

Рассчитаем ускорение. По (1.18) имеем:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2,$$

$$a_\varphi = 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi},$$

а дифференцируя по времени постоянную секторную скорость, находим:

$$2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0, \quad r(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0,$$

т. е.

$$a_\varphi = 0, \quad a = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2.$$

Аналогично расчету скорости получаем: $a = -C^2x^2 \left(\frac{d^2x}{d\varphi^2} + x \right)$.

Подставляя сюда значение x , имеем:

$$a = -\frac{mC^2x^2}{p} = -\frac{mC^2}{p} \frac{1}{r^2}.$$

Ускорение в этом движении направлено к фокусу эллипса и обратно пропорционально квадрату расстояния до него.

§ 2. Кинематика движения твердого тела

2.1. Координаты твердого тела. Кинематические уравнения движения. Под твердым телом в механике понимается непрерывная система материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными. Аналитическое описание положения твердого тела в пространстве, а также изменения этого положения со временем, т. е. движения тела, должно определять положение и движение любой точки тела. Хотя число точек твердого тела неограниченно, число степеней свободы благодаря жестким связям невелико.

Определим число степеней свободы свободного, т. е. имеющего возможность произвольно перемещаться, твердого тела. Проведем для этой цели простое рассуждение. Материальная точка имеет три степени свободы. Две точки имеют шесть независимых координат. Если наложить условие неизменности расстояния между точками, то координаты двух точек должны удовлетворять уравнению:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{1,2}^2.$$

Здесь $l_{1,2}$ — расстояние между точками. Это уравнение позволяет выразить одну из координат через остальные пять, которые остаются произвольными. Таким образом, для определения положения системы из двух точек достаточно знать только пять декартовых координат из шести.

Если имеем систему из трех точек, не лежащих на одной прямой, то можно написать три независимых уравнения, выражающие расстояния между точками через их координаты. Если эти расстояния постоянны, то из девяти декартовых координат трех точек только шесть будут независимы. Добавление четвертой точки к этой системе не увеличит число степеней свободы, потому что координаты ее должны удовлетворять трем независимым уравнениям связей, определяющим расстояния этой точки до первых трех.

Дальнейшее увеличение точек в рассматриваемой системе не меняет число независимых координат. Следовательно, *свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы, т. е. для однозначного определения его положения в пространстве необходимо задать шесть независимых координат.*

Рассмотрим, как делается выбор этих шести независимых координат, определяющих положение твердого тела в пространстве. Прежде всего скрепим с телом систему координат. Пусть это будет декартова система $O'x'y'z'$. Положение любой точки твердого тела определяется здесь координатами x' , y' , z' . Заметим, что эти координаты при движении тела остаются постоянными. Поэтому для определения положения твердого тела достаточно знать положение движущейся вместе с телом (подвижной) системы координат $O'x'y'z'$ относительно неподвижной $Oxyz$. На рисунке 2.1. изображены подвижная и неподвижная системы координат, которые в дальнейшем будем называть: подвижная — штрихованная система координат, неподвижная — нештрихованная система координат. Далее решается вопрос об описании движения системы $O'x'y'z'$ в системе $Oxyz$. Полученные результаты нужны не только для изучения движения тела, но и для изучения так называемого относительного движения точки.

Чтобы задать мгновенное положение системы $O'x'y'z'$, надо знать начало координат точки O' , т. е. координаты x_0 , y_0 , z_0 и углы, которые образуют ее оси с осями неподвижной системы. Всего имеется девять направляющих углов. Однако независимых из них будет только три. Действительно, как известно из аналитической геометрии, направляющие косинусы прямой удовлетворяют условию $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Таких уравнений будет три, и, кроме того, можно написать еще три уравнения, выражающие условия перпендикулярности подвижных осей. Девять направляющих углов должны удовлетворять шести независимым между собой уравнениям. Для ориентировки подвижных осей в пространстве, таким образом, достаточно задать только *три угла*.

