§ 1. Описание движения материальной точки

1.1. Система отсчета. Пространство и время в классической механике. Под движением материальной точки в пространстве понимают изменение ее положения относительно некоторых тел с течением времени. В связи с этим можно говорить только о движении в некоторой *системе отсчета*. Система отсчета — это совокупность тела или неподвижных относительно друг друга тел отсчета и набора измерительных инструментов, позволяющих определять расстояния по прямой линии, углы, моменты и промежутки времени. Кратко об этом наборе говорят как о пространственных масштабах и часах.

Сами по себе точки пустого пространства неразличимы между собой, поэтому говорить о той или иной точке пространства можно, если в ней находится материальная точка. Ее положение и определяется относительно тела отсчета с помощью измерений, для чего с телом (телами) отсчета жестко связывается некоторая система координат; в ней и измеряются пространственные координаты. Например, на поверхности Земли это географическая широта и долгота точки, в аудитории — три расстояния от точки до пола и двух стен, образующих прямой двугранный угол, и т. д.

В теоретических рассуждениях часто наиболее удобна декартова прямоугольная система координат, в которой положение точки определяется радиус-вектором $\vec{r}$ с тремя проекциями x, y, z — координатами точки. Но возможно использование и других систем координат, например сферической, где положение точки или ее радиус-вектор определены координатами r, ϑ, φ; цилиндрической: ρ, z, α, на плоскости — полярной: r, φ. В теоретических рассуждениях часто не принимают во внимание реальную систему отсчета, сохраняя только систему координат, которая и служит математической моделью системы отсчета, применяемой при измерениях на практике.

Определение всех возможных положений материальной точки в пространстве в любой системе отсчета приводит к множеству троек действительных чисел, обозначающих множество геометрических точек. Это множество составляет геометрическое пространство. Оно *трехмерно* (точки имеют три координаты), *непрерывно* (между двумя как угодно близкими точками найдется бесконечно много других точек, т. е. возможны самые малые расстояния между точками пространства), обладает топологическим свойством односвязности.

В системах отсчета, называемых инерциальными, пространство однородно — все точки равноправны — и изотропно — равноправны все направления — евклидово (справедлива геометрия Евклида).

Все перечисленные свойства пространства не являются априорными, а вытекают из опыта и практики и ими подтверждаются Все они используются в физике Так, в ней применяются геометрические теоремы, формулы геометрии, тригонометрии Непрерывность пространства позволяет рассматривать бесконечно малые расстояния, площади, объемы, соответственно применяя средства дифференциального и интегрального исчисления и т д

При построении теории исходные обобщения данных эксперимента и практики выражаются в аксиомах или постулатах В соответствии с этим перечисленные свойства геометрического пространства в классической механике *постулируются* Надо

подчеркнуть, что данные свойства оказываются универсальными для всех изучаемых в нашем курсе теорий, т. е. геометрическая модель пространства остается справедливой и применяется в электродинамике, квантовой механике, статистике, электронной теории и физике ядра

Для изучения движения материальной точки необходимо определять моменты времени, в которые материальная точка имеет те или иные пространственные координаты. Но для этого нужно располагать часами в каждой точке пространства (например, множеством часов на определенных расстояниях друг от друга при движении поезда, т. е. на каждой железнодорожной станции). По часам фиксируется момент времени t, в который материальная точка имеет координаты x, y, z. *Попадание материальной точки в точку пространства с координатами x, y, z в момент времени t называется элементарным механическим событием.*

Подчеркнем, что элементарное механическое событие, имеющее место в некоторой системе отсчета, обязательно наблюдается и во всех других возможных системах отсчета. В этом смысле говорят об его *инвариантности* по отношению к системам отсчета. Что же касается координат события и момента времени, то эти четыре числа могут быть различными в различных системах отсчета и системах координат.

Непрерывная совокупность последовательных событий и составляет механическое движение. Но чтобы такая совокупность имела смысл, необходима синхронизация всех часов в данной системе отсчета. На практике синхронизация производится с помощью сигналов точного времени. В принципе синхронизация сводится к установке всех часов системы на нуль по сигналу, испускаемому из начала в нулевой момент времени по часам, установленным в начале координат.

