M_0 в M_2. Аналогично тому, как это было сделано для поверхностей (лемма 7.1), можно обеспечить, чтобы соответствующая функция имела на M ровно один минимум, притом расположенный внутри E_0, и ровно один максимум, притом расположенный внутри E_2. Тогда все перестройки, реализуемые пленкой M', будут иметь тип 0 или 1, причем по теореме 6.5 мы можем считать, что сначала выполняются все перестройки типа 0, в результате чего получается некоторое многообразие M_1. Тогда все перестройки, происходящие на пути от M_1 до M_2, имеют тип 1, или, что то же самое, все перестройки на пути от M_2 до M_1 имеют тип 0. Напомним, что наши перегруппировки перестроек не влияют на M'. Возвращая трехмерные клетки, которые мы удалили вначале, мы видим, что M является объединением двух многообразий W_1 и W_2 с общим краем M_1. Так как все перестройки, превратившие двумерную сферу в M_1, имели тип 0 и были ориентируемы, W_1 и W_2 представляют собой шары с ручками. Мы доказали следующее утверждение:

Теорема 7.2. *Трехмерное компактное ориентируемое многообразие (связное и без края) является объединением двух шаров с ручками, поверхности которых отождествлены посредством некоторого гомеоморфизма*[1].

§ 8. ПОСЛЕДУЮЩИЕ ШАГИ

Здесь мы хотим дать некоторые указания о развитии нашего предмета за пределами того круга элементарных идей и методов, которого мы до сих пор придерживались. Подробный разбор затрагиваемых вопросов потребовал бы более глубоких знаний ряда разделов алгебраической топологии, но поскольку это выходит за рамки данной книги, мы ограничимся набросками, которые должны всего лишь создать из-

[1]) Такое разбиение трехмерного многообразия на два шара с ручками называется *разбиением Хегора*. — *Прим. ред.*

вестные интуитивные представления. Те, кто пожелает узнать об этом подробнее, найдут некоторые рекомендации для дальнейшего чтения в конце книги.

8.1. Убивание гомотопических классов

Иллюстрацией к этому разделу может служить пример 6.5; тор преобразуется в сферу перестройкой типа 1. Эта перестройка — процесс упрощения. Можно считать, что сфера проще тора в следующем смысле: любой замкнутый путь на сфере можно на этой сфере стянуть в точку, тогда как, например, окружность a на рис. 8.1 нельзя стянуть в точку на торе.

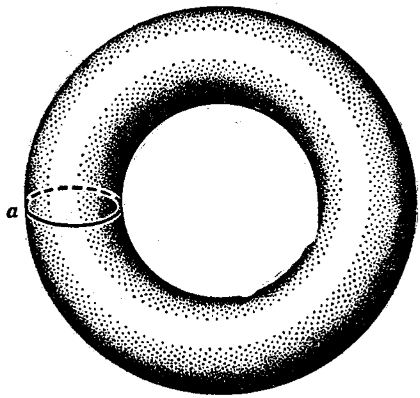


Рис. 8.1.

(Мы приводим эти утверждения как интуитивно очевидные; при строгом изложении нужны точные формулировки и доказательства.)

Посмотрим, как можно обобщить эти соображения. Первый шаг — классифицировать замкнутые кривые на многообразии M. *Замкнутый путь*, или *петля* в точке x на M, — это такое непрерывное отображение f: $I \to M$, где I — единичный интервал на оси вещественных чисел, что $f(0) = f(1) = x$. Иначе можно рассматривать f как отображение окружности в M, при котором выбранная точка на окружности переходит в точку x. Мы будем называть две таких петли f и g гомотопными и писать $f \sim g$, если существует такое непрерывное отображение $F\colon I \times I \to M$, что

$$\left.\begin{aligned} F(s, 0) &= f(s) \\ F(s, 1) &= g(s) \end{aligned}\right\} \text{ при всех } s \in I,$$
$$F(0, t) = F(1, t) = x \text{ при всех } t \in I.$$

