие (связное и без края), которое компактно и ориентируемо. Если удалить из M две непересекающиеся клетки — обозначим их E_0 и E_2 , — то получится многообразие M' , край которого есть несвязное объединение двух двумерных сфер M_0 и M_2 . Таким образом, M' можно считать пленкой, реализующей некоторую последовательность перестроек, превращающих

¹⁾ В английском оригинале этот раздел находился в § 6, но в нем фактически предполагается знакомство с некоторыми рассуждениями § 7, отчего при переводе он и был перенесен сюда. — *Прим. ред.*

M_0 в M_2 . Аналогично тому, как это было сделано для поверхностей (лемма 7.1), можно обеспечить, чтобы соответствующая функция имела на M ровно один минимум, притом расположенный внутри E_0 , и ровно один максимум, притом расположенный внутри E_2 . Тогда все перестройки, реализуемые пленкой M' , будут иметь тип 0 или 1, причем по теореме 6.5 мы можем считать, что сначала выполняются все перестройки типа 0, в результате чего получается некоторое многообразие M_1 . Тогда все перестройки, происходящие на пути от M_1 до M_2 , имеют тип 1, или, что то же самое, все перестройки на пути от M_2 до M_1 имеют тип 0. Напомним, что наши перегруппировки перестроек не влияют на M' . Возвращая трехмерные клетки, которые мы удалили вначале, мы видим, что M является объединением двух многообразий W_1 и W_2 с общим краем M_1 . Так как все перестройки, превратившие двумерную сферу в M_1 , имели тип 0 и были ориентируемы, W_1 и W_2 представляют собой шары с ручками. Мы доказали следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 7.2. Трехмерное компактное ориентируемое многообразие (связное и без края) является объединением двух шаров с ручками, поверхности которых отождествлены посредством некоторого гомеоморфизма¹⁾.

§ 8. ПОСЛЕДУЮЩИЕ ШАГИ

Здесь мы хотим дать некоторые указания о развитии нашего предмета за пределами того круга элементарных идей и методов, которого мы до сих пор придерживались. Подробный разбор затрагиваемых вопросов потребовал бы более глубоких знаний ряда разделов алгебраической топологии, но поскольку это выходит за рамки данной книги, мы ограничимся набросками, которые должны всего лишь создать из-

¹⁾ Такое разбиение трехмерного многообразия на два шара с ручками называется *разбиением Хегора*. — Прим. ред.