инвариантны при преобразованиях координат Галилея, то инвариантна и сила. Например, силы сопротивления среды зависят от относительной скорости тела, движущегося в среде, неизменной во всех инерциальных системах, и поэтому инвариантны. (Что касается электромагнитных сил, действующих на движущиеся с высокой скоростью электрические заряды в электромагнитном поле, то они имеют разную величину в разных системах отсчета, о чем говорится в части II курса.)

В целом по принципу относительности второй закон Ньютона должен быть инвариантен. Для этого необходимо, чтобы масса материальной точки была инвариантной величиной, т. е.

$$m = m'. \tag{5.13}$$

В справедливости этого утверждения убеждает опыт изучения и применения движений с нерелятивистскими скоростями: масса не зависит от скорости движения тела.

Итак, *второй закон Ньютона не только сохраняет свою форму во всех инерциальных системах, но и связывает инвариантные величины.* То же относится и к третьему закону, и к принципу независимого действия сил — они справедливы во всех инерциальных системах.

Утверждая, что любое механическое явление (с точки зрения разных наблюдателей) во всех инерциальных системах протекает одинаково, необходимо иметь в виду именно законы динамики. Кинематические же характеристики движения — скорость, траектория движения, уравнение движения,— как это видно из преобразований Галилея, различны в разных системах.

В связи с существованием множества инерциальных систем естественно поставить вопрос о некоторой исходной системе, которая была бы абсолютно неподвижной, а все остальные двигались бы в ней с определенными скоростями. Такую систему можно назвать *привилегированной.* Очевидно, что с помощью наблюдения механических явлений как-то выделить одну из инерциальных систем нельзя, хотя всегда можно найти скорости движения систем относительно друг друга. Однако Ньютон, по-видимому, думал, что неподвижная система существует и она связана с «абсолютным» пространством. В настоящее время известно, что такое допущение ошибочно, а инерциальные системы физически эквивалентны во всех отношениях, т. е. *привилегированной или абсолютно неподвижной системы нет.* Анализ этого важного положения выполняется ниже, в части II, а сейчас достаточно учитывать, что выбор неподвижной и подвижной систем условен.

§ 6. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

6.1. Две задачи динамики. Рассмотрим одну материальную точку, подверженную действию тел или полей. Как было показано в § 5, материальная точка находится в силовом поле, описанном форму-

лами (5.11) или (5.12). Дифференциальное уравнение ее движения в векторной форме согласно равенству (5.7) имеет вид:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t). \qquad (6.1)$$

Это уравнение называется основным уравнением динамики. В логическом плане оно может рассматриваться как исходное положение — постулат, из которого путем математических преобразований получают как общие следствия и выводы классической механики, так и решения множества ее конкретных задач. Это ядро динамики материальной точки.

Основной постулат динамики в форме дифференциального уравнения проясняет связь между определением силы и вторым законом Ньютона. Его суть в том, что *все механические движения подчиняются уравнению (6.1)*, где m — скалярный параметр, характеризующий свойства материальной точки, $\vec{r}$ — радиус-вектор, а $\vec{F}$ — некоторая однозначная, конечная, непрерывная функция координат, скорости и времени. Постулируется именно этот общий вид уравнения. А то, что правую часть называют силой, ничего от объективности закона движения не отнимает. Для применения уравнения (6.1) существенно, что сила может быть определена независимо.

С помощью уравнения (6.1) ставятся и решаются две важнейшие задачи, которые рассмотрим подробнее.

Первая задача: задано движение материальной точки с известной массой m, т. е. задано кинематическое уравнение движения (1.2):

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Требуется определить силу, приложенную к точке.