В классической механике предполагается, что синхронизирующий сигнал распространяется с бесконечной скоростью. Но в природе самый быстрый сигнал имеет скорость $c = 3 \cdot 10^8$ м/с (скорость света). В связи с этим оказывается, что классическая механика применима в той области движения, где запаздыванием синхронизирующего сигнала по сравнению с рассматриваемыми временами движения тел можно пренебречь, т. е. по сравнению с изучаемыми в механике скоростями тел можно принять $c = \infty$, а последнее возможно, если $v << c$.

С помощью синхронизации устанавливается единое время в системе отсчета. Множество моментов времени считается *непрерывным, одномерным, однородным.* Этот вывод сделан на основе всей практической деятельности людей. Непрерывность времени состоит в существовании как угодно малых его промежутков. Однородность времени означает равноправие всех его моментов, что позволяет произвольно выбирать начало отсчета времени в любой системе.

Одномерность времени состоит в том, что его точки — моменты определяются одним числом, т. е. множеству точек времени можно сопоставить числовую ось, тогда как физическому пространству — трехмерное геометрическое пространство. Опыт показывает, что вре-

мя *однонаправленно,* т. е. возвратиться к прошлому моменту времени в известных нам системах отсчета физически невозможно. Однонаправленность времени означает также, что при любом выборе начала отсчета часы в любой системе отсчета дают монотонно увеличивающиеся показания.

Свойства времени и возможность синхронизации часов сигналами, мгновенно покрывающими расстояния (с бесконечно большой скоростью), в классической механике постулируются.

Перечисленные свойства времени также универсальны для всех фундаментальных физических теорий, как и свойства пространства Бесконечная же скорость синхронизирующего сигнала есть очевидное приближение От него приходится отказаться при изучении тех разделов физики, где имеют дело с высокими скоростями движения физических объектов в электродинамике, СТО, ядерной физике и т д

Итак, в любой системе отсчета и системе координат имеется возможность определить координаты материальной точки в любой момент времени.

1.2. Кинематические уравнения движения материальной точки. Если положение материальной точки в каждый момент времени определено в данной системе отсчета, то движение ее задано или описано. Это задание достигается в виде кинематического уравнения движения:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{1.1}$$

Аналитически положение точки всегда определяется совокупностью трех независимых между собой чисел. Этот факт выражают словами: *свободная точка имеет три степени свободы движения*[1].

Движение точки согласно уравнению (1.1) полностью определено, если указано ее положение в любой момент времени t. Для этой цели достаточно задать декартовы координаты точки как однозначные и непрерывные функции времени:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \tag{1.2}$$

Прямоугольные декартовы координаты x, y, z являются проекциями радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного в точку из начала координат, т. е. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Длина и направление вектора $\vec{r}$ находятся из известных соотношений: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\cos\alpha = \frac{x}{r},\ \cos\beta = \frac{y}{r},\ \cos\gamma = \frac{z}{r}.$$

Здесь α, β, γ — углы, образованные радиус-вектором с координатными осями.

Равенства (1.2) являются *кинематическими уравнениями* движения материальной точки в декартовых координатах. Но уравнения могут быть записаны в любой другой системе координат, связанной с декартовой взаимно однозначным преобразованием. При движении точки в плоскости Oxy часто бывает удобно пользоваться полярными

[1] Свободная точка та, движение которой не ограничено в пространстве телами конечных размеров — поверхностями, линиями и т д

координатами r и φ, связанными с декартовыми преобразованием: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. В этом случае кинематические уравнения движения точки имеют следующий общий вид:

$$r = r(t),\ \varphi = \varphi(t). \tag{1.3}$$

В криволинейных координатах q_1, q_2, q_3, связанных с декартовыми преобразованием:

$$x = x(q_1q_2q_3),\ y = y(q_1q_2q_3),\ z = z(q_1q_2q_3), \tag{1.4}$$

кинематические уравнения движения точки запишутся так:

$$q_1 = q_1(t),\ q_2 = q_2(t),\ q_3 = q_3(t). \tag{1.5}$$

(Это могут быть сферические, цилиндрические и другие координаты.)

Годограф радиус-вектора точки, т. е. кривая, описываемая концом вектора $\vec{r}$ при движении точки, *совпадает с траекторией движения этой точки.* Уравнение траектории в параметрической форме, когда параметром служит время t, дано кинематическими уравнениями движения (1.2), (1.5). Для получения уравнения траектории в координатной форме достаточно исключить из кинематических уравнений время.

