записываем выражение для квадрата модуля угловой скорости:

$$\omega^2 = \omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2 + \omega_{z'}^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\vartheta.$$

Пример 2.2. **Нахождение проекций угловой скорости на оси неподвижной системы.**

Проецируя вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ с помощью рисунка 2.8 на оси неподвижной системы, имеем:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\vartheta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi, \\ \omega_y = \dot{\vartheta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi, \\ \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta \end{cases} \qquad (2.14)$$

Очевидно, что выражение квадрата модуля угловой скорости в этой системе должно быть таким же, как и в подвижной:

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\vartheta.$$

Пример 2.3. **Регулярная прецессия.**

Пусть кинематические уравнения движения таковы:

$$\psi = \omega_1 t,\ \vartheta = \vartheta_0,\ \varphi = \omega_2 t,$$

т. е. углы прецессии и собственного вращения изменяются равномерно, а угол нутации постоянен. Это движение и называется *регулярной прецессией.*

Мгновенная угловая скорость равна:

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\cos\vartheta,$$

т. е. это величина по модулю постоянная. Найдем также все проекции угловой скорости на оси подвижной и неподвижной систем:

$$\omega_{x'} = \omega_1\sin\vartheta_0\sin\omega_2 t, \qquad \omega_x = \omega_2\sin\vartheta_0\sin\omega_1 t,$$
$$\omega_{y'} = \omega_1\sin\vartheta_0\cos\omega_2 t, \qquad \omega_y = -\omega_2\sin\vartheta_0\cos\omega_1 t,$$
$$\omega_{z'} = \omega_1\cos\vartheta_0 + \omega_2, \qquad \omega_z = \omega_1 + \omega_2\cos\vartheta_0.$$

Проекции угловой скорости на оси $O'z'$ и $O'z$ остаются постоянными, следовательно, сохраняются углы между угловой скоростью $\vec{\omega}$ и осями $O'z'$ и $O'z$. Но это также означает, что вектор $\vec{\omega}$ постоянно находится в плоскости $O'z'z$ и перпендикулярен линии узлов Таким образом, штрихованная система, изменяя свою ориентацию в нештрихованной, вращается вокруг мгновенной оси с постоянной угловой скоростью, а сама ось — вокруг $O'z$ с угловой скоростью $\dot{\varphi} = \omega_2$. Ось $O'z'$ также вращается вокруг Oz с угловой скоростью ω_2. Значит, вращение тела можно представить как вращение его оси $O'z'$ с угловой скоростью ω_2 вокруг оси $O'z$, и вращение вокруг этой оси с угловой скоростью ω_1 при постоянном угле между осями ϑ_0 (рис 2.9).

§ 3. Сложное движение точки

3.1. Неподвижная и подвижная системы отсчета. При геометрическом описании движения, которым занимается кинематика, выбор системы отсчета не ограничен каким-либо условием. В принципе для описания движения можно пользоваться любыми системами, движущимися относительно друг друга как угодно. Но практически нецелесообразно выбирать систему отсчета наудачу, так как движение одного и того же объекта по отношению к разным системам может быть самым различным и выглядеть в одних системах очень сложно, а в других просто.

Например, движение планет Солнечной системы относительно Земли запутано и в геоцентрической системе мира (система Птолемея) приходилось прибегать к весьма сложным объяснениям.

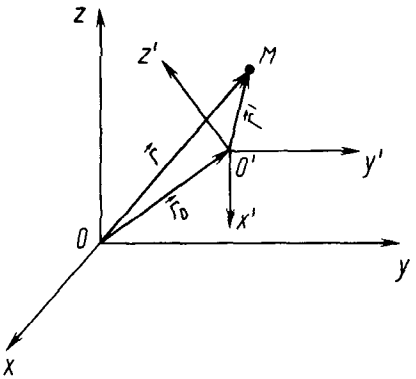

Рис. 3 1

Движение планет относительно Солнца (гелиоцентрическая система Коперника) значительно проще, и рассмотрение движения планет именно в этой системе позволило установить основной закон небесной механики — закон всемирного тяготения Ньютона. А зная движение планет вокруг Солнца, далее можно установить и их движение относительно Земли. В ряде случаев задачу об описании движения расчленяют на два этапа. Рассмотрим две системы отсчета, движение которых относительно друг друга известно, и пусть известно движение точки относительно одной из систем. Каково будет движение точки относительно второй? Этот вопрос и разрешается в данном параграфе.