Пусть движение точки задано уравнениями в декартовых координатах, т. е. формулами (1.2): $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Рассматривая основное уравнение (6.1) также в декартовых координатах, имеем:

$$m\ddot{x} = F_x, \; m\ddot{y} = F_y, \; m\ddot{z} = F_z. \qquad (6.2)$$

Дифференцируя (1.2) по времени дважды и подставляя $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ — проекции ускорения в (6.2), получаем некоторые функциональные зависимости для всех проекций силы:

$$F_x = F_x(t), \; F_y = F_y(t), \; F_z = F_z(t).$$

С помощью решения первой задачи может быть найдено силовое поле (5.12), в котором движется материальная точка. В каждый момент времени сила $\vec{F}$ вычисляется по формулам (6.3), но из кинематических уравнений (1.2) известно и положение точки в пространстве. Следовательно, можно в принципе определить значение силы в различных точках пространства, найти зависимость силы от координат.

Первая задача оказывается относительно простой, она требует применения методов только дифференциального исчисления и всегда имеет решение.

Вторая задача: известно силовое поле, в котором движется материальная точка. Требуется определить движение точки.

Пусть сила как функция координат, скорости и времени задана в декартовых координатах в виде (5.12). Тогда искомыми будут

координаты x, y, z движущейся материальной точки как функции времени. Проецируя основное уравнение (6.1) на оси декартовых координат и используя известные функции (5.12) для силы, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{x} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{cases} \tag{6.3}$$

Неизвестные координаты точки x, y, z как функции времени входят в эти уравнения вместе со своими первыми и вторыми производными по времени. Для решения задачи требуется решить систему дифференциальных уравнений (6.3), называемых ньютоновыми дифференциальными уравнениями движения, и найти неизвестные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Проекции силы могут быть заданы не обязательно в декартовых координатах. Для этой цели может быть использована любая подходящая система координат. Например, в полярных координатах на плоскости должны быть указаны проекции вектора силы на направление радиус-вектора и на перпендикулярное ему направление как функции полярных координат точки, ее скорости в полярных координатах и времени. Для получения дифференциальных уравнений движения в полярных координатах основное уравнение динамики (6.1) нужно спроецировать на направления полярных осей, приняв во внимание известные выражения (1.18) для проекций ускорения. Имеем:

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}, t), \\ m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = F_\varphi(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}, t). \end{cases} \tag{6.4}$$

Если сила задана в проекциях на оси естественного трехгранника (см. рис. 1.6), то основное уравнение (6.1) проецируется на эти оси и система дифференциальных уравнений движения будет следующей:

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = F_\tau, \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n, \\ 0 = F_b. \end{cases} \tag{6.5}$$

Для того чтобы написать дифференциальные уравнения движения, как это видно из приведенных примеров, необходимо знать выражения для проекций ускорения на оси выбранной системы координат. Существует общий метод, позволяющий единообразно находить дифференциальные уравнения движения в произвольной криволинейной системе координат. Он рассматривается ниже, в главе VI.

6.2. Особенности общего решения второй задачи динамики материальной точки. Вторая задача динамики приводит к сложной математической проблеме интегрирования системы дифференциальных уравнений и часто представляет больший интерес для практики, нежели первая. Основное содержание динамики точки и состоит

в разработке методов решения второй задачи. В этом параграфе обсуждается общее решение этой задачи.

Изучение способов решения системы дифференциальных уравнений входит в курс математического анализа. Порядок каждого дифференциального уравнения в системе определяется порядком наивысшей производной, входящей в уравнение. При движении *свободной* точки порядок каждого из трех уравнений равен двум. В конкретных случаях уравнения интегрируются различными способами, но общее решение системы имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Здесь x, y, z — найденные, т. е. известные, функции указанных переменных, а C_1, C_2, ... C_6 — произвольные постоянные.

В простейших случаях переменные в дифференциальных уравнениях (6.3) разделяются и процесс решения сводится к последовательному взятию двух неопределенных интегралов (квадратурам).

Поэтому общее решение иногда называется *интегралом уравнений,* хотя в общем случае решение к квадратурам и не сводится.