Движение точки может быть определено по-другому: заданием траектории и мгновенным положением точки на ней. Положение точки на кривой определяется указанием только одной величины — расстояния, измеряемого вдоль кривой от некоторой начальной точки. При этом должно быть указано положительное направление кривой. Тогда мгновенное положение точки на заданной кривой определяется функцией

$$s = s(t). \tag{1.6}$$

Это уравнение является уравнением движения точки по траектории. Такой способ задания движения называется *естественным* или траекторным.

Координатный и естественный способы задания движения точки физически (в смысле фиксации ее положения в пространстве) эквивалентны. Что же касается математической стороны дела, то в одних задачах оказывается проще применение координатного, а в другом — естественного метода.

Закон движения точки по траектории может быть задан *аналитически* (1.6), *графически* или в виде *таблицы.* Оба последних способа широко применяются на транспорте (например, графики и расписания движения поездов).

Пример 1.1. **Переход от координатного к естественному методу описания движения.**

Пусть движение материальной точки задано уравнениями

$$x = R\cos\omega t,\ y = R\sin\omega t.$$

Исключая время, имеем: $x^2 + y^2 = R^2$
— материальная точка движется по окружности радиуса r с центром в начале координат декартовой системы Oxy.

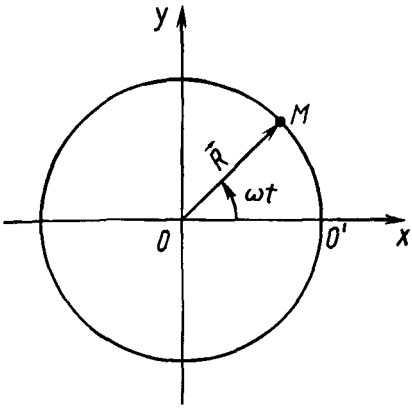

Рис. 1.1.

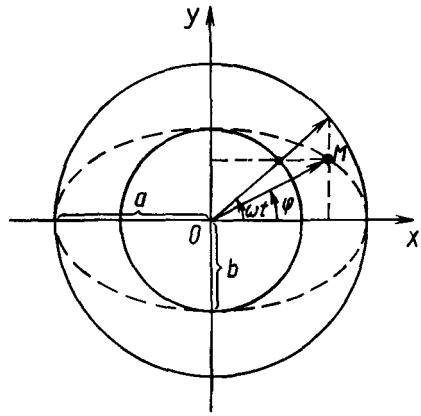

Рис.1.2.

Из рисунка 1.1. видно, что радиус-вектор точки поворачивается из начального положения по оси Ox против часовой стрелки, так что угол поворота в момент времени t составляет ωt. Если точку O' выбрать за начало отсчета дуг, определяющих положение материальной точки на траектории, то кинематический закон движения в естественной форме имеет вид: $s = \omega R t$.

Пример 1.2. **Переход от декартовой системы к полярной.**

Для кинематических уравнений предыдущей задачи имеем: $r = \frac{x}{\cos\varphi}$, $r = \frac{y}{\sin\varphi}$. Если $\varphi = \omega t$, то $r = R = \text{const}$ и уравнения движения материальной точки по окружности в полярных координатах будут: $r = R$, $\varphi = \omega t$.

Пример 1.3. **Другой пример перехода от декартовой системы к полярной.**

Пусть движение задано уравнениями

$$x = a\cos\omega t,\ y = b\sin\omega t.$$

Исключая время, получаем уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Из рисунка 1.2. видно, что

$$r = \sqrt{a^2\cos^2\omega t + b^2\sin\omega t}\ ,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\omega t\ ,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}\omega t\right).$$

Из примера видно, что в данном случае в декартовых координатах уравнение движения выглядит значительно проще, нежели в полярных.

1.3. Скорость движения точки. *Скоростью называется производная радиус-вектора точки по времени движения точки:*

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \qquad (1.7)$$

Из определения следует, что скорость есть вектор, направленный по касательной к траектории в сторону движения точки.