Итак, вместо девяти направляющих углов, на которые наложено шесть уравнений связей, целесообразно ввести три независимых угла. Выбор этих углов был указан Эйлером, они и носят его имя¹. На рисунке 2.2 показан обычный способ определения углов Эйлера. Начала координат обеих систем совмещены, что всегда можно достигнуть параллельным переносом. Прямая ON , по которой пересекаются плоскости xOy и $x'O'y'$ подвижной и неподвижной систем, называется *линией узлов*. Углы, обозначенные на рисунке через ψ , θ и φ , есть искомые углы Эйлера. Положительное направление отсчета углов показано стрелками.

Угол φ носит название *угла прецессии*, он изменяется при повороте подвижной системы вокруг неподвижной оси Oz как оси вращения (остальные два угла при этом не изменяются).

Угол ψ называется *углом собственного вращения*: при вращении

¹ Сведения об ученых, упомянутых в тексте, см. в кн.: Храмов Ю. А. Физики.

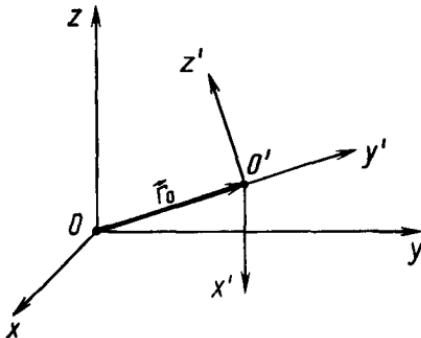


Рис. 2.1.

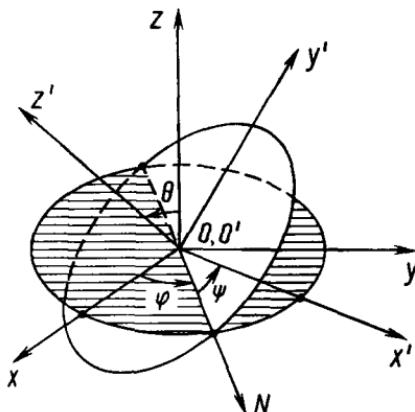


Рис. 2.2

подвижной системы вокруг оси $O'z'$ как оси вращения изменяется только угол ψ .

Угол ϑ называется углом нутации, он изменяется (при постоянстве остальных двух углов), если вращается подвижная система вокруг линии узлов. (Наименования эйлеровых углов происходят от наименований простейших движений волчка, представляющего один из важнейших случаев применения механики к изучению твердого тела.)

Шесть независимых величин: координаты начала подвижной системы x_0, y_0, z_0 и три эйлеровых угла ψ, ϑ, φ — в совокупности однозначно определяют положение подвижной системы координат относительно неподвижной, а значит, и положение твердого тела. Аналитическое описание движения последнего состоит в задании шести однозначных и непрерывных функций времени:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(t), y_0 = y_0(t), z_0 = z_0(t); \\ \psi &= \psi(t), \vartheta = \vartheta(t), \varphi = \varphi(t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

В силу независимости шести координат, характеризующих положение подвижной — штрихованной системы (тела), можно рассматривать частные движения, являющиеся составляющими общего движения. Если углы ψ, ϑ, φ остаются постоянными, то движение является поступательным. В этом случае любая ось штрихованной системы перемещается параллельно самой себе. Изменяются при поступательном движении только координаты точки $O'(x_0, y_0, z_0)$. Эта точка в дальнейшем будет называться полюсом.

Если координаты полюса постоянны, а изменяются во времени три эйлеровых угла, то тело вращается относительно неподвижной точки.

В общем случае, вводя поступательно движущуюся вспомогательную систему с центром в полюсе, представляем движение тела как поступательное движение этой системы и вращение штрихованной системы в ней.

Отдельные частные случаи движения тела приходится рассматри-

вать и тогда, когда свобода движения твердого тела соответствующим образом ограничена. В таком случае движение оказывается более простым. Основными частными случаями движения твердого тела являются: поступательное движение, вращение вокруг неподвижной оси и вращение вокруг неподвижной точки.

2.2. Поступательное движение. Наиболее простым является поступательное движение. При поступательном движении любая прямая, проведенная в теле, перемещается параллельно самой себе. Эйлеровы углы при поступательном движении твердого тела остаются постоянными, а изменяются только координаты начала подвижной системы.