Геометрически это означает, что F отображает квадрат в многообразие M так, что нижняя сторона отображается при помощи f, верхняя — при помощи g, а боковые стороны переходят в точку x. Интуитивно же это означает, что если рассматривать t как время, то в течение единичного интервала времени путь f непрерывно деформируется в g. Оказывается, что отношение $\sim$ между замкнутыми путями является отношением эквивалентности, и поэтому множество петель в точке x можно разбить на классы эквивалентности. Класс, содержащий f, называется *гомотопическим классом* замкнутого пути (петли) f. Множество гомотопических классов петель в точке x на M мы будем обозначать через $\pi_1(M, x)$. В этом множестве можно ввести алгебраическую структуру следующим образом. Для двух петель f и g в точке x мы определим $fg = h$ как путь, который получится, если сначала пройти по f, а потом по g. Этот путь задается формулами

$$h(s) = f(2s), \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2},$$
$$h(s) = g(2s - 1), \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1.$$

Тогда можно показать, что если $f \sim f'$, а $g \sim g'$, то $fg \sim f'g'$. Поэтому, обозначая гомотопический класс f через $\bar{f}$ и аналогично обозначая гомотопические классы остальных путей, мы можем определить произведение гомотопических классов, положив

$$\bar{f}\bar{g} = \overline{fg}.$$

Правая часть здесь зависит только от гомотопических классов путей $\bar{f}$ и $\bar{g}$, а не от конкретных путей f и g, которые эти классы представляют. Можно показать см. [46]), что это умножение является групповой операцией, для которой единицей будет класс постоянного пути — пути, переводящего весь отрезок I в точку x, а обратный элемент получится, если пройти путь в обратном направлении. Таким образом, $\pi_1(M, x)$ превращается в группу — это *фундаментальная группа* многообразия M[1]).

Все это можно сделать для любого топологического пространства. Однако если M — гладкое компактное многообразие, то можно показать, что группа $\pi_1(M, x)$ имеет конечное число образующих. Кроме того, если размерность многообразия M больше 2, то соображения о приведении в общее положение (§ 6.7) показывают, что в каждом гомотопическом классе всегда содержится путь f, который является гладким вложением окружности в M. Если M ориентируемо, эта окружность будет прямо вложенной (определение 6.2).

Предположим теперь, что M — ориентируемое гладкое многообразие размерности, бо́льшей 2, и пусть $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_r$ — образующие группы $\pi_1(M, x)$. Как мы уже говорили, путь $\bar{\alpha}_r$ можно представить окружностью α_r, которая прямо вложена в M. Произведем перестройку типа 1, которая стягивает окружность α_r, превращая многообразие M в M'. Грубо говоря, действие этой перестройки состоит в том, что мы встраиваем в многообразие круг, краем которого является окружность α_r. Поэтому оказывается, что в M' путь α_r гомотопен постоянному. Другими словами, гомотопический класс $\bar{\alpha}_r$ становится единичным. Однако других образующих $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_{r-1}$ переход от M к M', как можно показать, не затрагивает. Итак, фундаментальная группа многообразия M' получается из фундаментальной группы M при замене одной образующей $\bar{\alpha}_r$ на единицу. Обычно называют эту опера-

---

[1]) Фундаментальная группа рассматривается во многих учебниках алгебраической топологии: [36*], [49*], [— *Прим. ред.*

цию *убиванием класса* $\bar{\alpha}_r$. Ясно, что, проделав такую операцию с другими образующими, мы можем убить всю фундаментальную группу.

Этот результат можно сформулировать, сказав, что ориентируемое гладкое многообразие путем сферических перестроек типа 1 может быть преобразовано в многообразие с нулевой фундаментальной группой[1]. Или, используя теорему 6.3, можно сказать, что данное многообразие бордантно многообразию с нулевой фундаментальной группой. Здесь не нужно накладывать условие, что размерность больше 2; ведь мы уже знаем, что ориентируемое двумерное многообразие является сферой с ручками, а ее легко преобразовать в сферу с помощью перестроек типа 1, каждая из которых стягивает окружность, опоясывающую одну из ручек.

Изложенные идеи можно еще обобщить. Элементы из $\pi_1(M, x)$ можно считать гомотопическими классами окружностей в M. Можно определить другие группы $\pi_r(M, x)$, элементами которых являются гомотопические классы r-мерных сфер в M. Тогда классы, представленные прямо вложенными r-мерными сферами, можно убивать с помощью перестроек типа r. Операции такого рода могут привести к упрощению строения многообразия и быть полезными при решении задач о классификации.

