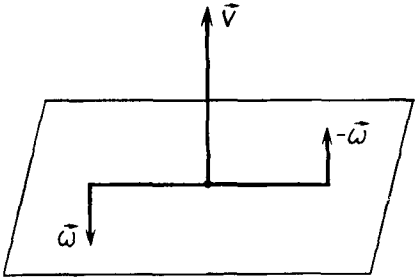

Рис. 3.5.

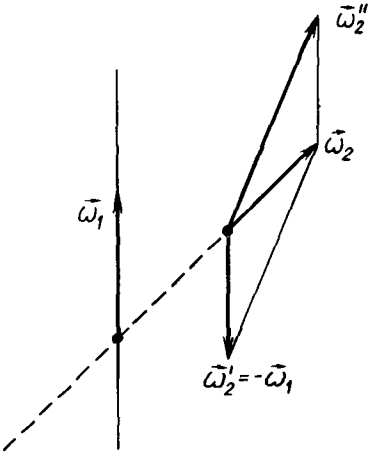

Рис. 3.6.

В общем случае два складываемых вращения имеют скорости $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$, лежащие на скрещивающихся прямых (рис. 3.6). Разлагая вектор $\vec{\omega}_2$ на $\vec{\omega}_2' = -\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2''$, имеем пару с моментом $\vec{v} = [\vec{\omega}_1 \vec{d}]$ и вращение с угловой скоростью ω_2''.

Итак, любое сложное движение тела в любой момент времени можно представить как поступательное движение со скоростью полюса и вращательное вокруг оси, проходящей через полюс.

§ 4*. Геометрические преобразования системы координат. Векторные и скалярные физические величины

Ранее подчеркивалось, что координаты материальной точки имеют смысл в той или иной системе отсчета. Однако все системы координат, связанные с одним и тем же телом отсчета, физически равноправны. Поэтому желательна такая математическая форма записи физических законов, которая дала бы одинаковые выражения в разных системах координат, т. е. была бы *инвариантной* по отношению к выбору системы координат. Такой инвариантной формой записи уравнений является векторная форма, т. е. *уравнения физики как векторные равенства справедливы для любой системы координат*. Векторная форма записи уравнений широко применяется как в механике, так и в других разделах физики. В качестве примеров инвариантной формы записи можно привести векторные формулы, определяющие скорость (1.7), ускорение (1.10) и др. В то же время соответствующие формулы в проекциях при различном выборе систем координат различны.

Кроме *инвариантности уравнений* — сохранения формы записи их в разных системах координат, существует *инвариантность величин* — сохранение одного и того же значения в разных системах

координат. Например, модуль вектора является инвариантом любого преобразования координат, а проекции вектора различны в разных системах.

Инвариантность уравнений и инвариантность физических величин связана не только с выбором той или иной математической системы координат, но также и с преобразованиями системы координат, возможными благодаря свойствам пространства, рассмотренным выше[1]. Так, изотропность пространства позволяет повернуть на произвольный угол систему координат как целое вокруг любой оси, проходящей через начало координат. Это не влечет за собой изменения физических явлений, происходящих в системе. Таким образом, физические законы должны быть инвариантны относительно *пространственных поворотов* системы координат, что также заложено в векторной форме их записи. (В то же время проекции векторов зависят от положений осей системы — достаточно вспомнить преобразование координат точки при повороте осей в геометрии.)

Физические величины делятся на *векторные* — проекции их преобразуются при поворотах и переходах от одной системы к другой — и *скалярные* — значения их одинаковы в разных системах и при поворотах системы не меняются. Примером векторной величины служат радиус-вектор точки, скорость, ускорение и т. д. Модули всех этих величин — инварианты или скаляры преобразования координат. Из курса общей физики известно много других скалярных величин: масса, электрический заряд, температура и др.

Кроме *поворота,* возможен *сдвиг* системы координат как целого вместе с началом системы и осями. В силу однородности пространства такой сдвиг (или трансляция) даст физически равноправные системы. Но математически сдвиг для координат всех точек выражается равенством

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}, \tag{4.1}$$

где $\vec{a}$ — вектор трансляции. Инвариантность физических формул по отношению к трансляции означает, что в них радиус-векторы точек пространства непосредственно входить не могут. Так, например, сила, действующая на материальную точку, определяется взаимными расстояниями между взаимодействующими точками; эти расстояния к сдвигам инвариантны, инвариантна и сила. Инвариантны также к сдвигам в пространстве скорость материальной точки и многие другие векторные и скалярные величины, характеризующие физическое состояние системы.

Обратимся к однородности времени. Равноправие всех моментов времени означает возможность произвольного выбора начала его отсчета, сдвигов или *временных трансляций,* не влияющих физически на систему отсчета и явления в ней.