Говорят, что твердое тело имеет три поступательные степени свободы. Нетрудно видеть, что при поступательном движении перемещения всех точек одинаковы и совпадают с перемещениями полюса. Траектории всех точек тела при поступательном движении являются одинаковыми кривыми, параллельно смещенными относительно друг друга. Однаковыми оказываются скорости и ускорения всех точек тела. Поэтому поступательное движение твердого тела полностью определяется движением одной его точки, например полюса. Все изложенное выше о кинематике движения одной точки полностью относится и к поступательному движению твердого тела. Так, скорость находится по формуле

$$\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0(t),$$

ускорение

$$\vec{a}_0 = \ddot{\vec{r}}_0(t) \text{ и т. д.}$$

Подчеркнем, что траектории движения точек твердого тела при поступательном движении могут быть любыми кривыми линиями; поступательное движение нельзя отождествлять с прямолинейным движением. На рисунке 2.3 изображена схема так называемого параллельного механизма. Четыре стержня скреплены шарнирами. Стержень AD неподвижен. Стержень BC в плоскости чертежа может совершать только поступательное движение. Все точки его при этом описывают равные окружности.

2.3. Мгновенная ось вращения. Угловая скорость. Рассмотрим теперь движение подвижной штрихованной системы (тела) относительно неподвижной — нештрихованной, в которой неподвижна одна точка тела — полюс. Мы говорим об этом движении, как о вращении тела вокруг неподвижной точки.

Начнем с геометрических представлений этого частного случая движения твердого тела. Прежде всего заметим, что все точки тела, лежащие на одном и том же радиусе, проведенном из неподвижной точки, описывают подобные траектории — кривые на поверхности сфер, ометаемых соответствующим радиус-вектором при всевозможных движениях. Величины скоростей точек пропорциональны расстояниям от них до неподвижной точки. Эти заключения следуют из соотношений между векторами смещений точек тела, находящихся на одном и том же радиусе (рис. 2.4). Сфера с центром в неподвижной точке при пересечении с телом даст некоторую сферическую

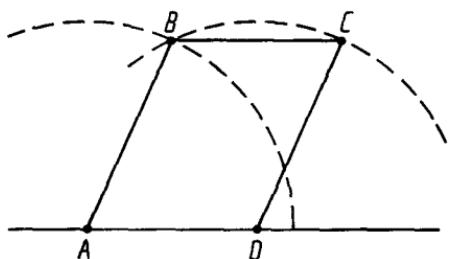


Рис. 2.3.

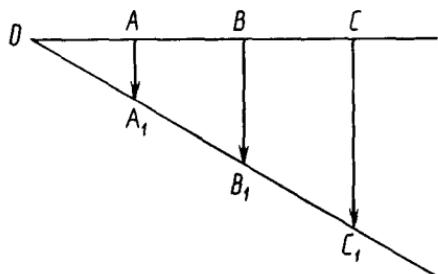


Рис. 2.4.

фигуру. При движении тела эта фигура перемещается по поверхности сферы, часть которой она составляет. Положение сферической фигуры на сфере однозначно определяет положение тела в пространстве. Таким образом, изучение данного случая движения сводится к изучению движения сферической фигуры по поверхности сферы. В свою очередь положение фигуры на сфере определяется положением ее двух точек, или сферического отрезка, соединяющего их.

Геометрическое представление движения твердого тела вокруг неподвижной точки основывается на следующей теореме о перемещениях сферической фигуры по поверхности сферы: любое перемещение сферической фигуры по поверхности сферы может быть достигнуто поворотом ее вокруг некоторой прямой, проходящей через неподвижную точку C и центр сферы O .

Для доказательства обратимся к рисунку 2.5, где AB и A_1B_1 — два произвольных положения сферического отрезка. Соединим точки A , A_1 и B , B_1 дугами больших кругов и из середины каждой восстановим сферические перпендикуляры. В пересечении перпендикуляров получаем искомую точку C . Прямая OC и будет служить осью поворота при перемещении тела из первого положения во второе. Действительно, дуги BC и B_1C , а также дуги AC и A_1C равны по построению. Отсюда следует равенство сферических треугольников ACB и A_1CB_1 . (Чтобы не загромождать рисунок, они обозначены вершиной и основаниями.) При повороте тела вокруг оси на некоторый угол оба треугольника совпадут всеми точками.