8.2. Компенсирующие перестройки и сокращение

Мы уже видели, что если M' получается из M сферической перестройкой типа r, при которой стягивается сфера S^r и возникает сфера S^{n-r-1}, то мы можем вернуться от M' к M, делая перестройку типа $n-r-1$, при которой стягивается сфера S^{n-r-1} и возникает сфера S^r. Однако при определенных условиях существует более интересный и менее очевидный способ обратить действие перестройки. Рассмотрим сначала следующий пример.

---

[1]) Заметим, что многообразие с нулевой фундаментальной группой называется *односвязным*. — *Прим. ред.*

Пример 8.1. Начав с двумерной сферы M, преобразуем ее в тор перестройкой ϕ типа 0 (сохраняющей ориентацию), которая стягивает нульмерную сферу S^0. Этот процесс описан в примере 6.4. Пусть B — трубчатая окрестность сферы S^0 — это пара непересекающихся кругов. Край окрестности B имеет вид $S^0 \times S^1$ (пара окружностей) и для фиксированной точки p содержит множество $S^0 \times \{p\}$, которое можно считать смещенным экземпляром сферы S^0.

Но S^0 является границей одномерной клетки E^1 в M. Подберем эту клетку так, чтобы она пересекала границу окрестности B по множеству $S^0 \times \{p\}$. Тогда можно удалить из E^1 ее часть, лежащую в окрестности B, и полученная клетка E_0^1 будет иметь множество $S^0 \times \{p\}$ своей границей.

Для получения тора M' мы приклеиваем к $M \setminus B$ ручку $E^1 \times S^1$. На этой ручке имеется отрезок, концы которого соединяют концы отрезка E_0^1, при этом образуется окружность S^1 на торе. Ясно, что, сделав перестройку тора ϕ', которая имеет тип 1 и стягивает эту окружность, мы вернемся к сфере.

Исследуя этот процесс более подробно, можно извлечь дополнительную информацию. Мы уже видели, что пленка, реализующая перестройку ϕ, представляет собой сплошной тор, из внутренности которого вырезан шар, причем границей шара будет M, а внешней границей тора — M' (пример 6.7). Поверхности уровня связанной с этой перестройкой функции (см. теорему 6.1) начинаются с M и продолжают оставаться двумерными сферами до тех пор, пока мы не достигнем критического уровня. Этот уровень представляет собой тор, на котором одна окружность стянута в точку. Поверхности уровня, идущие за критическим, все являются торами. Видно, что, когда мы перебираем уровни, начиная с M, отрезок E^1 появляется на каждом из них до тех пор, пока его концы не соединятся на критическом уровне, образовав окружность S^1. Эта окружность уже сохраняется на всех последующих уровнях. Построим теперь пленку, реализующую две перестройки, из которых первой выполняется ϕ, а потом ϕ'. Для этого надо приклеить пленку, реализующую перестройку ϕ', к той пленке, реализующей ϕ, которая у нас уже имеется. На приклеиваемой пленке уровни, предшествующие критическому, можно представлять себе как расширяющееся семейство торов — все они содержат внутри себя сплошной тор, являющийся пленкой перестройки ϕ, и уровни, более близкие к критическому, заключают внутри себя уровни, более далекие от него. Окружность S^1, которую можно представлять себе расположенной на «горловине» тора, по мере приближения к критическому уровню уменьшается и, наконец, стягивается в критическую точку: мы достигли критического уровня, который выглядит как сфера с притянутыми к центру полюсами. Вне критического уровня поверхности уровня становятся сферами. Поэтому пленка, реализующая перестройки ϕ и ϕ', является шаром, внутри которого сделана шаровая полость. Здесь интересно, что эта пленка в действительности имеет вид $M \times I$. Другими словами, перестройки ϕ и ϕ' не только погашают друг друга в том смысле, что их последовательное выполнение приводит нас опять к многообразию M, но они еще и реализуются наиболее простой из всех возможных пленок — произведением $M \times I$.

Существенное обстоятельство в этом примере то, что сфера S^r, стягиваемая первой перестройкой, является границей клетки E_0^{r+1} в M, причем эта клетка в процессе перестройки замыкается, образуя прямо вложенную сферу S^{r+1} в M'. Вторая перестройка ϕ' стягивает эту сферу. Сейчас мы покажем, что всякий раз, когда выполняется это условие, последовательность перестроек ϕ, ϕ' реализуется произведением $M \times I$[1]).