Как всякий вектор, скорость можно разложить на составляющие по осям декартовой системы координат:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}.$$

Дифференцируя радиус-вектор точки по времени и замечая, что координатные векторы (орты) — постоянные величины, имеем:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Сравнение полученного результата с разложением вектора скорости по ортам приводит к выражениям проекций скорости в декартовых координатах:

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}.$$

По этим формулам вычисляется скорость, когда движение точки задано уравнениями (1.2). Величина и направление скорости определяются через известные проекции по обычным формулам:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

$$\cos\alpha = \frac{\dot{x}}{v},\ \cos\beta = \frac{\dot{y}}{v},\ \cos\gamma = \frac{\dot{z}}{v}.$$

Кратко остановимся на физическом смысле разложения вектора скорости на составляющие. Из математики известно, что операция разложения любого вектора по трем некомпланарным всегда возможна и связана с аксиомами, определяющими вектор. С точки зрения физики сложение и разложение векторов отражает некоторые представления одного физического объекта другими. Так, разложение скорости означает замену одного элементарного перемещения материальной точки $d\vec{r} = \vec{v}dt$ совокупностью трех перемещений $dx = v_x dt$, $dy = v_y dt$, $dz = v_z dt$, совершаемых в любой последовательности.

Далее, в § 3, мы познакомимся с другой, физически более содержательной трактовкой сложения и разложения векторов скорости — представлением движения в неподвижной системе отсчета как одновременного движения другой системы и точки в ней.

Перейдем от декартовых к полярным координатам. Для нахождения проекций скорости в полярных координатах, необходимых для вычисления скорости, когда движение задано уравнениями (1.3), найдем предварительно формулы преобразования проекций произвольного вектора $\vec{b}$ при переходе от декартовых координат к полярным. В полярных координатах вектор проектируется на направление радиус-вектора, проведенного в данную точку, и направление, перпендикулярное радиус-вектору, в сторону возрастания полярного угла φ.

Проекцию на первое направление будем обозначать индексом r, на второе φ. Общий вид разложения по ортам полярной системы следующий: $\vec{b} = b_r\vec{r}_0 + b_\varphi\vec{\rho}_0$. Здесь $\vec{r}_0$ — единичный вектор, совпадающий по направлению с радиус-вектором точки; $\vec{\rho}_0$ — перпендикулярный ему единичный вектор, направленный в сторону возрастания угла φ.

Спроецируем предыдущее векторное уравнение на ось Ox и получим равенство

$$b_x = b_r \cos\varphi - b_\varphi \sin\varphi, \tag{1.8}$$

выражающее проекцию вектора на ось Ox через его проекции в полярных координатах. Им и воспользуемся для нахождения проекции скорости в полярных координатах. Для этой цели дифференцируем по времени формулу преобразования координаты x:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r\cos\varphi) = \frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi.$$

Сравнивая полученный результат с (1.7), находим выражения искомых проекций скорости:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r},\ v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}.$$

Ввиду ортогональности полярных координат модуль скорости и ее направление находятся по формулам

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2,\ \cos\alpha = \frac{v_r}{v},\ \cos\beta = \frac{v_\varphi}{v}. \tag{1.9}$$

При естественном способе задания движения проекция скорости на положительное направление касательной к траектории (*алгебраическая величина скорости*) находится дифференцированием уравнения движения по времени:

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{1.10}$$

В зависимости от способа задания движения или системы координат формулы для вычисления проекций скорости оказались разными. Для обобщения способа вычисления скорости найдем формулы для проекций скорости в обобщенных криволинейных координатах q_1, q_2, q_3, являющихся ортогональными. Формулы перехода от декартовых координат к криволинейным имеют вид: $x = x(q_1q_2q_3)$, $y = y(q_1q_2q_3)$, $z = z(q_1q_2q_3)$. Дифференцируя их по времени, получаем выражения для проекций скорости в декартовых координатах:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dfrac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \dfrac{\partial x}{\partial q_3}\dot{q}_3, \\ \dot{y} = \dfrac{\partial y}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dfrac{\partial y}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \dfrac{\partial y}{\partial q_3}\dot{q}_3, \\ \dot{z} = \dfrac{\partial z}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dfrac{\partial z}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \dfrac{\partial z}{\partial q_3}\dot{q}_3. \end{cases} \tag{a}$$

Производные обобщенных координат по времени

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt},\ \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt},\ \dot{q}_3 = \frac{dq_3}{dt}$$

называются обобщенными скоростями. Действительно, в зависимости от размерности обобщенной координаты q ее производная по времени может иметь смысл линейной скорости, угловой скорости и пр.