Любое конечное вращение тела можно рассматривать как совокупность бесконечно малых вращений, т. е. поворотов на бесконечно малые углы за бесконечно малые промежутки времени. Теорема верна и для бесконечно малых перемещений, так что в любой момент времени распределение скоростей между точками тела таково, каким оно было бы при вращении тела вокруг неподвижной оси вращения OC . Этот результат можно выразить иначе: в любой момент времени в теле можно провести прямую, проходящую через неподвижную точку так, что все точки прямой в данный момент времени имеют скорости, равные нулю. Эта прямая называется *мгновенной осью вращения тела* (штрихованной системы).

Подчеркнем, что в общем случае мгновенная ось имеет только одну в общем случае мгновенную ось — полюс, положение же оси

в подвижной системе (а вместе с тем и в неподвижной) *непрерывно изменяется*. Для учета положения мгновенной оси в теле и поворота тела вокруг оси вводят *вектор бесконечно малого угла поворота*. Обозначим его $d\chi$. Модуль этого вектора равен элементарному углу поворота вокруг мгновенной оси. Прямая, на которой расположен вектор, совпадает с мгновенной осью, а направлен он так, что с вершиной вектора вращение кажется происходящим против часовой стрелки.

Определим перемещение точки M твердого тела при элементарном повороте $d\chi$ в нештрихованной системе (точка M неподвижна в штрихованной системе). Из рисунка 2.6 видно, что $d\vec{r}'$ направлен перпендикулярно плоскости векторов $d\vec{\chi}$ и \vec{r}' (за лист бумаги). Модуль перемещения равен:

$$dr' = d\chi r' = d\chi r' \sin(d\vec{\chi}, \vec{r}'),$$

а с учетом направления векторов

$$dr' = [d\vec{\chi} \vec{r}']. \quad (2.2)$$

Эта важная формула применима для любого вектора, имеющего начало в полюсе и неподвижного в штрихованной системе. Его приращение будет находиться по (2.2).

Векторный характер величины $d\vec{\chi}$ неочевиден, мы произвольно приписали углу направление. Для векторов должно выполняться векторное правило сложения с перестановочным законом. Поэтому для бесконечно малых поворотов должно иметь место следующее свойство: два бесконечно малых поворотов приводят к одному и тому же результату при любой последовательности их выполнения. Найдем приращение радиус-вектора в результате двух поворотов $d\vec{\chi}_1$ и $d\vec{\chi}_2$, выполненных в разной последовательности. Первый поворот переводит вектор \vec{r}' в следующий вектор:

$$\vec{r}' + [d\vec{\chi}_1 \vec{r}'].$$

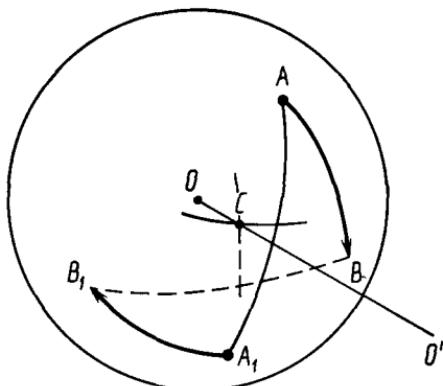


Рис. 2.5.

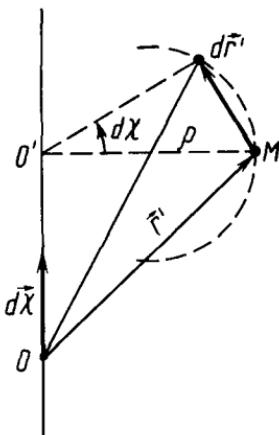


Рис. 2.6.