---

[1]) Короче это утверждение можно сформулировать так: *если последовательно выполняемые перестройки ϕ и ϕ' таковы, что ϕ' стягивает сферу S^{r+1}, которая ровно в одной точке пересекает сферу S^{n-r-1}, возникающую при перестройке ϕ, и при этом сферы находятся в общем положении* («трансверсальное пересечение» по терминологии Милнора, стр. 250), *то пленка, реализующая ϕ и ϕ', диффеоморфна $M \times I$.* Клетка E_0^{r+1} и обсуждение в двух следующих абзацах Уоллеса нужны для того, чтобы разобраться,

Итак, пусть S^r — прямо вложенная сфера в многообразии M, и предположим, что S^r является границей клетки E_0^{r+1}, гомеоморфно и гладко вложенной в M. Мы собираемся сделать перестройку, которая стягивает сферу S^r, удовлетворяющую этому дополнительному условию. Сфера S^r имеет в M трубчатую окрестность B со структурой произведения: B имеет вид $S^r \times E^{n-r}$, а граница B есть $S^r \times S^{n-r-1}$.

как может возникнуть такая ситуация (это нужно как для доказательства сформулированного утверждения, так и при его применении).

Строго говоря, Уоллес не доказывает сформулированного утверждения, потому что в последующих рассуждениях не уделено никакого внимания гладкости. (Кстати, «клетки» теперь, как правило, из-за «углов» на своих краях будут не диффеоморфны шару, а только гомеоморфны.) Невнимание к гладкости «мстит за себя» довольно неожиданным образом: не только не получается диффеоморфизма между пленкой и $M \times I$ (это-то понятно), но и при построении гомеоморфизма встречаются трудности (см. следующую сноску).

Тем не менее ознакомление со следующими несколькими страницами очень полезно, ибо дает ясную геометрическую картину того, как «взаимно сокращаются» перестройки ϕ и ϕ'. (Быть может, вся книга писалась ради этих именно страниц! Надо только ясно отдавать себе отчет, что здесь доказано, а о чем лишь рассказано.) Читателю, вероятно, покажется правдоподобным, что их содержание можно «подправить», позаботившись о гладкости, и получить в итоге доказательство диффеоморфности. Это действительно можно сделать, но это довольно громоздкое дело (более громоздкое, чем аналогичная корректировка § 6). Полное доказательство имеется в книжке Милнора [24*] (теорема 5.4) и занимает 15 страниц, хотя Милнор проводит рассуждения не в терминах наглядных геометрических операций (выбросим, склеим...), а на более удобном для «наведения гладкости» языке функций и векторных полей.

Я немного изменил текст этого раздела, надеясь сделать его более ясным. Основное изменение состоит в том, что я вставил три абзаца, где, если можно так выразиться, резюмируется экспозиция предстоящей драмы — еще раз упомянуто о всех тех множествах в M и M', которые будут участвовать в дальнейших построениях, и об их взаимном расположении.

Наконец, обращаю внимание, что при переходе от функции с несколькими минимумами к функции с одним минимумом (лемма 7.1) фактически происходит сокращение перестроек типа — 1 и 0. Этот пример, как и тот, с которого начинается данный раздел, полезно проанализировать в свете последующих построений. — *Прим. ред.*

Предположим, что клетку E_0^{r+1} можно подправить путем малого шевеления так, чтобы ее пересечение с границей окрестности B имело вид $S^r \times \{p\}$, где p — точка на S^{n-r-1}. Сейчас нам будет удобнее считать, что клетка E_0^{r+1} содержится в $M \setminus B$; тогда ее граница — сфера $S^r \times \{p\}$ — будет лежать на общей границе B и $M \setminus B$.

Пусть M' — результат преобразования M при помощи перестройки ϕ. Чтобы построить M', мы добавляем $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$ в $M \setminus B$ и подходящим образом отождествляем граничные точки. В частности, клетки $E^{r+1} \times \{p\}$ и E_0^{r+1} склеиваются вдоль своих границ, образуя сферу S^{r+1} в M'. Предположим, что выполнено дополнительное условие: сфера S^{r+1} прямо вложена в M'. Можно показать, что это будет так, если представление окрестности B в виде прямого произведения, участвующее в построении ϕ, удовлетворяет некоторым условиям, однако здесь мы не будем этого обсуждать. Разумеется, условие «S^{r+1} прямо вложена в M'» не будет автоматически выполняться во всех возможных случаях. Оно не выполняется, например, для перестройки типа 0 на сфере, не сохраняющей ориентации.