Найденные формулы (а) показывают, что проекции скорости точки в декартовых координатах являются линейными однородными функциями обобщенных скоростей, коэффициенты $\frac{\partial x}{\partial q_1}$, $\frac{\partial y}{\partial q_2}$ и др. при которых есть в общем случае функции обобщенных координат.

Обозначая через v_1, v_2, v_3 проекции скорости на оси криволинейных координат (на касательные к координатным линиям в сторону возрастания координат q) и учитывая их ортогональность, для квадрата модуля скорости должны иметь выражение $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ Возводя в квадрат векторное разложение скорости с учетом формул (а) и суммируя полученные результаты, получим:

$$v^2 = H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2 . \tag{1.11}$$

Члены с произведениями q_1q_2, q_1q_3, q_2q_3 в силу ортогональности системы координат в скалярном произведении должны отсутствовать. Здесь через H_1, H_2, H_3 обозначены следующие выражения, являющиеся функциями обобщенных координат:

$$\begin{cases} H_1 = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}, \\ H_2 = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}, \\ H_3 = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}, \end{cases} \tag{1.12}$$

Эти величины называются коэффициентами Ламэ. Искомые проекции скорости в криволинейных координатах будут иметь вид:

$$v_1 = H_1\dot{q}_1, \; v_2 = H_2\dot{q}_2, \; v_3 = H_3\dot{q}_3.$$

Рассмотрим также понятие секторной скорости. На рисунке 1.3 изображены траектория движущейся точки и ее радиус-вектор. За элемент времени dt радиус-вектор опишет элементарную площадку — элементарный сектор $d\vec{S}$. По договоренности вектор элементарной площадки имеет модуль, равный ее площади, а направлен по нормали к площадке в сторону, образующую с направлением обхода контура площадки правовинтовую систему.

Вектор

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} \tag{1.13}$$

называют *секторной* скоростью точки. С точностью до бесконечно малых второго порядка площадь элементарного сектора совпадает с площадью треугольника, образованного векторами $\vec{r}(t)$, $d\vec{r}$ и $\vec{r}(t + dt)$. Легко проверить, что вектор элементарной площадки треугольника есть $d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}d\vec{r}]$; направление обхода контура элементарного сектора определяется направлением движения точки или направлением обхода в порядке векторов-сомножителей, если смотреть от конца вектора-произведения. Для вектора секторной скорости получаем формулу

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \frac{1}{2}[\vec{r}\,\vec{v}]. \tag{1.14}$$

Когда траекторией движения служит плоская кривая, секторная скорость всегда направлена по нормали к плоскости движения. Про-

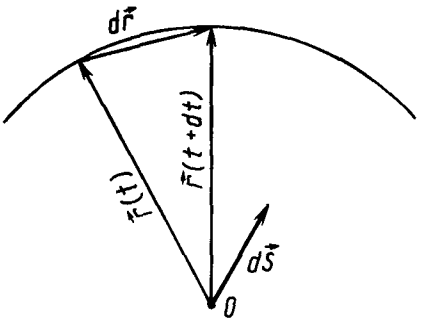

Рис. 1.3.

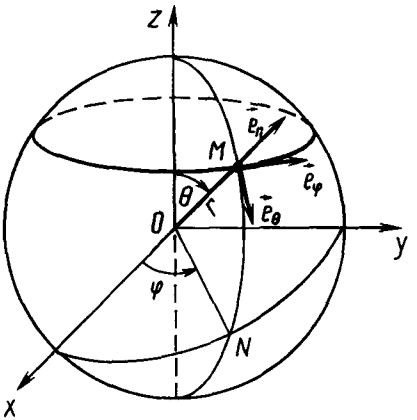

Рис. 1.4.

екцию ее на нормаль в этом случае удобно вычислять в полярных координатах (полюсом служит точка O). Элементарный сектор с точностью до бесконечно малых второго порядка можно считать круговым и его площадь равной $dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$. Отсюда для проекции секторной скорости на нормаль получаем выражение $\sigma_n = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$, а для модуля имеем: $\sigma = \frac{1}{2} r^2 |\dot{\varphi}|$. (1.15)

Пример 1.4. **Вычисление скорости в сферических координатах.**

В сферических координатах (рис. 1.4) кинематические уравнения движения имеют вид: $r = r(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$.