Наличие произвольных постоянных в общем интеграле показывает, что он представляет не конкретное движение, а дает кинематические *уравнения целого непрерывного семейства движений с одинаковыми ускорениями.*

Отсюда следует, что задание силы еще не определяет однозначно движения материальной точки. Под действием одной и той же силы материальная точка может совершать любые движения из семейства, описанного формулами (6.6). Для того чтобы вторая задача имела определенное решение, необходимо указать добавочные условия, называемые *начальными.*

Начальные условия указывают для некоторого момента времени, обычно $t = 0$; это положение точки и вектор ее скорости (откуда и с какой скоростью начинает двигаться точка). Аналитически начальные условия записываются следующими равенствами (при решении задачи в декартовых координатах):

$$\begin{cases} x|_{t=0} = x_0, \ y|_{t=0} = y_0, \ z|_{t=0} = z_0, \\ \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0, \ \dot{y}|_{t=0} = \dot{y}_0, \ \dot{z}|_{t=0} = \dot{z}_0. \end{cases} \tag{6.7}$$

Наличие начальных условий позволяет найти единственное движение, удовлетворяющее поставленным требованиям, для чего необходимо только выразить шесть произвольных постоянных в общем интеграле через начальные координаты и скорости точки, указанные в равенствах (6.7). Заметим, что значения координат в общем решении справедливы для любого момента времени, в том числе и для момента $t = 0$. Положив в системе (6.6) $t = 0$ и приняв во внимание первую группу начальных условий, можем написать следующие три

алгебраических уравнения, которым должны удовлетворять произвольные постоянные:

$$\begin{cases} x_0 = x_0(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y_0 = y_0(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z_0 = z_0(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{cases} \tag{6.8}$$

Для составления недостающих трех уравнений возьмем производные по времени в обеих частях равенств (6.6):

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{y} = \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{z} = \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{cases} \tag{6.9}$$

В полученных уравнениях $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ суть известные функции указанных аргументов. Уравнения определяют проекции скорости в любой момент времени. Выписывая их для момента времени $t = 0$ и принимая во внимание начальные условия (6.7), получаем три новых независимых уравнения для определения произвольных постоянных:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \dot{x}_0(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{y}_0 = \dot{y}_0(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{z}_0 = \dot{z}_0(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{cases} \tag{6.10}$$

В совокупности с уравнениями (6.8) уравнения (6.10) составляют систему из шести независимых уравнений для определения шести неизвестных произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_6. Система разрешима. Ее решение выражает произвольные постоянные через начальные координаты и скорость точки:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_1(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ C_2 &= C_2(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_6 &= C_6(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned}$$

Подстановка найденных значений произвольных постоянных в общее решение уравнений движения (6.6) дает частное решение системы дифференциальных уравнений движения; это искомые кинематические уравнения движения материальной точки:

$$\begin{aligned} x &= f_1(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y &= f_2(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z &= f_3(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned}$$

Таким образом, вторая задача динамики оказывается полностью решенной.

Для пояснения приведенных общих соображений по решению задачи далее рассмотрены примеры, в которых все выкладки доводятся до конца. Но в большинстве случаев дифференциальные уравнения движения не могут быть проинтегрированы и не может быть получено точное решение задачи. Заметим, что для практики это обстоятельство не имеет решающего значения, так как при-

ближенное решение всегда можно получить с требуемой точностью, особенно в век электронно-счетных машин.

Во многих случаях полного решения второй задачи не требуется. Достаточным оказывается установление некоторых отдельных свойств движения точки. В таких случаях решение задачи по приведенной выше схеме нецелесообразно. Вместо полного решения здесь может оказаться достаточным знание некоторых *первых интегралов* движения. В первые интегралы входят еще первые производные по времени от координат, т. е. решение дифференциальных уравнений выполнено не до конца (см. примеры 6.1—6.6). Рассмотрим смысл первых интегралов. Общее решение, выраженное формулами (6.6), и три уравнения (6.9), получающиеся из него в результате дифференцирования по времени, можно рассматривать как систему уравнений относительно шести неизвестных констант C_1, C_2, ..., C_6. Предположим, что ее решили. Решения имеют вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= \varphi_1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ C_2 &= \varphi_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ C_6 &= \varphi_6(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{aligned}$$

Из первых пяти уравнений время t можно исключить, для чего достаточно выразить его через координаты и скорости, пользуясь последним уравнением. Тогда результат можно представить в таком виде:

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ C_2 = \psi_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_6 = \psi_6(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{cases} \tag{6.11}$$

В силу постоянства левых частей равенств функции ψ_1, ψ_2, ..., ψ_6, зависящие от координат движущейся точки, проекций скорости и, вообще говоря, времени, обладают тем свойством, что при движении точки сохраняют свои значения неизменными[1]. Они называются первыми интегралами движения и выражают законы сохранения некоторых величин C. Равенства (6.11) показывают, что существует *шесть независимых первых интегралов*. Любая функция первых интегралов также будет (зависимым) интегралом движения. Если все шесть первых интегралов известны, то из них можно (без интегрирования) получить полное решение второй задачи динамики точки. В самом деле, решая уравнения (6.11) относительно x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, получим кинематические уравнения типа $x = x(C_1, C_2, ..., C_6, t)$, что при заданных C_1, C_2, ..., C_6 дает частные решения, а при произвольных — общий интеграл исходных уравнений.

Знание одного первого интеграла позволяет понизить порядок системы дифференциальных уравнений на единицу и тем самым упростить ее интегрирование.

---

[1] Зависимость от времени останется в одном из первых интегралов, т. е. время в него входит явно.

Знание некоторых интегралов сразу дает ответ на многие частные вопросы задачи. Поэтому важнейшей частью динамики точки является установление признаков существования интегралов и их нахождение.

6.3. Принцип причинности в классической механике. Основное уравнение динамики (6.1) и общий анализ его решения, выполненный выше, позволяют рассмотреть причинно-следственные связи при механическом движении. Механическая система состоит из материальных точек, координаты и скорости которых определяются в каждый момент времени в инерциальной системе отсчета. Состояние системы точек в данный момент времени считается заданным, если известны координаты каждой материальной точки и ее скорость в этот момент. Кроме того, должны быть известны массы материальных точек. Разъясним, почему координаты и скорости определяют состояние.

Сила, действующая на каждую точку в системе, определяется в данный момент времени t взаимными положениями всех точек и их относительными скоростями. С помощью второго закона Ньютона мы можем, зная силы, определить мгновенные значения ускорений и, располагая скоростями всех точек, найти положения и скорости их в следующий (бесконечно близкий) момент времени $t + dt$:

$$v_{(t+dt)} = v_t + a_t dt, \; x_{t+dt} = x_t + v_t dt + \frac{a_t dt^2}{2}.$$

Затем снова определяются силы, ускорения, скорости и положения точек в следующий момент времени и т. д.

Таким образом, *состояние механической системы в некоторый момент времени однозначно предопределяет состояние системы в любой другой момент времени.*

Такая однозначная связь причины и следствия носит название *динамической закономерности.* Классическая механика принадлежит к группе теорий с динамической закономерной связью между причинами и следствиями в механическом движении. Сам же принцип причинности в классической механике состоит в том, что *состояние системы материальных точек однозначно определяется их взаимодействием и начальными условиями.* Все последующие состояния предопределены предыдущими.

Принцип причинности может быть распространен и на систему материальных точек, включающую в себя физическое поле. Если характеристики поля, задающие силу, однозначно определяются положениями и скоростями всех материальных точек системы (замкнутой и изолированной), то проведенные выше рассуждения справедливы и для этого случая.

6.4*. Обращение хода времени. Рассмотренное ранее в § 1 свойство однонаправленности времени никак не проявляет себя в механике; основное уравнение динамики инвариантно относительно обращения или отражения времени, математически определяемого подстановкой $\Delta t \to \Delta t' = -\Delta t$. Покажем это.

В простейшем случае чисто механической системы сила, действующая на точку, зависит только от взаимного расстояния между точками, т. е. $\vec{F}(\vec{r})$ — инвариант указанного преобразования. Подробный анализ всех механических сил, в том числе электромагнитных, показывает, что они инвариантны при обращении времени. Так как

ускорение точки определяется второй производной по времени, то оно также инвариант указанного преобразования, что непосредственно вытекает из выкладки:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt'^2} = \frac{d}{dt'}\left(\frac{d\vec{r}}{dt'}\right) = \frac{d}{-dt}\left(\frac{d\vec{r}}{-dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Итак, при обращении времени сохраняются форма основного уравнения динамики и входящие в него величины. Это отражено в нижеследующих формулах: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \to m'\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}'$, $m' = m$, $\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}}$, $\vec{F}' = \vec{F}$.