второй поворот дает найденному вектору приращение

$$[\vec{dx}_2(\vec{r}' + [\vec{dx}_1\vec{r}'])] = [\vec{dx}_2\vec{r}'] + [\vec{dx}_2[\vec{dx}_1\vec{r}']].$$

В результате получилось приращение

$$\vec{dr}'_{1,2} = [\vec{dx}_1\vec{r}'] + [\vec{dx}_2\vec{r}'] + [\vec{dx}_2[\vec{dx}_1\vec{r}']].$$

При обратной последовательности имеем:

$$\vec{dr}_{2,1} = [\vec{dx}_2\vec{r}'] + [\vec{dx}_1\vec{r}'] + [\vec{dx}_1[\vec{dx}_2\vec{r}']].$$

Но $\vec{dr}'_{1,2} = \vec{dr}_{2,1}$ с точностью до бесконечно малых второго порядка. Это подтверждает векторный характер величины \vec{dx} .

Однако конечные углы поворота таким свойством отнюдь не обладают; от последовательности поворотов существенно зависит результат. Поэтому нельзя считать \vec{dx} векторным дифференциалом угла x , что и подчеркнуто в нашем обозначении: \vec{dx} — вектор, а x не является вектором, т. е. мы не пишем \vec{dx} .

Угловой скоростью вращения тела относительно нештрихованной системы называется вектор $\vec{\omega}$, равный отношению \vec{dx} к dt :

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{dx}}{dt} \quad (2.3)$$

Угловая скорость направлена по мгновенной оси вращения. В общем случае ее модуль и направление (в подвижной системе и в неподвижной) непрерывно изменяются с течением времени. Заметим также, что определение угловой скорости, данное для твердого тела, относится и к вращению штрихованной системы.

После деления (2.2) на элемент времени dt , в течение которого совершается бесконечно малое перемещение, приходим к формуле распределения скоростей точек твердого тела (подвижной системы), с которыми они движутся в неподвижной системе, т. е.

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}']. \quad (2.4)$$

Вектор \vec{v} в формуле (2.4) может интерпретироваться как скорость движения конца вектора \vec{r}' в нештрихованной системе. В силу применимости (2.2) к любому неподвижному в штрихованной системе вектору формула (2.4) может быть написана для любой векторной величины и истолкована, как формула скорости изменения данной величины в нештрихованной системе. В частности, для орт штрихованной системы получаем:

$$\vec{i}' = [\vec{\omega} \vec{i}'], \vec{j}' = [\vec{\omega} \vec{j}'], \vec{k}' = [\vec{\omega} \vec{k}']. \quad (2.5)$$

По своему определению угловая скорость — скользящий вектор, т. е. точка приложения его на оси не фиксирована. В соответствии с определением элементарного вращения угловая скорость (в каждый момент времени) может быть представлена тем или иным разложением на составляющие, в частности разложением по осям штрихованной системы

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_x' + \vec{\omega}_y' + \vec{\omega}_z' \quad (2.6)$$

или разложением по осям $O'z'$, Oz и линии узлов ON (см. рис. 2.2):

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\phi. \quad (2.7)$$

Физический смысл разложений состоит в замене элементарного вращения $d\vec{x}$ совокупностью вращения $d\vec{x}_x$, $d\vec{x}_y$, $d\vec{x}_z$ в первом и $d\psi$, $d\theta$, $d\phi$ во втором случае.

2.4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Этот частный случай движения твердого тела очень часто встречается в технике и требует более подробного рассмотрения. Неподвижность мгновенной оси вращения означает неизменное ее положение

в теле и в пространстве. В данном случае она называется просто осью вращения. Если совместить оси $O'z'$ и Oz подвижной и неподвижной систем координат с осью вращения тела, то при движении будет изменяться только угол φ (рис. 2.7). При таком движении тело обладает одной вращательной степенью свободы. Кинематическое уравнение вращательного движения задает угол как функции времени: $\varphi = \varphi(t)$. Во время движения отдельные точки тела описывают окружности с центрами на оси вращения. Перемещения точек тела за один и тот же промежуток времени неодинаковы и пропорциональны расстояниям их до оси вращения. Также неодинаковы и скорости различных точек тела.