На протяжении курса будет выяснено, что симметрии простран-

---

[1] Сохранение формы уравнения называется ковариантностью уравнения, а сохранение величины — инвариантностью величины. Но часто термин *инвариантность* употребляют и для величин, и для уравнений.

ства и времени (однородность и изотропность) связаны с законами сохранения важнейших физических величин, характеризующих физическую систему,— энергии, импульса, момента импульса.

Познакомимся еще с одним преобразованием системы координат. Это в отличие от рассмотренных выше непрерывных преобразований (повороты и сдвиги могут быть бесконечно малыми) дискретные преобразования пространственной *инверсии* и *отражения времени:*

$$x \to x' = -x,\ y \to y' = -y,\ z \to z' = -z,\ t \to t' = -t. \quad (4.2)$$

Пространственная инверсия, как видно из рисунка 4.1, эквивалентна зеркальному отражению (с последующим поворотом вокруг оси Oz на угол π).

Естественным является предположение, что системы отсчета $Oxyz$ и $O'x'y'z'$ (отраженная) физически равноправны, т. е. уравнения в них сохраняют форму при инверсии осей. Векторные и скалярные уравнения механики действительно обладают этим свойством. Однако это не обязательно для любого уравнения; вообще говоря, скаляры и векторы при инверсии могут изменяться. По отношению к инверсии скаляры делятся на *истинные* скаляры (или просто скаляры) и *псевдоскаляры.* Истинный скаляр при инверсии осей не изменяется, т. е. удовлетворяет следующему условию:

$$\varphi(x,\ y,\ z) \to \varphi(x',\ y',\ z') = \varphi(-x,\ -y,\ -z). \quad (4.3)$$

Псевдоскаляр при инверсии меняет знак:

$$\psi(x,\ y,\ z) \to \psi(x',\ y',\ z') = -\psi(-x,\ -y,\ -z). \quad (4.4)$$

Векторы по отношению к инверсии делятся на *истинные (полярные)* и *псевдовекторы (аксиальные).* Истинный вектор отражается при инверсии вместе с отражением осей координат, что видно на примере радиус-вектора точки пространства. Для его проекций на основании формулы (4.2) имеем:

$$r_x = -r_{x'},$$
$$r_y = -r_{y'},$$
$$r_z = -r_{z'}.$$

Любой истинный вектор при образовании инверсии меняет знаки всех проекций на противоположные:

$$a_x(x,\ y,\ z) = -a_{x'}(-x,\ -y,\ -z) \text{ и т. д.} \quad (4.5)$$

Что касается псевдовектора, то он при отражении пространства не отражается вместе с осями. Так, если рассмотреть векторное произведение двух истинных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, лежащих в плоскости Oxy, и произвести инверсию, то из рисунка 4.2 видно, что ориентация вектора изменилась в системе на противоположную, т. е. для псевдовекторов справедливы следующие условия для проекций:

$$\omega_x(x,\ y,\ z) = \omega_{x'}(-x,\ -y,\ -z) \text{ и т. д.} \quad (4.6)$$

Физические величины выражаются как истинными скалярами и векторами, так и псевдоскалярами и псевдовекторами. Такие вели-

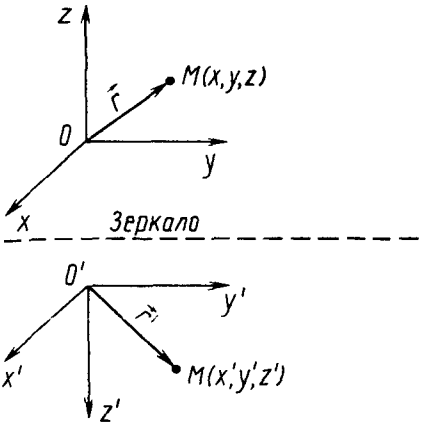

Рис. 4.1.

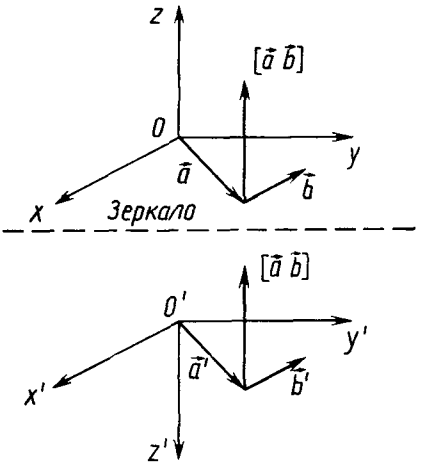

Рис 4.2.