Очевидно, что инвариантными при преобразовании $t = -t$ являются также и первый, и третий законы Ньютона.

Что же касается скорости движения материальной точки, то, пользуясь ее определением $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, находим:

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}}{dt'} = -\frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{v}.$$

При обращении времени направление скорости меняется на обратное.

Сказанное об инвариантности законов механики приводит к выводу об обратимости механических процессов: если осуществляется некоторое движение, соответствующее прямому (естественному) течению времени, то возможно и обратное движение — «движение вспять». При обратном движении материальная точка (система) последовательно проходит все положения в пространстве и приобретает противоположные по направлению значения скоростей в обратном порядке.

Проиллюстрируем обратимость движения простым примером. Пусть в некоторой системе K на материальную точку, находящуюся в состоянии покоя, действует постоянная сила. В таком случае точка движется по оси Ox равноускоренно в соответствии с равенствами $v = at$, $x = \frac{at^2}{2}$.

В системе K' с обращенным временем, где $\triangle t' = -\triangle t$, сила и ускорение остаются теми же, а направление скорости изменяется на обратное.

Пусть в системе K к моменту времени t_0 материальная точка достигла скорости v_0 и находится в точке пространства x_0. Рассматривая ее движение в системе K' с этого момента времени как начального, т. е. $t = 0$, имеем:

$$v' = -v_0 + at',$$
$$x' = x_0 - v_0t' + \frac{at'^2}{2}.$$

Это равнозамедленное движение по оси Ox осуществляется вспять. Таблица, составленная для $a = 1$, $t_0 = 5$, наглядно показывает, что материальная точка проходит рассмотренные в системе K положения в обратном порядке.

K	t	0	1	2	3	4	5
	v	0	1	2	3	4	5
	x	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	8	$12\frac{1}{2}$
K'	t'	5	4	3	2	1	0
	v'	0	−1	−2	−3	−4	−5
	x	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	8	$12\frac{1}{2}$

Однако сделанное в этом параграфе заключение об обратимости механических процессов не может рассматриваться в качестве свидетельства обратимости времени. В природе неизвестны системы отсчета с обратным ходом времени, так что одно и то же движение нельзя «увидеть» в прямом и обратном порядке. Практически обратимость механических движений может быть достигнута за счет разных начальных условий при действии одних и тех же сил, о чем и свидетельствует таблица, если ее данные интерпретировать в одной и той же системе с одним ходом времени.

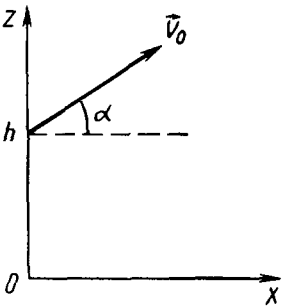

Рис. 6.1.

Пример 6.1. **Решение задачи на движение материальной точки массы m под действием силы тяжести вблизи поверхности Земли.**

Для математического оформления задачи необходимо выбрать систему координат. Хотя в принципиальном отношении выбор координатной системы безразличен, неудачный выбор координат практически может сильно затруднить выкладки и истолкование полученного решения. Необходимо стремиться к тому, чтобы проекции силы на выбранные оси выражались наиболее просто, для чего можно оси ориентировать так, чтобы большее число сил было им либо параллельно, либо перпендикулярно. В данной задаче одну из осей декартовой прямоугольной системы следует направить вертикально вверх, так как сила тяжести направлена по вертикали. Тогда плоскость Oxy расположится на поверхности Земли. Для упрощения записи начальных условий начало координат поместим в точке, лежащей на одной вертикали с точкой, из которой начинает двигаться материальная точка. Ось Ox направим так, чтобы вектор начальной скорости совпадал с плоскостью Oxz Проекции силы на выбранные оси будут $F_x = F_y = 0$, $F_z = -mg$. Ньютоновы дифференциальные уравнения движения (6.2) для нашей задачи имеют вид:

$$m\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{x} = 0,$$
$$m\ddot{y} = 0, \qquad \ddot{y} = 0,$$
$$m\ddot{z} = -mg, \qquad \ddot{z} = -g.$$

Тот факт, что масса точки исключается из дифференциальных уравнений, указывает на независимость движения от массы частицы. Это характерная особенность гравитационных взаимодействий.