Известна связь между сферическими и декартовыми координатами:

$$x = r\sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta.$$

Обобщенными скоростями в этой системе являются $\dot{q}_1 = \dot{r}$, $\dot{q}_2 = \dot{\vartheta}$, $\dot{q}_3 = \dot{\varphi}$. Для нахождения проекций скоростей на координатные линии $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$, $\vec{e}_\varphi$ надо вычислить коэффициенты Ламэ (1.12):

$$H_1 = \sqrt{\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta} = 1,$$

$$H_2 = \sqrt{r^2\cos^2\vartheta\cos\varphi + r^2\cos^2\vartheta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\vartheta} = r,$$

$$H_3 = \sqrt{r^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi} = r\sin\vartheta.$$

Следовательно, по формулам (1.11)

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\cdot\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,$$

$$v^2 = r^2 + r^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\cdot\dot{\varphi}^2).$$

Пример 1.5. **Расчет скорости в цилиндрических координатах.**

Кинематические уравнения имеют вид (рис. 1.5): $\rho = \rho(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $z = z(t)$. Аналогичный предыдущему расчет дает: $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_r + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$; $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$.

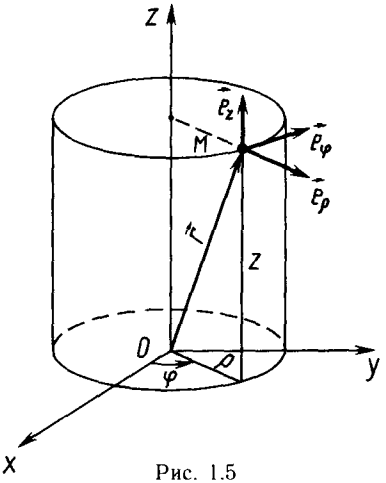

Рис. 1.5

Пример 1.6 **Расчет секторной скорости в декартовых координатах.**

Пользуясь формулой (1.14) и формулами проекций скорости в декартовых координатах, записываем:

$$\sigma_x = \frac{1}{2}(y\dot{z} - z\dot{y}),\ \sigma_y = \frac{1}{2}(z\dot{x} - x\dot{z}),$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Если $\vec{r}$ и $\vec{v}$ лежат в плоскости xOy, то секторная скорость направлена по оси Oz и имеется единственная, отличная от нуля ее проекция:

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

1.4. Ускорение движения точки.

Ускорение движения материальной точки есть производная вектора скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}. \qquad (1.16)$$

Вектор ускорения направлен по касательной годографа вектора скорости. Из (1.16) следует, что *вектор ускорения является второй производной радиус-вектора точки по времени:*

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \qquad (1.17)$$

Проекции ускорения в декартовых прямоугольных координатах выражаются наиболее просто. Разлагая вектор скорости по ортам, имеем:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}.$$

Дифференцируя это равенство по времени, находим:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}.$$

В правой части этого равенства имеем разложение ускорения по ортам, т. е. проекции ускорения в декартовых координатах выражаются формулами

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x},\quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y},\quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z}.$$

Для нахождения проекций ускорения в полярных координатах на плоскости дважды дифференцируем по времени формулу преобразования координаты $x = r\cos\varphi$. Получаем: $a_x = (\ddot{r} - r\ddot{\varphi}^2)\cos\varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\sin\varphi$. На основании общего закона преобразования

проекций вектора на ось при переходе к полярным координатам (1.8) сразу получаем искомые проекции ускорения в этих координатах:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \qquad (1.18)$$

Модуль и направление вектора ускорения $\vec{a}$ через его проекции в ортогональной системе координат вычисляются по стандартным формулам, приведенным в предыдущем параграфе.