Назовем условно систему отсчета, относительно которой надо определить движение точки, *неподвижной,* вторую — *подвижной*[1]. Движение точки относительно первой системы можно рассматривать как наложение двух составляющих движений: движения точки относительно подвижной системы (назовем его *относительным* движением) и движения точки относительно неподвижной системы, когда точка покоится в подвижной системе (это движение назовем *переносным*).

Примером такого разложения сложного движения на составляющие — относительное и переносное — является движение пассажира на движущемся судне. Его движение относительно берегов (сложное движение) представляет результат сложения движения пассажира относительно судна (относительное движение) и движения той точки судна, в которой в данный момент находится пассажир (переносное движение).

Основная задача при сложении движений состоит в нахождении параметров (скорости, ускорения и др.) сложного движения по известным параметрам составляющих движений. С неподвижной системой отсчета свяжем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ (систему K, или нештрихованную), а с подвижной $O'x'y'z'$ (систему K', или штрихованную), что показано на рисунке 3.1. Через $\vec{r}$ обозначен радиус-вектор, определяющий положение точки M в неподвижной системе, через $\vec{r}'$ — радиус-вектор той же точки в подвижной системе, $\vec{r}_0$ — радиус-вектор начала координат подвижной системы в неподвижной. Между этими радиус-векторами для любого момента времени имеет место соотношение

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'. \qquad (3.1)$$

[1] Физический анализ вопроса о существовании или отсутствии абсолютно неподвижной системы в природе отложим до II части курса (См также § 5)

При всей кажущейся очевидности этого равенства оно физически не тривиально, ибо $\vec{r}$, $\vec{r}_0$, с одной стороны, и $\vec{r}'$ — с другой, измеряются в *разных* системах. Равенство основано на допущении о том, что длина и направление отрезка не зависят от характера и скорости его движения в системе. Последнее же вытекает из ранее принятого постулата о бесконечно быстрых сигналах и возможной синхронизации часов в движущихся системах с их помощью.

Рассмотрим ход времени в движущейся системе. Часы синхронизируются во всех системах отсчета так же, как в одной; с помощью бесконечно быстрых сигналов ставятся на один и тот же момент времени. А это означает, что момент времени, в который происходит некоторое событие, один и тот же во всех системах, т. е.

$$t = t'. \tag{3.2}$$

Из равенства (3.2) вытекает, что промежутки времени в разных системах между двумя событиями одинаковы: $\Delta t = \Delta t'$.

Определим теперь понятие длины движущегося отрезка. *Длиной отрезка называется расстояние между одновременными положениями (засечками) его концов, измеренное наложением масштаба в данной системе отсчета.* Это определение годится как для системы, где отрезок покоится, так и для системы, где он движется. Полезно заметить, что такое уточнение длины движущегося отрезка необходимо, ибо она ранее не была определена вообще. В формуле (3.1) r и r_0 — длины покоящихся в нештрихованной системе отрезков, тогда как r' — длина движущегося в ней отрезка. Эта длина может быть получена только описанным выше способом, т. е. измерена как расстояние между одновременными засечками его концов. Но моменты засечек одни и те же как в движущейся системе, так и в покоящейся, т. е. измеряется расстояние между парой одних и тех же точек. Поэтому r' есть длина отрезка как в неподвижной, так и в подвижной системе, и, следовательно, можно написать равенство (3.1), в котором $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ измерены в неподвижной системе, а $\vec{r}'$ — в подвижной. По этой же причине равенство (3.1) можно рассматривать в проекциях как в неподвижной, так и в движущейся системе. Равенство (3.1) служит основанием для всех кинематических соотношений сложного движения.

3.2. Сложение скоростей. Напишем равенство (3.1) в другом виде, для чего разложим радиус-вектор точки $\vec{r}'$ по ортам подвижной системы:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'. \tag{3.3}$$

Проецируя векторное равенство (3.3) на оси неподвижной или подвижной системы координат, можно получить известные из аналитической геометрии формулы преобразования координат для перехода от штрихованной системы координат к нештрихованной.