В данном случае вращение полностью характеризуется модулем угловой скорости (или с учетом направления вращения проекцией на ось):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (2.8)$$

Обозначая через ρ расстояние точки тела до оси вращения, получаем выражение для скорости этой точки: $v = \omega\rho = \dot{\varphi}\rho$. Полученная формула дает распределение величин скоростей между точками тела. Направлены скорости по касательным к окружности в сторону вращения. Нетрудно видеть, что в этом случае движение отдельных точек тела удобно описывать естественным методом, при котором ускорение будет складываться из нормального и тангенциального (1.20), причем нормальное ускорение определяется по скорости v :

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 \rho.$$

Что касается тангенциального ускорения, то оно обусловлено неравномерностью вращения тела.

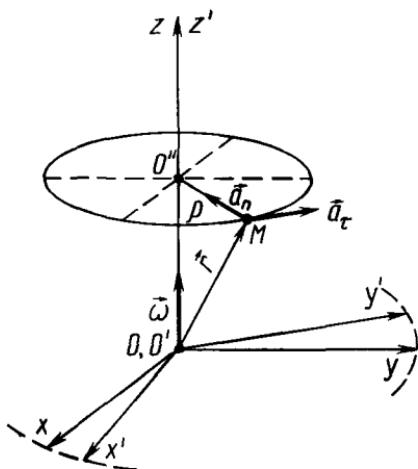


Рис. 2.7.

Вторая производная угла поворота φ по времени называется угловым ускорением тела:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}. \quad (2.9)$$

Очевидно, что

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \varepsilon r. \quad (2.10)$$

В случае вращения тела (системы) вокруг неподвижной оси прибегать к проецированию векторных величин на оси неподвижной или подвижной системы оказалось нецелесообразным.

2.5. Вращение тела вокруг неподвижной точки. Пусть тело движется относительно нештрихованной системы так, что одна его точка — полюс — остается неподвижной. Это может иметь место на практике, если оно закреплено в одной точке (с помощью карданных шарниров), а также если отдельно от поступательных степеней свободы рассматриваются вращательные.

Описывая аналитически движение твердого тела вокруг неподвижной точки, начала координат подвижной и неподвижной систем совмещают с неподвижной точкой тела. В таком случае положение тела в пространстве определяется углами Эйлера ψ, θ, φ (соответственно тело имеет три вращательные степени свободы движения). Кинематические уравнения движения согласно (2.1) имеют вид:

$$\psi = \psi(t), \theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t). \quad (2.11)$$

Кинематические уравнения движения полностью описывают движение тела.

Важной задачей является нахождение распределения скоростей в твердом теле, т. е. нахождение скоростей различных точек тела или точек \vec{r}' движущейся системы. Очевидно, что ответ на нее дает векторная формула (2.4) $\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}']$, где \vec{r}' можно заменить на \vec{r} , так как начала систем совпадают.

Для конкретных вычислений надо располагать проекциями скоростей точек на координатные оси. С помощью формулы (2.4) проекции на оси подвижной, штрихованной, системы можно найти. Они таковы:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{x'} = \omega_y z' - \omega_z y', \\ v_{y'} = \omega_z x' - \omega_x z', \\ v_{z'} = \omega_x y' - \omega_y x'. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Тот же самый вид имеют и проекции скорости точки на оси неподвижной, нештрихованной, системы, так как $\vec{r} = \vec{r}'$, то формулы приобретают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y = \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z = \omega_x y - \omega_y x. \end{array} \right. \quad (2.12a)$$

Решая вопрос, какими проекциями следует пользоваться, нужно иметь в виду, что речь идет об одной скорости — скорости движения точки в неподвижной системе и поэтому выбор системы координат для выражения проекций диктуется только удобствами. Поскольку в общем случае угловая скорость вращения $\vec{\omega}$ — величина переменная, переменными являются и ее проекции в обеих системах. Связь же между проекциями определяется через переменные углы Эйлера. В дальнейшем будет рассматриваться общий случай движения тела, при котором полюс движется и $\vec{r}' \neq \vec{r}$. В таком случае следует остановиться на формулах (2.12).