Итак, предполагая, что сфера S^{r+1} прямо вложена в M', рассмотрим ее трубчатую окрестность B', представленную в виде произведения, и пусть ϕ' — соответствующая перестройка типа $r+1$, стягивающая сферу S^{r+1}. Заметим, что если разложить S^{n-r-1} в объединение двух клеток E_1^{n-r-1} и E_2^{n-r-1}, первая из которых содержит точку p, то B' можно представить как объединение окрестности $E^{r+1} \times E_1^{n-r-1}$ клетки $E^{r+1} \times \{p\}$ в $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$ и окрестности клетки E_0^{r+1} в $M \setminus B$. Последняя окрестность сама является n-мерной клеткой E_0^n.

До сих пор мы не рассматривали S^{n-r-1} как какую-то определенную сферу в M', однако позднее будет удобно, зафиксировав какую-нибудь точку q внутри клетки E^{r+1}, говорить о сфере $\{q\} \times S^{n-r-1} \subset M'$ как о сфере S^{n-r-1}. (Это обычный прием, когда сомножитель считается вложенным в прямое произведение, например ось x — в плоскость (x, y). Конкретный выбор q в данном случае безразличен.) Тогда можно будет сказать, что перестройка, обратная к ϕ, стягивает сферу S^{n-r-1} (подробнее: она изымает из M' окрестность $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$ этой сферы и вместо нее «вклеивает» $B = S^r \times E^{n-r}$).

Отметим своего рода симметрию между перестройкой ϕ' и перестройкой, обратной к ϕ: стягиваемые ими сферы S^{r+1} и S^{n-r-1} многообразия M' имеют ровно одну общую точку (q, p) и эта точка имеет в M' окрестность $E^{r+1} \times E_1^{n-r-1}$; сфера S^{r+1} пересекает эту окрестность по клетке $E^{r+1} \times \{p\}$, а S^{n-r-1} — по клетке E_1^{n-r-1} (бывшая $\{q\} \times E_1^{n-r-1}$); сфера S^{r+1} является объединением первой клетки (лежащей в этой окрестности) и клетки E_0^{r+1} (лежащей вне этой окрестности), а сфера S^{n-r-1} — объединением клетки E_1^{n-r-1} (лежащей в названной окрестности) и клетки E_2^{n-r-1} (лежащей вне ее). После того как мы обозначили окрестность клетки E_0^{r+1} в $M \setminus B$ (т. е. фактически, в $M' \setminus (E^{r+1} \times S^{n-r-1})$) через E_0^n, естественно обозначить окрестность клетки E_2^{n-r-1} в $M' \setminus B'$ через E_1^n.

Проследим теперь за построением пленки, реализующей последовательность перестроек: ϕ, затем ϕ'. Напомним, что пленка, реализующая перестройку, получается так: к произведению

(*) (многообразие$\setminus$окрестность стягиваемой сферы) $\times$
$\times$ интервал

надо добавить $(n+1)$-мерную клетку и произвести определенные отождествления граничных точек; кроме того, исходное многообразие интерпретируется как одна часть края пленки, а перестроенное — как другая часть (не пересекающаяся с первой). Так как у нас будут две пленки, реализующие ϕ и ϕ', то удобно будет чуть-чуть изменить обозначения: при построении первой пленки мы будем обозначать интервал в (*) через I и считать, что $I = [0, 1]$, а при построении второй пленки мы будем обозначать интервал через I' и считать, что $I' = [1, 2]$. (Это соответствует тому, что если M лежит в евклидовом пространстве $\mathscr{E}$, первая пленка расположена в $\mathscr{E} \times I$ (причем $\mathscr{E}$ мы естественным образом отождествляем с $\mathscr{E} \times \{0\}$) и M' получается в пересечении этой пленки с $\mathscr{E} \times \{1\}$, то вторую пленку естественно расположить в $\mathscr{E} \times I'$; тогда пленка, реализующая последовательность перестроек ϕ и ϕ', будет просто объединением этих двух пленок, как это обсуждалось в § 6. Она будет расположена в $\mathscr{E} \times I''$, где $I'' = I \cup I' = [0, 2]$, и конечным результатом перестроек ϕ, ϕ' будет ее пересечение с $\mathscr{E} \times \{2\}$. Мы будем доказывать, что она гомеоморфна $M \times I''$.)