Для нахождения закона сложения скоростей продифференци-

руем (3.3) по времени, учитывая (3.2). Имеем:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(\frac{d\vec{r}_0}{dt}+x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+z\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)+\left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}'+\frac{dy'}{dt}\vec{j}'+\frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right).$$

Левая часть полученного равенства дает вектор скорости сложного движения точки M, который обозначим $\vec{v}_a$,— абсолютную скорость. Для того чтобы в правой части выделить члены, определяющие скорости относительного и переносного движений, заметим, что сложное движение точки совпадает с относительным, если штрихованная система неподвижна. Аналитически это означает, что начало координат штрихованной системы неподвижно и единичные координатные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ постоянны. Тогда все члены в первой скобке обращаются в нули, а вторая скобка дает выражение вектора относительной скорости точки M:

$$\vec{v}_{от}=\frac{dx'}{dt}\vec{i}'+\frac{dy'}{dt}\vec{j}'+\frac{dz'}{dt}\vec{k}'.$$

Для получения скорости переносного движения следует закрепить точку M в подвижной системе, т. е. считать ее относительные координаты x', y', z' постоянными величинами. Тогда первая скобка не обращается в нуль и дает искомую скорость переносного движения точки M:

$$\vec{v}_п=\frac{d\vec{r}_0}{dt}+x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}'}{dt}. \qquad (3.4)$$

Заметим, что первое слагаемое дает часть скорости переносного движения точки M, обусловленную поступательным движением системы и совпадающую со скоростью движения начала координат O' — полюса системы. Остальные три слагаемые представляют часть скорости переносного движения, обусловленную вращением подвижной системы координат вокруг точки O'.

Если обозначим вектор угловой скорости вращения системы координат $\vec{\omega}$, то на основании формулы (2.5) получаем очень важное соотношение:

$$x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}'}{dt}=[\vec{\omega}\,\vec{i}'x']+[\vec{\omega}\,\vec{j}'y']+[\vec{\omega}\,\vec{k}'z']=[\vec{\omega}\,\vec{r}'].$$

Скорость переносного движения теперь может быть представлена иначе:

$$\vec{v}_п=\frac{d\vec{r}_0}{dt}+[\vec{\omega}\,\vec{r}']. \qquad (3.5)$$

Для абсолютной скорости сложного движения получаем окончательный результат:

$$\vec{v}_a=\frac{d\vec{r}_0}{dt}+[\vec{\omega}\,\vec{r}']+\vec{v}_{от}=\vec{v}_п+\vec{v}_{от}, \qquad (3.6)$$

выражающий закон сложения скоростей.

3.3. Сложение ускорений. Чтобы получить формулу сложения ускорений, надо (3.3) дважды продифференцировать по времени. Имеем:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right) + 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \right.$$
$$\left. + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) + \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'\right).$$

Левая часть в этом равенстве дает ускорение точки M в сложном движении. Анализ членов правой части равенства проводим следующим образом. Желая выделить ускорение точки M в ее относительном движении, полагаем $\vec{r}_0$, $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ постоянными величинами. Тогда в правой части не обратятся в нуль только три последние члена. Они и дают *ускорение относительного движения:*

$$\vec{a}_{от} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'. \qquad (3.7)$$

Для выделения *переносного* ускорения полагаем относительные координаты x', y', z' постоянными. Тогда не обратятся в нуль только четыре первых слагаемых правой части. Ускорение в переносном движении

$$\vec{a}_п = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}.$$

Первое слагаемое представляет часть переносного ускорения, обусловленную поступательным ускоренным движением системы, и совпадает с ускорением начала координат O', остальные три слагаемых представляют часть переносного ускорения, обусловленную вращением подвижной системы координат вокруг точки O'. Пользуясь формулами (2.5), преобразуем переносное ускорение:

$$\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + x'\frac{d}{dt}[\vec{\omega}\,\vec{i}'] + y'\frac{d}{dt}[\vec{\omega}\,\vec{j}'] + z'\frac{d}{dt}[\vec{\omega}\,\vec{k}'] = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} +$$
$$+ x'\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{i}'\right] + y'\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{j}'\right] + z'\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{k}'\right] + x'[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{i}']] +$$
$$+ y'[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{j}']] + z'[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{k}']],$$

отсюда

$$\vec{a}_п = \frac{d^2r_0}{dt} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r}'\right] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']].$$

Производная вектора угловой скорости по времени $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ называется *угловым ускорением.* Переносное ускорение

$$\vec{a}_п = \frac{d^2r_0}{dt^2} + [\vec{\varepsilon}\,\vec{r}'] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']] \qquad (3.8)$$

состоит соответственно из *переносного поступательного, переносного*

вращательного и *переносного центростремительного.* Вектор центростремительного ускорения направлен по перпендикуляру к мгновенной оси вращения.