При естественном способе задания движения необходимо знать проекции ускорения на оси естественного трехгранника: на положительное направление касательной к траектории, по которому направим единичный вектор $\vec{\tau}$, на главную нормаль $\vec{n}$ и бинормаль $\vec{b}$ (рис. 1.6). Из определения ускорения (1.17) следует, что вектор ускорения всегда лежит в соприкасающейся плоскости траектории и поэтому проекция ускорения на бинормаль равна нулю (вектор $d\vec{v}$ есть сторона треугольника; двумя другими сторонами являются касательные в смежных точках траектории). Разложение вектора ускорения по осям естественного трехгранника по указанной причине имеет следующий вид: $\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}$.

Проекция a_τ называется *тангенциальным* ускорением, а проекция a_n — *нормальным* ускорением. Разложение скорости по тем же направлениям дает: $\vec{v} = v\vec{\tau}$.

Здесь v называют *алгебраической* величиной скорости; это проекция вектора скорости на касательную к траектории. Дифференцируем последнее равенство по времени: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$. Годографом единичного вектора является окружность в соприкасающейся плоскости. Производная $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ направлена по главной нормали. Численная величина производной $\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|$, как легко установить из рисунка 1.7, равна $\frac{d\vartheta}{dt}$, где $d\vartheta$ — угол между касательными к траек-

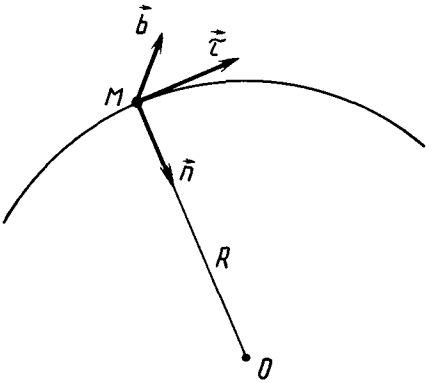

Рис. 1.6.

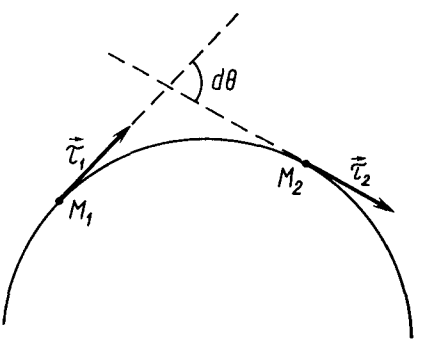

Рис. 1.7.

тории в смежных точках. Поэтому имеем:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\vec{n} = \frac{d\vartheta}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{n} = v\frac{d\vartheta}{ds}\vec{n}.$$

Отношение $\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\rho}$ определяет кривизну в данной точке, так как ρ — радиус кривизны. Получаем окончательный результат:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}. \tag{1.19}$$

Сравнивая (1.19) с общим видом разложения ускорения по осям естественного трехгранника, получаем формулы для тангенциального и нормального ускорений:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}. \tag{1.20}$$

Пример 1.7. **Проекции ускорения в сферических координатах.**

Дадим их без вычислений:

$$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta),$$
$$a_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) - r\dot{\varphi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta,$$
$$a_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta).$$

Обоснование формул будет дано в гл. VI.

Пример 1.8. **Проекции ускорения в цилиндрических координатах.**

$$a_r = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2,$$
$$a_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}),$$
$$a_z = \ddot{z}.$$

Пример 1.9. **Нахождение скорости и ускорения материальной точки по заданным кинематическим уравнениям.**

$$x = R\cos\omega t,$$
$$y = R\sin\omega t.$$

Дифференцируя эти равенства по времени, имеем:

$$v_x = -R\omega\sin\omega t, \; v_y = R\omega\cos\omega t, \; v = R\omega;$$
$$a_x = -R\omega^2\cos\omega t, \; a_y = -R\omega^2\sin\omega t, \; a = R\omega^2.$$

Из сравнения проекций ускорения с проекциями радиус-вектора точки замечаем, что в данном движении

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{R}.$$

Применяя естественный метод описания движения и дифференцируя закон движения точки по траектории $s = \omega Rt$, находим: $v = \omega R$ (см. пример 1.1).