Далее, пленка, реализующая перестройку ϕ, получается добавлением к $(M \setminus B) \times I$ $(n+1)$-мерной клетки E с надлежащим отождествлением граничных точек. Пересечение клетки E с M равно B, тогда как ее пересечение с M' есть множество $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$, добавляемое к $M \setminus B$ при построении ϕ. С другой стороны, пленка, реализующая ϕ', получается добавлением к $(M' \setminus B') \times I'$ $(n+1)$-мерной клетки E', пересечение которой с M' равно B'. Поэтому пересечение клеток E и E' совпадает с пересечением множеств B' и $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$. Это пересечение можно записать как $E^{r+1} \times E_1^{n-r-1}$ (см. замечание, сделанное выше о строении окрестности B'). Существенно то, что это n-мерная клетка. Таким образом, $(n+1)$-мерные клетки E и E' пересекаются по n-мерной клетке, лежащей на границе каждой из них. Отсюда следует, что $E \cup E'$ есть $(n+1)$-мерная клетка.

Замечание[1]). Читателю рекомендуется, прежде всего, изобразить на рисунке склеивание двух двумерных или трехмерных клеток E, E' по одномерной, соответственно двумерной, клетке $K = \Sigma \cap \Sigma'$, где Σ и Σ' — границы E и E', и убедиться, что получается снова клетка. Нетрудно сообразить, что этот факт тесно связан с таким: в данном случае $\Sigma \setminus K$ и $\Sigma' \setminus K$ — тоже клетки.

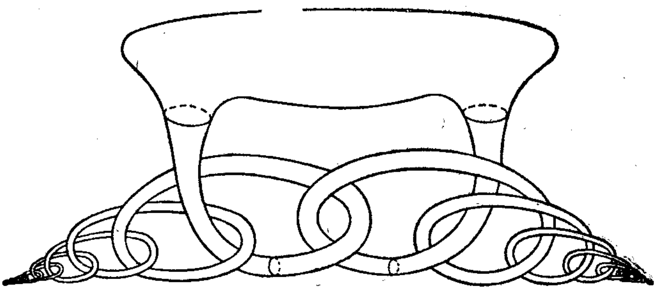
---

[1]) Добавлено редактором перевода. — *Прим. ред.*

Вероятно, довольно неожиданным покажется следующее предостережение: при $n \geqslant 3$ на n-мерной сфере S^n существует такое множество K, гомеоморфное шару

$$D^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum x_i^2 \leqslant 1\right\},$$

что $S^n \setminus K$ не гомеоморфно $\operatorname{Int} D^n$. Перефразировка: при $n \geqslant 3$ в евклидовом n-мерном пространстве R^n существует гомеоморфное сфере S^{n-1} множество, делящее R^n на такие две области, что замыкание внутренней области гомеоморфно D^n, но внешняя не гомеоморфна $R^n \setminus D^n$. Этот монстр заслуживает того, чтобы на него посмотреть:



(Каждое щупальце образует бесконечное число петель, стягивающихся к одной точке.) Заметим, что нарушение гладкости в «концах щупалец» является, в некотором смысле, более сильным, чем то, которое бывает связано с наличием «углов».

С другой стороны, сравнительно легко доказать, что $E \cup E'$ будет клеткой при гладких E, E', K. Впрочем, та негладкость, которая возникает при построениях этого раздела, как и в § 6, связана только с появлением «углов»; *такая* негладкость еще не мешает, но в общем случае это доказывается сложнее.

Далее будут еще два места, где можно сделать аналогичное замечание: во-первых, построение клетки E''; во-вторых, когда определенная часть границы E'' представится в виде $S^{n-1} \times I''$ и мы захотим продолжить это представление до представления $E'' = D^n \times I''$. Когда имеется всего два-три излома во вполне определенных местах, то можно рассчитывать, что удастся придумать короткое рассуждение, учитывающее специфику именно данных изломов; однако если в довольно длинном построении углы возникают на каждом шагу, то к концу их накопится довольно много и они будут расположены в самых разных частях фигуры. Тогда ничего иного не остается делать, кроме как считать, что мы рассматриваем «общий» случай «фигур с углами», а это значит развить целую теорию с точными определениями, леммами и тому подобным. Проще все время «сглаживать» углы.