Но полное ускорение сложного движения не равно сумме относительного и переносного ускорений: в правой части имеются еще слагаемые, не относящиеся ни к переносному, ни к относительному ускорению. На существование ускорения особого рода в сложном движении впервые обратил внимание французский математик Кориолис. Оставшиеся в правой части члены определяют *ускорение Кориолиса* для сложного движения точки M. Оно равно:

$$\vec{a}_{\text{к}} = 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right).$$

С помощью формул (2.5) ускорению Кориолиса можно придать другой вид. Подставляя в последнее равенство значения $\frac{d\vec{i}'}{dt}$, $\frac{d\vec{j}'}{dt}$, $\frac{d\vec{k}'}{dt}$, имеем:

$$\vec{a}_{\text{к}} = 2\left[\vec{\omega}\left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right)\right] = 2[\vec{\omega}\,\dot{\vec{r}}'].$$

Отсюда следует:

$$\vec{a}_{\text{к}} = 2[\vec{\omega}\,\vec{v}_{\text{от}}]. \qquad (3.9)$$

Как видно из (3.9), ускорение Кориолиса не обращается в нуль только тогда, когда $\vec{\omega} \neq 0$ и $\vec{v}_{\text{от}} \neq 0$, т. е. когда точка находится в движении по отношению к вращающейся системе отсчета. Кроме того, векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{v}_{\text{от}}$ не должны быть коллинеарными. Ускорение Кориолиса направленно перпендикулярно плоскости, определяемой векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{v}_{\text{от}}$.

Для уяснения происхождения ускорения Кориолиса рассмотрим простой пример. Пусть точка M движется с постоянной скоростью $v_{\text{от}}$ вдоль радиуса диска OA, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$, как показано на рисунке 3 2 Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен за плоскость чертежа, и ускорение Кориолиса по (3.9) лежит в плоскости чертежа и направлено перпендикулярно радиусу OA в сторону вращения. Его модуль $a_{\text{к}} = 2\omega v_{\text{от}}$, так как векторы $v_{\text{от}}$ и ω взаимно перпендикулярны. Относительное ускорение в данном случае отсутствует, так как относительная скорость постоянна. Переносное ускорение есть центростремительное (нормальное) ускорение точки M при ее равномерном движении по окружности.

Вследствие изменения расстояния от точки M до оси вращения переносная скорость, равная ωr, изменяется. Приращение переносной скорости за dt секунд составляет $\omega v_{\text{от}} dt$, а скорость приращения $\omega v_{\text{от}}$ равна половине ускорения Кориолиса. Нетрудно видеть, что направление ускорения, определяемого изменением переносной скорости, совпадает с направлением ускорения $\vec{a}_{\text{к}}$. Вторая половина ускорения вызвана изменением направления $\vec{v}_{\text{от}}$ вследствие вращения диска. Приращение $dv_{\text{от}}$ за dt секунд составляет $\omega v_{\text{от}} dt$ (см. рис. 3.3). Отсюда ускорение движения вследствие изменения направления вектора относительной скорости имеет величину $\omega v_{\text{от}}$, также равную половине ускорения Кориолиса.

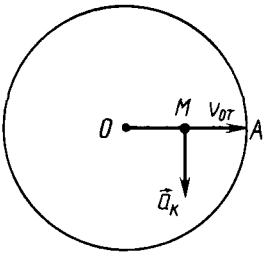

Рис. 3.2.

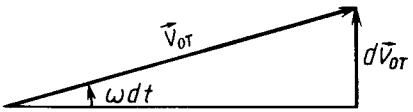

Рис. 3.3.

Из приведенного примера видно, что ускорение Кориолиса обусловлено изменением величины переносной скорости при относительном движении точки во вращающейся системе (здесь величина переносной скорости зависит от расстояния точки до оси вращения), а также изменением направления вектора относительной скорости вследствие вращения системы

Итак, *ускорение в сложном движении равно геометрической сумме трех ускорений: переносного, относительного* и *ускорения Кориолиса,* т. е.

$$\vec{a}_а = \vec{a}_п + \vec{a}_{от} + \vec{a}_к. \qquad (3.10)$$

В частностных случаях та или иная составляющая ускорения может обращаться в нуль.