Начальные условия задаются следующими равенствами:

$$\dot{x}|_{t=0} = 0, \qquad y|_{t=0} = 0, z|_{t=0} = h,$$
$$x|_{t=0} = v_0\cos\alpha, \qquad \dot{y}|_{t=0} = 0, \dot{z}|_{t=0} = v_0\sin\alpha. \tag{6.12}$$

Здесь h — высота точки над поверхностью Земли, из которой начинается движение, v_0 — начальная скорость, α — угол, образуемый начальной скоростью с горизонтом (рис. 6.1) Первый шаг в решении задачи — ее математическая формулировка — выполнен.

Следующим шагом является решение дифференциальных уравнений движения. В нашем случае решение элементарно и мы выпишем его без пояснений:

$$\dot{x} = C_1, \qquad x = C_1t + C_2,$$
$$\dot{y} = C_3, \qquad y = C_3t + C_4,$$
$$\dot{z} = gt + C_5, \qquad z = -\frac{1}{2}gt^2 + C_5t + C_6.$$

Отсюда видно, что если мы знаем первые интегралы C_1, C_3, C_5, то далее необходимо решить уравнения первого порядка, а если известны и остальные интегралы C_2, C_4, C_6, то решение обходится без интегрирования.

Теперь остается отыскать частное решение, удовлетворяющее начальным условиям. Полагая в решении, что $t = 0$, и используя начальные условия — равенства

(6.12), составляем систему уравнений для нахождения значений произвольных постоянных:

$$v_0\cos\alpha = C_1, \quad 0 = C_3, \quad v_0\sin\alpha = C_5,$$
$$0 = C_2, \quad 0 = C_4, \quad h = C_6.$$

После подстановки найденных решений получаем искомые кинематические уравнения движения точки:

$$x = v_0 t\cos\alpha,\ y = 0,\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha + h.$$

Подстановка в эти решения конкретных числовых значений h, v_0 и α дает ответ на любую задачу баллистики — науки о бросании тел на Земле.

Пример 6.2. **Решение задач на одномерное движение.**

В частном случае прямолинейного движения материальной точки решение второй задачи значительно проще.

Направив ось по траектории движения, получаем только одно дифференциальное уравнение:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right).$$

Начальные условия сводятся к двум равенствам:

$$x|_{t=0} = x_0, \qquad \frac{dx}{dt}|_{t=0} = \dot{x}_0.$$

Но и здесь дифференциальное уравнение движения лишь в частных случаях может быть сведено к интегралам.

Рассмотрим примеры.

Пример 6.3. **Одномерное движение под действием постоянной силы.**

Дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F = a.$$

Его общий интеграл получается по методу разделения переменных и выражается следующей формулой:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2.$$

Движение равноускоренное.

Пример 6.4. **Сила — функция времени.**

Дифференциальное уравнение движения для силы $F_x = F(t)$ имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t)$$

и простыми приемами доводится до первых и вторых интегралов:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{m}F(t) = a(t),$$

$$\frac{dx}{dt} = \int a(t)dt + C_1 = v(t) + C_1,$$

$$x = \int v(t)dt + C_1 t + C_2.$$

Достигнуто решение в виде неопределенных интегралов.

Пример 6.5. **Сила зависит от координаты x точки.**

Дифференциальное уравнение задачи имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F(x).$$

Делаем подстановку для решения уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

и приводим его к виду

$$vdv = \frac{1}{m}F(x)\,dx.$$

Дальнейшее преобразование уравнения понятно без пояснений:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{1}{m}\int F(x)dx + C_1 = f(x) + C_1,$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2[f(x)+C_1]},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2[f(x)+C_1]}} + C_2 = t.$$

Решение также достигнуто квадратурами.