Теперь мы добавим к $E \cup E'$ еще несколько кусков так, что в результате по-прежнему получится $(n+1)$-мерная клетка. Сначала добавим множество $E_0^n \times I$, лежащее в $(M \setminus B) \times I$; здесь E_0^n — как и раньше, окрестность клетки E_0^{r+1} в $M \setminus B$. Множество $E_0^n \times I$ пересекает $E \cup E'$ по двум множествам: первое — $E_0^n \times \{1\}$ (это пересечение с E'), а второе имеет вид $S^r \times E_1^{n-r-1} \times I$ (это пересечение с E; оно возникает из-за того, что пересечение E_0^n с B имеет вид $S^r \times E_1^{n-r-1}$). Теперь легко видеть, что объединение $E_0^n \times I$ с $E \cup E'$ по-прежнему является $(n+1)$-мерной клеткой.

Относительно доказательства последнего утверждения укажем следующее. Пусть E^{n+1} есть $(n+1)$-мерная клетка, ограниченная сферой S^n, а K — любое n-мерное многообразие с краем, лежащее в S^n. Тогда объединение E^{n+1} и $K \times I$, в котором точки K в E^{n+1} отождествляются с точками множества $K \times \{0\}$ в $K \times I$, является $(n+1)$-мерной клеткой. Это почти тривиально. Наша ситуация немножко сложнее: в крае многообразия K имеется такое $(n-1)$-мерное подмногообразие L, что S^n содержит множество $L \times I$, часть $L \times \{0\}$ которого отождествляется с L, а остальная часть с K не пересекается; это множество $L \times I$ в S^n отождествляется с множеством $L \times I$ в $K \times I$. Надо показать, что в результате по-прежнему получается $(n+1)$-мерная клетка.

Теперь заметим, что точки, только что добавленные к $E \cup E'$, все содержатся в пленке, реализующей перестройку ϕ. Напомним также, что существует некая симметрия между перестройкой ϕ' и перестройкой, обратной к ϕ; об этом уже говорилось. Еще одно множество точек, которое мы сейчас добавим к $E \cup E'$, лежит в пленке, реализующей ϕ', и выступает по отношению к перестройке, обратной к ϕ', в той же роли, в какой выступает уже добавленное нами множество $E_0^n \times I$ по отношению к перестройке ϕ. А именно, мы добавим множество вида $E_1^n \times I'$, где

E_1^n — уже упоминавшаяся окрестность клетки E_2^{n-r-1} (второй половины сферы S^{n-r-1}) в $M' \setminus B'$. При этом граничные точки снова отождествятся так, что в результате получится $(n+1)$-мерная клетка.

Обозначим через E'' $(n+1)$-мерную клетку, полученную добавлением к $E \cup E'$ двух только что описанных множеств, и посмотрим, что останется от пленки, реализующей перестройки ϕ и ϕ', после удаления E''. То, что останется от пленки, реализующей ϕ, представляет собой произведение $(M \setminus B) \times I$, из которого выброшено множество $E_0^n \times I$. Результат имеет вид $N \times I$, где $N = M \setminus B \setminus E_0^n$. Заметим, что $N \times \{1\}$ есть дополнение в M' к окрестностям сфер S^{n-r-1} и S^{r+1}. Аналогично, дополнение к E'' в пленке, реализующей ϕ', имеет вид $N' \times I'$. Но так как оно пересекается с M' по тому же множеству, что и $N \times I$, N' будет равно $N \times \{1\}$. Таким образом, дополнение к E'' в общей пленке перестроек ϕ, ϕ' имеет вид $N \times I''$. Кроме того, структура произведения на $N \times I''$ индуцирует структуру произведения на части границы E'', остальная же часть состоит из двух n-мерных клеток, а именно клетки $B \cup E_0^n$ в исходном многообразии M и аналогичного множества на многообразии, полученном в результате последовательного проведения перестроек ϕ и ϕ'. Эту структуру произведения можно продолжить до структуры на всей клетке E'', которая тогда представится в виде произведения отрезка I'' на n-мерную клетку, и если теперь мы соединим это E'', представленное как произведение, с произведением $N \times I''$, то окажется, что пленка, реализующая последовательность перестроек ϕ, ϕ', представляется в виде произведения $M \times I''$. В частности, это означает, что последовательное выполнение перестроек ϕ и ϕ' дает тождественное преобразование многообразия M.