Для дальнейшего решения поставленной задачи (нахождения проекций скорости точки тела) необходимо знать выражение проекции угловой скорости на оси подвижной системы через кинематические уравнения движения (2.11), заданные для эйлеровых углов. Из векторной алгебры известно, что произвольный вектор можно разложить на составляющие по трем некомпланарным направлениям (правило параллелепипеда). Выберем за эти три направления подвижную ось $O'z'$, линию узлов ON и неподвижную ось Oz . Пусть составляющие вектора угловой скорости по этим направлениям для некоторого момента времени равны соответственно ω_ψ , ω_θ , ω_φ . (Они показаны на рис. 2.8; здесь $\vec{\omega}$, чтобы не загромождать чертеж, не изображена.) Имеет место векторное равенство $\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\varphi$. Проецируя это равенство, например на Ox' , получим: $\omega_{x'} = \omega_{\varphi x'} + \omega_{\theta x'} + \omega_{\psi x'}$. Для нахождения $\omega_{x'}$ необходимо знать проекции составляющих ω_ψ , ω_θ , ω_φ на Ox' . Также обстоит дело с проекциями на остальные оси.

В свою очередь угловые скорости ω_ψ , ω_θ , ω_φ являются угловыми скоростями вращения тела вокруг соответствующих осей. Например, ω_φ — угловая скорость вращения вокруг неподвижной оси Oz , связанная только с изменением угла φ . Отсюда модуль ее

$$\omega_\varphi = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Аналогичное положение имеет место и для остальных составляющих. Таким образом, имеем:

$$\omega_\psi = \dot{\psi}, \omega_\theta = \dot{\theta}, \omega_\varphi = \dot{\varphi}.$$

Проектирование составляющих на оси подвижной системы производим, пользуясь рисунком 2.8. Для проектирования вектора $\vec{\omega}_\varphi$ предварительно разложим его в плоскости Ozz' по правилу параллелограмма на две составляющие: \vec{OB} — по оси Oz' и \vec{OM} в плоскости $x'Oy'$ подвижной системы. Для модулей этих составляющих имеем:

$$OB = \omega_\varphi \cos \vartheta, OM = \omega_\varphi \sin \vartheta.$$

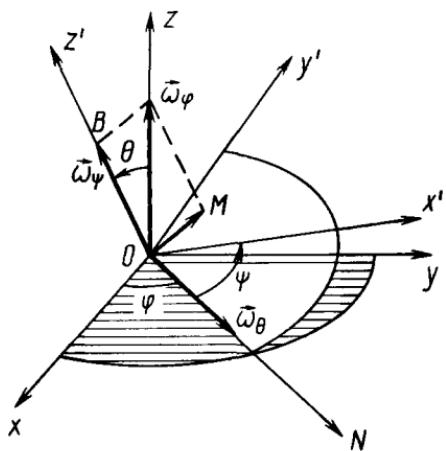


Рис. 2.8.

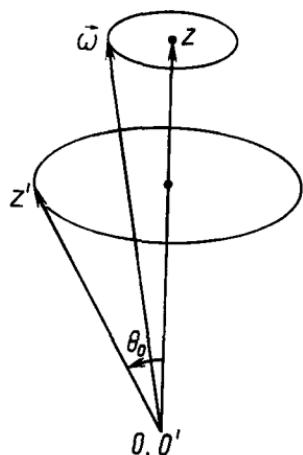


Рис. 2.9.

Заметим, что составляющая $\vec{\omega}_M$ перпендикулярна линии узлов ON . Можно легко найти и проекции вектора $\vec{\omega}_\varphi$ на оси подвижной системы. Получается

$$\omega_{\varphi x'} = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \quad \omega_{\varphi y'} = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi, \quad \omega_{\varphi z'} = \dot{\varphi} \cos \theta.$$

Проецирование составляющих $\vec{\omega}_\varphi$ и $\vec{\omega}_\theta$ значительно проще, поэтому результаты выпишем без пояснений:

$$\omega_{\varphi x'} = \omega_{\varphi y'} = 0, \quad \omega_{\varphi z'} = \dot{\psi};$$

$$\omega_{\theta x'} = \dot{\theta} \cos \psi, \quad \omega_{\theta y'} = -\dot{\theta} \sin \psi, \quad \omega_{\theta z'} = 0.$$

Теперь можно написать искомые формулы, выражающие проекции угловой скорости на подвижные оси:

$$\begin{cases} \omega_{x'} = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_{y'} = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_{z'} = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Данные формулы называются *кинематическими уравнениями Эйлера*. С помощью формул (2.13) и кинематических уравнений движения (2.11) оказывается возможным найти ω_x , ω_y , ω_z как функции времени. По формулам (2.12) находим проекции скоростей движения точек тела для любого момента времени.