По формулам (1.20) следует, что

$$a_\tau = 0, \; a_n = \frac{\omega^2R^2}{R} = \omega^2R.$$

Пример 1.10. **Расчет секторной скорости.**

Движение задано уравнениями $x = a\cos\omega t$, $y = b\sin\omega t$ и является неравномерным движением точки по эллипсу с центром в начале координат (см. рис. 1.2). В декартовых координатах скорость найдется дифференцированием этих равенств по времени:

$$v_x = -a\omega\sin\omega t,$$
$$v_y = b\omega\cos\omega t,$$
$$v^2 = a^2\omega^2\sin^2\omega t + b^2\omega^2\cos^2\omega t,$$

а ускорение

$$a_x = -a\omega^2\cos\omega t,\ a_y = -b\omega^2\sin\omega t,$$

т. е.

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r};$$

ускорение пропорционально удалению материальной точки от центра эллипса и направлено к центру.

Найдем еще секторную скорость точки в данном движении (см. пример 1.6):

$$\sigma = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) = (a\cos\omega t b\omega\cos\omega t + b\sin\omega t\, a\omega\sin\omega t) = ab\omega.$$

Таким образом, секторная скорость постоянна. Так как циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то

$$\sigma = \frac{2\pi ab}{T}$$

и есть скорость описания радиус-вектором площади эллипса.

Пример 1.11. **Движение точки по эллипсу.**

Рассмотрим пример движения материальной точки, моделирующий движение планет в Солнечной системе.

Пусть точка движения по эллипсу с постоянной секторной скоростью и начало координат помещено в одном из фокусов эллипса. Скорость и ускорение будем искать в полярных координатах, в которых и зададим уравнение эллипса:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

где p — параметр, а e — эксцентриситет эллипса. Постоянство секторной скорости (1.15) выражаем соотношением

$$\sigma = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{C}{2},$$

или

$$r^2\dot{\varphi} = C.$$

Выразим скорость движения точки по эллипсу по (1.10): $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$.

Так как кинематические уравнения движения не заданы, перейдем в последнем выражении от дифференцирования по времени к дифференцированию по полярному углу φ:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\,\frac{C}{r^2},$$

$$v^2 = C^2\left[\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right].$$

Удобно ввести новую переменную $x = \frac{1}{r}$, и тогда $v^2 = C^2\left[\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + x^2\right]$, а $x = \frac{1 + e\cos\varphi}{p}$, т. е. v выражена как функция полярного угла.

Рассчитаем ускорение. По (1.18) имеем:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2,$$

$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi},$$

а дифференцируя по времени постоянную секторную скорость, находим:

$$2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0, \quad r(2\dot{r}\varphi + r\ddot{\varphi}) = 0,$$

т. е.

$$a_\varphi = 0, \quad a = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2.$$

Аналогично расчету скорости получаем: $a = -C^2x^2\left(\frac{d^2x}{d\varphi^2} + x\right)$.

Подставляя сюда значение x, имеем:

$$a = -\frac{mC^2x^2}{p} = -\frac{mC^2}{p}\frac{1}{r^2}.$$

Ускорение в этом движении направлено к фокусу эллипса и обратно пропорционально квадрату расстояния до него.

§ 2. Кинематика движения твердого тела

2.1. Координаты твердого тела. Кинематические уравнения движения. *Под твердым телом в механике понимается непрерывная система материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными.* Аналитическое описание положения твердого тела в пространстве, а также изменения этого положения со временем, т. е. движения тела, должно определять положение и движение любой точки тела. Хотя число точек твердого тела неограниченно, число степеней свободы благодаря жестким связям невелико.

Определим число степеней свободы *свободного,* т. е. имеющего возможность произвольно перемещаться, твердого тела. Проведем для этой цели простое рассуждение. Материальная точка имеет три степени свободы. Две точки имеют шесть независимых координат. Если наложить условие неизменности расстояния между точками, то координаты двух точек должны удовлетворять уравнению:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{1,2}^2.$$

Здесь $l_{1,2}$ — расстояние между точками. Это уравнение позволяет выразить одну из координат через остальные пять, которые остаются произвольными. Таким образом, для определения положения системы из двух точек достаточно знать только пять декартовых координат из шести.

Если имеем систему из трех точек, не лежащих на одной прямой, то можно написать три независимых уравнения, выражающие расстояния между точками через их координаты. Если эти расстояния постоянны, то из девяти декартовых координат трех точек только шесть будут независимы. Добавление четвертой точки к этой системе не увеличит число степеней свободы, потому что координаты ее должны удовлетворять трем независимым уравнениям связей, определяющим расстояния этой точки до первых трех.