Если перестройки ϕ и ϕ' связаны так, как описано выше, то мы будем говорить, что перестройка ϕ' *компенсирует* перестройку ϕ. Суммируя наши результаты, можно сказать, что при последовательном выполнении перестройки и компенсирующей ее перестройки многообразие M не меняется, а пленка, реализующая эти две перестройки, имеет вид $M \times I$.

Приложение к трехмерным многообразиям

Из результата предыдущего раздела вытекает интересное следствие, относящееся к строению ориентируемого трехмерного многообразия.

Сначала заметим, что, вообще, если ϕ — сферическая перестройка типа r на M, удовлетворяющая условию предыдущего раздела, то ϕ преобразует M в M', а компенсирующая перестройка ϕ' преобразует M' обратно в M. Но это означает, что перестройка, обратная к ϕ', преобразует M в M', причем тип этой перестройки равен $n-r-2$. Другими словами, если многообразие M превратилось в M' в результате перестройки типа r, удовлетворяющей условию предыдущего раздела, то M можно также превратить в M' некоторой перестройкой типа $n-r-2$.

Пусть теперь M — компактное ориентируемое трехмерное многообразие (связное и без края). Существует теорема[1]), утверждающая, что каждое такое многообразие является краем некоторого ориентируемого четырехмерного многообразия (см. [51]). Мы можем удалить из этого четырехмерного многообразия четырехмерную клетку; получится многообразие, край которого является несвязным объединением многообразия M и трехмерной сферы. Следовательно (теорема 6.3), можно получить M из сферы при помощи конечного числа сферических перестроек, причем все перестройки типов 0 и 2 будут сохранять ориентацию[2]). Каждая ориентируемая перестройка

---

[1]) Впервые доказанная В. А. Рохлиным. — *Прим. ред.*

[2]) В данном случае перестройка ϕ', обратная к перестройке ϕ типа 2, является перестройкой типа 0, и мы говорим, что ϕ сохраняет ориентацию, если ϕ' сохраняет ориентацию. Сохранение ориентации при всех перестройках следует из того, что в данном случае можно «согласованно» ориентировать все многообразия уровня функции, соответствующей перестройке. Для этого надо воспользоваться ориентацией пленки и тем, что для любой ее некритической точки в касательном пространстве к пленке имеется однозначно выделенный луч, перпендикулярный к многообразию уровня и направленный в сторону возрастания функции. — *Прим. ред.*

типа 0 заведомо удовлетворяет условию предыдущего раздела, так как сфера S^0, стягиваемая такой перестройкой, является границей клетки E', а концы этой клетки в процессе перестройки соединяются, образуя прямо вложенную окружность. Поэтому, следуя сделанному выше замечанию, мы можем заменить каждую перестройку типа 0 на пути от S^3 до M перестройкой типа 1. Перестройки типа 2 обратны к перестройкам типа 0, так что их тоже можно заменить перестройками типа 1 (в данном случае перестройка, обратная к перестройке типа 1, также имеет тип 1). Следовательно, данное многообразие M получается из трехмерной сферы конечным числом перестроек типа 1.

Описывая явно действие перестройки типа 1, мы приходим к следующей теореме[1]:

Теорема 8.1. *Ориентируемое компактное трехмерное многообразие (связное и без края) можно получить из трехмерной сферы, если вырезать из нее конечное число непересекающихся сплошных торов (множеств вида $S^1 \times E$) и заполнить получившиеся полости новыми сплошными торами, подходящим способом отождествляя границы.*

Отметим, что граница каждой полости имеет вид $S^1 \times S^1$, и существует на самом деле бесконечное число способов отождествить ее с границей сплошного тора; поэтому существует бесконечное число различных построений такого сорта. Однако нелегко решить вопрос о том, когда два таких различных построения приведут к одинаковому результату. Для этого в первую очередь понадобилось бы решение проблемы Пуанкаре. Гипотеза Пуанкаре заключается в том, что всякое ориентируемое трехмерное многообразие, на котором любую окружность можно стянуть в точку, является на самом деле трехмерной сферой. Она не доказана и не опровергнута.

---

[1]) Принадлежащей Дену, который доказывал ее иначе (это было задолго до появления теоремы Рохлина). — *Прим. ред.*