Пример 6.6. **Сила зависит от скорости движения точки.**

Вводим подстановку $\dot{x} = v$ и записываем дифференциальное уравнение в виде

$$\dot{v} = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{m}F(v).$$

Переменные в уравнении разделяем и производим первое интегрирование:

$$\int\frac{vdv}{F(v)} = \frac{x}{m} + C_1.$$

Берем интеграл и получаем новое уравнение с неизвестной v:

$$f(v) = \frac{x}{m} + C_1.$$

Разрешаем полученное уравнение относительно v и возвращаемся к старым обозначениям:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x_1C_1).$$

Отсюда разделением переменных получаем окончательно общий интеграл уравнения движения:

$$\int\frac{dx}{\varphi(x_1C_1)} + C_2 = t.$$

Если уравнение $f(v) = \frac{x}{m} + C_1$ неразрешимо относительно v, поступаем иначе. Пишем дифференциальное уравнение движения в виде

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}F(v),$$

интегрируем разделением переменных:

$$\int\frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m}t + C_3.$$

После взятия интеграла получаем уравнение

$$f_1(v) = \frac{t}{m} + C_3.$$

Исключая из найденных двух уравнений v, находим уравнение, связывающее координату x и время t И в этом случае общее решение уравнения движения получено.

Пример 6.7. **Использование первого интеграла.**

Для одномерного движения материальной точки известен первый интеграл: $E = \frac{m\dot{x}^2}{2}$. В таком случае

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

и задача свелась к уравнению первого порядка. Его решение находится методом разделения переменных:

$$x = \sqrt{\frac{2E}{m}}\, t + C$$

Пример 6.8. **Использование двух первых интегралов движения.**

Для свободно падающей материальной точки располагаем двумя первыми интегралами:

$$E = \frac{m\dot{z}^2}{2} + mgz,\ g = \frac{\dot{z}}{t},$$

где z — координата по вертикальной оси с началом на поверхности Земли.

Подставляя z из второго уравнения в первое, получаем:

$$E = \frac{mg^2t^2}{2} + mgz,$$

откуда и следует кинематическое уравнение

$$z = \frac{E}{mg} - \frac{gt^2}{2}$$

Решение поставленной задачи достигнуто без применения интегрирования

Методические замечания к материалу § 6. Изучение законов Ньютона в средней школе составляет основу курса механики и во многом определяет другие разделы Возможность изучения основного уравнения динамики без использования дифференциального исчисления обеспечена трактовкой уравнения $\vec{F} = m\vec{a}$ как алгебраического, из которого можно найти $\vec{a}$ (для частного случая постоянной силы). Однако при изучении второго закона возникают серьезные методические трудности, связанные с динамическим определением силы. От школьников обычно ускользают тонкости в логических рассуждениях, отличающие объективное содержание закона от такого же по форме определения силы. Путь преодоления указанных трудностей состоит в независимом измерении сил по их статическому действию и в последующем выводе о пропорциональности ускорения силе, выполняемом с опорой на опыты Динамическое же определение силы и единицы силы можно ввести после изучения второго закона. То же относится и к массе тела, и к третьему закону Ньютона Допустимо для разграничения третьего закона и определения массы измерять массу взвешиванием, а с определением массы через ускорение познакомиться после изучения третьего закона.

Правомерность такого подхода обусловлена объективным законом природы — эквивалентностью тяжелой и инертной массы любого тела.

В школьном курсе игнорируется принцип суперпозиции сил. Вместо него фигурирует рассуждение: поскольку сила — величина векторная, то силы складываются геометрически. Но векторный характер сил при их динамическом определении вытекает только из принципа суперпозиции. Поэтому вопросу о сложении сил следует уделить особое внимание, тем более что статика как самостоятельный раздел в настоящее время в школе не изучается и представления о векторном характере сил у учащихся не сформированы.