Аналогично можно найти проекции скорости на неподвижные оси. Что касается ускорений точек, то в общем виде этот вопрос рассматривать не будем, так как общие громоздкие выражения ускорений малоупотребительны.

Пример 2.1. Вычисление модуля угловой скорости вращения тела вокруг неподвижной точки.

При решении нельзя воспользоваться составляющими ω_φ , ω_θ и ω_ψ , так как они не ортогональны. Поэтому следует использовать формулы (2.13). С их помощью

записываем выражение для квадрата модуля угловой скорости:

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta.$$

Пример 2.2. Нахождение проекций угловой скорости на оси неподвижной системы.

Проектируя вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ с помощью рисунка 2.8 на оси неподвижной системы, имеем:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \\ \omega_y = \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, \\ \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{cases} \quad (2.14)$$

Очевидно, что выражение квадрата модуля угловой скорости в этой системе должно быть таким же, как и в подвижной:

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta.$$

Пример 2.3. Регулярная прецессия.

Пусть кинематические уравнения движения таковы:

$$\psi = \omega_1 t, \theta = \theta_0, \varphi = \omega_2 t,$$

т. е. углы прецессии и собственного вращения изменяются равномерно, а угол нутации постоянен. Это движение и называется *регулярной прецессией*.

Мгновенная угловая скорость равна:

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \theta,$$

т. е. это величина по модулю постоянная. Найдем также все проекции угловой скорости на оси подвижной и неподвижной систем:

$$\begin{array}{ll} \omega_x = \omega_1 \sin \theta_0 \sin \omega_2 t, & \omega_x = \omega_2 \sin \theta_0 \sin \omega_1 t, \\ \omega_y = \omega_1 \sin \theta_0 \cos \omega_2 t, & \omega_y = -\omega_2 \sin \theta_0 \cos \omega_1 t, \\ \omega_z = \omega_1 \cos \theta_0 + \omega_2, & \omega_z = \omega_1 + \omega_2 \cos \theta_0. \end{array}$$

Проекции угловой скорости на оси $O'z'$ и $O'z$ остаются постоянными, следовательно, сохраняются углы между угловой скоростью $\vec{\omega}$ и осями $O'z'$ и $O'z$. Но это также означает, что вектор $\vec{\omega}$ постоянно находится в плоскости $O'z'z$ и перпендикулярен линии узлов. Таким образом, штрихованная система, изменяя свою ориентацию в нештрихованной, вращается вокруг мгновенной оси с постоянной угловой скоростью, а сама ось — вокруг $O'z$ с угловой скоростью $\varphi = \omega_2$. Ось $O'z'$ также вращается вокруг Oz с угловой скоростью ω_2 . Значит, вращение тела можно представить как вращение его оси $O'z'$ с угловой скоростью ω_2 вокруг оси $O'z$, и вращение вокруг этой оси с угловой скоростью ω_1 при постоянном угле между осями θ_0 (рис. 2.9).

§ 3. Сложное движение точки

3.1. Неподвижная и подвижная системы отсчета. При геометрическом описании движения, которым занимается кинематика, выбор системы отсчета не ограничен каким-либо условием. В принципе для описания движения можно пользоваться любыми системами, движущимися относительно друг друга как угодно. Но практически нецелесообразно выбирать систему отсчета наудачу, так как движение одного и того же объекта по отношению к разным системам может быть самым различным и выглядеть в одних системах очень сложно, а в других просто.

Например, движение планет Солнечной системы относительно Земли запутано и в геоцентрической системе мира (система Птолемея) приходилось прибегать к весьма сложным объяснениям.