3.4. Преобразования Галилея. Важным случаем преобразований координат, скоростей, ускорений, рассмотренных выше, является следующий: подвижная система движется в неподвижной равномерно, прямолинейно, поступательно со скоростью $\vec{v}_п$:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{v}_п t + \vec{r}', \\ \vec{v} &= \vec{v}_п + \vec{v}'. \end{aligned} \qquad (3.11)$$

Физически этот случай замечателен тем, что если нештрихованная система инерциальна, то инерциальна и штрихованная. В рассматриваемом случае (без ограничения общности в силу изотропии пространства и равноправия всех декартовых осей) можно выбрать направления осей Ox и $O'x'$, совпадающие со скоростью движения точки O' в системе Oxy, обозначаемой $\vec{V}$, а за начальный момент времени принять момент совпадения точек O и O'. В таком случае (3.1) приводит в декартовых координатах к формулам

$$x = x' + Vt,\ y = y',\ z = z'. \qquad (3.12)$$

Эти формулы вместе с рассмотренной ранее формулой (3.2) для времени $t = t'$ носят название формул преобразования координат Галилея.

Очевидно также, что для скорости в проекциях на оси имеем:

$$v_x = V + v_{x'},\ v_y = v_{y'},\ v_z = v_{z'}. \qquad (3.13)$$

Наконец, (3.10) дает: $\vec{a}_а = \vec{a}_{от}$, т. е. ускорение является инвариантом при преобразованиях Галилея.

3.5*. Сложное движение твердого тела[1]. Как уже выяснено в § 2, для описания движения свободного твердого тела надо задать шесть независимых кинематических уравнений (2.1): три координаты полюса x_0, y_0, z_0 и три эйлеровых угла ψ, ϑ, φ как функции времени.

Радиус-вектор, определяющий движение произвольной точки твердого тела, определяется формулой (3.1): $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$. Далее все выводы, сделанные относительно движения точки в штрихованной и нештрихованной системах, можно повторить для точки твердого тела с координатами x', y', z', с тем лишь условием, что $\vec{r}'$ — постоянный вектор в штрихованной системе. Таким образом, будет справедлива формула для скорости точки относительно неподвижной системы:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}\,\vec{r}']. \tag{3.14}$$

В формуле для ускорений (3.10) исчезнут относительное и кориолисово ускорения; останется одно переносное:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\,\vec{r}'\right] + \left[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']\right]. \tag{3.15}$$

В общем случае движение твердого тела может быть представлено как поступательное движение дополнительной системы координат $O'xyz$ с началом в полюсе O' и вращательное вокруг неподвижной точки в этой системе. В таком случае в формулах (3.14) и (3.15) первое слагаемое относится к поступательному движению, а остальные — к вращательному.

Таким образом, все сказанное в § 2 о движении твердого тела применимо к случаю сложного движения. В частности, не только скорость, но и ускорение любой точки можно вычислить по заданным кинематическим уравнениям, проецируя равенство (3.15) на оси неподвижной системы и используя проекции угловой скорости, выраженные через эйлеровы углы с помощью формул (2.14).

Однако в большинстве практически важных случаев вращательное и центростремительное ускорения точки находятся с помощью естественного метода. Вращательное ускорение оказывается тангенциальным: $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, а центростремительное — нормальным: $a_n = \frac{v^2}{R}$, так как точка движется по некоторой известной окружности.

В связи с описанием движения материальной точки в различных системах отсчета важную и физически содержательную интерпретацию получает понятие сложения скоростей и ускорений. Сумма двух скоростей трактуется, например, как результат относительного и переносного движения в некоторой системе. Поэтому все сказанное о сложении скоростей и ускорений может быть перенесено на одну из составляющих движения твердого тела — на движение его полю-

[1] Звездочкой отмечен материал, который при первом чтении можно опустить без нарушения главной логической линии курса. Однако часть таких параграфов необходима далее в последующих разделах и к ним приходится возвращаться.

са. Однако вопрос о сложении угловых скоростей твердого тела не тривиален и требует особого анализа.

Прежде всего математические операции сложения и разложения угловых скоростей можно трактовать с точки зрения относительного движения. Так, если $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$, то можно считать $\vec{\omega}_1$ угловой скоростью переносного движения, т. е. угловой скоростью вращения подвижной, штрихованной, системы в неподвижной, нештрихованной, системе, а $\vec{\omega}_2$ — угловой скоростью вращения тела в подвижной системе. Тогда $\vec{\omega}$ — угловая скорость тела в неподвижной системе.

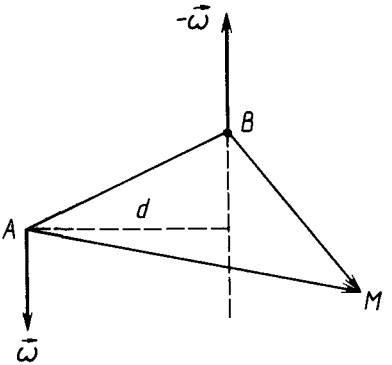

Рис. 3.4.