чины, как скорость, ускорение, сила, являются истинными векторами, в то время как угловая скорость и угловое ускорение — псевдовекторы. Часто встречающиеся в механике скаляры — модули векторов — являются истинными. Истинные скаляры — масса, электрический заряд, количество теплоты и т. д. В качестве примера псевдоскаляра приведем скалярное произведение истинного и псевдовектора:

$$(\vec{\omega}\,\vec{r}) = \omega_x x + \omega_y y + \omega_z z.$$

В соответствии с формулами (4.2) и (4.6) $(\vec{\omega}\,\vec{r}) = -(\vec{\omega}'\vec{r}')$.

Деление величин на векторы и псевдовекторы, скаляры и псевдоскаляры отражает некоторые дополнительные свойства физических объектов, особенно характерные в микромире. В классической же механике это деление менее существенно. Заметим только, что любое векторное или скалярное равенство слева и справа может содержать в качестве слагаемых только величины одного и того же смысла по отношению к инверсии: истинные скаляры или псевдоскаляры, векторы или псевдовекторы.

Обратимся, наконец, к отражению времени — преобразованию $t \to t' = -t$. Его не удается интерпретировать как переход к системе отсчета с обратным ходом времени, так как подобных систем в природе не обнаружено — ход времени однонаправлен. Преобразование связывают либо с применением уравнений механики к расчету положений материальной точки в пространстве в прошедшие моменты времени, либо (в микромире) с процессами, обратными данным по начальным и конечным условиям.

Векторы, начальная точка которых определена физическими условиями и жестко фиксирована, называются *приложенными* (например, вектор силы, действующей на материальную точку). Если точка приложения вектора находится где угодно на линии вектора, то это вектор *скользящий* (например, сила, действующая на твердое тело). Если началом вектора служит любая точка пространства, то это *свободный* вектор например, радиус-вектор.

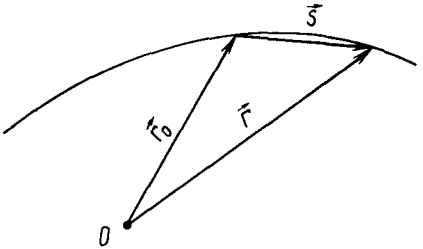

Рис. 4.3.

Методические замечания к главе.

В школьном курсе физики кинематика излагается в настоящее время в векторной форме. Основное упрощение, которое здесь делают, состоит в том, что понятие радиус-вектора как функции времени, т. е. кинематическое уравнение в общем виде, не рассматривается. Вместо радиус-вектора вводят вектор перемещения $\vec{s}$, соединяющий начальное положение движущейся точки с положением ее в некоторый момент времени t. Связь вектора перемещения и радиус-вектора видна из рисунка 4.3, откуда следует, что $\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_0$; и далее $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{dt}$, т. е. скорость движения точки может быть определена через вектор перемещения.

Надо со всей определенностью подчеркнуть, что нет никакого смысла применять векторную форму записи кинематического уравнения в частных случаях движения, так как для любого конкретного движения исчерпывающими являются формулы в проекциях или в естественной форме. В современных школьных учебниках это обстоятельство не учитывается. Пишутся, например, векторные уравнения для одномерного движения.

В кинематике вводится *понятие* о сложном движении точки. Смысл понятия сложного движения тесно связан с относительным характером движения: сложное движение по определению состоит из заданного движения точки в некоторой движущейся системе и движения этой системы в неподвижной. Однако в курсах физики часто говорится о том, что тело (или материальная точка) участвует в нескольких движениях, в связи с чем формально складывают или разлагают на составляющие векторы скорости и ускорения.

И в школьном курсе физический смысл сложения и разложения скоростей и ускорений, как правило, не выясняется: дело сводится к формальной математической операции сложения и разложения векторов. Между тем выражения типа «тело участвует в нескольких движениях», «имеет составляющие скорости» и т. д. без выяснения сути дела неясны, так как по определению у тела в заданной системе *одно* движение, *одна* скорость, *одно* ускорение.

Выяснение соответствующего круга вопросов — важная и трудная методическая задача, разрешаемая с помощью понятия об относительном характере механического движения, т. е. с помощью неподвижной и движущейся систем координат.

ГЛАВА II. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Если до сих пор мы изучали различные движения тел как заданные или происходящие, рассматривали без выяснений условий, при которых осуществляется то или другое движение, то теперь наша задача состоит именно в выяснении причин, побудивших тело двигаться равномерно, ускоренно (по прямолинейной или криволинейной траектории) и т. д. Раздел механики, в котором изучаются причины движения, называется *динамикой*. В отличие от кинематики, где движение описывается только с помощью координат, скоростей и ускорений, в динамике вводятся и другие величины, характеризующие взаимодействие тел: сила, масса, энергия и т. д. Именно эти величины определяют характер движения. В динамике рассматриваются основные законы механического движения, с помощью которых появляется возможность предсказывать