Но при сложении вращательных движений возможны два различных случая: мгновенные оси складываемых вращений пересекаются между собой и не пересекаются. В первом случае по обычному правилу сложения определяется сумма векторов (вектор угловой скорости скользящий; его можно переносить вдоль линии вектора) и находится новая мгновенная ось.

Для анализа второго случая вначале рассмотрим вращение твердого тела вокруг параллельных осей с равными по величине, но противоположными по направлению угловыми скоростями $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$. Такая совокупность угловых скоростей образует *пару вращений*. Нетрудно видеть, что пара вращений дает поступательное движение. Действительно, пусть A и B — какие-нибудь точки на мгновенных осях составляющих вращений (рис. 3.4). Тогда скорость любой точки тела в сложном движении будет равна:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}_1\overrightarrow{AM}] - [\vec{\omega}_1\overrightarrow{BM}] = [\vec{\omega}_1(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM})] = [\vec{\omega}_1\overrightarrow{AB}]$$

или

$$\vec{v} = [\vec{\omega}_2\overrightarrow{BA}].$$

Следовательно, скорости всех точек тела одинаковы и пара вращений эквивалентна поступательной скорости: $\vec{v} = [\vec{\omega}\overrightarrow{AB}]$.

Скорость результирующего поступательного движения перпендикулярна к плоскости пары векторов $\vec{\omega}$ и $-\vec{\omega}$ и направлена так, что с направлением векторов пары образуют правый винт. Вектор $\vec{v}$ называется *моментом пары*. Величина момента пары определяется произведением плеча пары на величину угловой скорости: $v = \omega d$.

На рисунке 3.5. показано взаимное расположение векторов пары и ее момента. Момент пары есть свободный вектор, так как он представляет собой скорость поступательного движения тела и может быть отнесен к любой его точке.

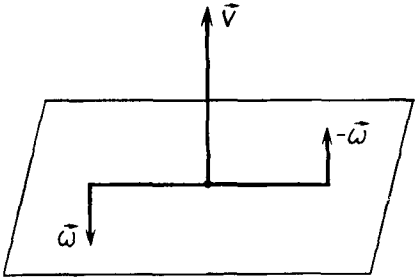

Рис. 3.5.

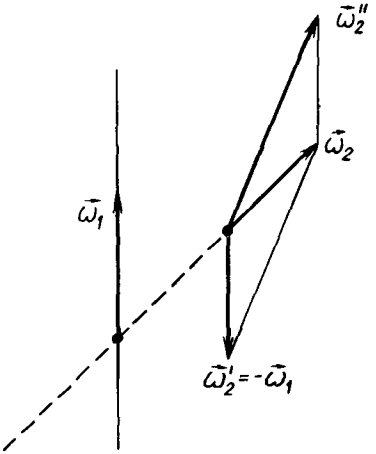

Рис. 3.6.

В общем случае два складываемых вращения имеют скорости $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$, лежащие на скрещивающихся прямых (рис. 3.6). Разлагая вектор $\vec{\omega}_2$ на $\vec{\omega}_2' = -\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2''$, имеем пару с моментом $\vec{v} = [\vec{\omega}_1 \vec{d}]$ и вращение с угловой скоростью ω_2''.

Итак, любое сложное движение тела в любой момент времени можно представить как поступательное движение со скоростью полюса и вращательное вокруг оси, проходящей через полюс.

§ 4*. Геометрические преобразования системы координат. Векторные и скалярные физические величины

Ранее подчеркивалось, что координаты материальной точки имеют смысл в той или иной системе отсчета. Однако все системы координат, связанные с одним и тем же телом отсчета, физически равноправны. Поэтому желательна такая математическая форма записи физических законов, которая дала бы одинаковые выражения в разных системах координат, т. е. была бы *инвариантной* по отношению к выбору системы координат. Такой инвариантной формой записи уравнений является векторная форма, т. е. *уравнения физики как векторные равенства справедливы для любой системы координат*. Векторная форма записи уравнений широко применяется как в механике, так и в других разделах физики. В качестве примеров инвариантной формы записи можно привести векторные формулы, определяющие скорость (1.7), ускорение (1.10) и др. В то же время соответствующие формулы в проекциях при различном выборе систем координат различны.

Кроме *инвариантности уравнений* — сохранения формы записи их в разных системах координат, существует *инвариантность величин* — сохранение одного и того же значения в разных системах